Le sujet comporte 4 pages numérotées de 1/4 à 4/4.
(La page 4/4 est à rendre avec la copie)

Exercice 1(5 points)

1) On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^2+(1+i\sqrt{3})z-2+2i\sqrt{3}=0$.
   a) Vérifier que -2 est une solution de (E).
   b) Trouver l'autre solution.

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$.

On considère les points A, B et C d'affixes respectives $z_A=-2$, $z_B=1-i\sqrt{3}$ et $z_C=-z_B$ et le cercle $(\mathcal{C})$ de centre O et passant par A.

2) a) Montrer que B est un point du cercle $(\mathcal{C})$.
   b) Construire alors le point B puis le point C.
   c) Montrer que le triangle ABC est rectangle en A.
3) La droite (AC) coupe l'axe imaginaire en un point D.
   a) Placer le point D.
   b) On pose $z_D=ia$ où a est un réel.
   Montrer que $(z_A-z_C)\overline{(z_A-z_D)}=2+a\sqrt{3}+i(2\sqrt{3}-a)$.
   c) En déduire que $a=2\sqrt{3}$.
4) Montrer que le point C est le milieu du segment $[AD]$.

Exercice 2 (4 points)

1) Justifier que PGCD(575, 75)=25.
2) On considère dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ les équations (E) : $23x+3y=1$ et (E') : $23x+3y=64$.
   a) Vérifier que (-1, 8) est une solution de (E) et en déduire une solution particulière de l'équation (E').
   b) Montrer que l'ensemble des solutions de (E') est $\{(-64+3k, 512-23k),\ k\in\mathbb{Z}\}$.
3) Un centre d'appel a acheté n écrans au prix de 575 DT l'unité et p casques au prix de 75 DT l'unité. Le coût total de cet achat s'élève à 1600 DT.
   a) Montrer que (n, p) vérifie l'équation (E').
   b) Déterminer le nombre d'écrans et de casques achetés par le centre d'appel.

Exercice 3 (4 points)

On considère les matrices $A=\begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 \\ 2 & -3 & 2 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$ et $I_3=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1) a) Montrer que A est inversible. (On notera A^{-1} la matrice inverse de A)

   b) Calculer A^2 et en déduire que $A^2+4A=5I_3$.

   c) Montrer alors que $A^{-1}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

2) On considère le système (S) suivant : $\begin{cases} -3x+2y+2z=-10 \\ 2x-3y+2z=10 \\ 2x+2y-3z=20 \end{cases}$ où x, y et z des réels.

   a) Donner l'écriture matricielle de (S).

   b) Résoudre alors (S).

Exercice 4 (7 pts)

I. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=(x+1)e^x+1$.

1) Montrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que pour tout $x\in\mathbb{R}$, $g'(x)=(x+2)e^x$.

2) a) Etudier les variations de g.

   b) Déduire que pour tout $x\in\mathbb{R}$, $g(x)>0$.

II. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=xe^x+x$.

On désigne par (Γ) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) a) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et montrer que la droite $\Delta: y=x$ est une asymptote à (Γ) au voisinage de $-\infty$.

   b) Etudier la position relative de (Γ) et Δ.

   c) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$. Interpréter graphiquement les résultats obtenus.

2) a) Vérifier que pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f'(x)=g(x)$.

   b) Dresser le tableau de variation de f.

3) a) Montrer que le point $I(-2, f(-2))$ est un point d'inflexion de (Γ).

   b) On désigne par T la tangente à (Γ) au point I.

   Montrer qu'une équation de T est : $y=\frac{1}{e^2}\left[\left(e^2-1\right)x-4\right]$.

c) Vérifier que le point $K(-4,-4)$ est un point de T.

4) Dans l'annexe ci-jointe on a tracé dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ la droite Δ et on a placé le point I. Placer le point K puis Tracer la tangente T et la courbe (Γ).

5) Soit n un entier naturel non nul.

a) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que $\int_{-n}^{0} xe^{x}dx = ne^{-n} + e^{-n} - 1$.

b) On désigne par A_n l'aire, en unité d'aire, de la partie du plan limitée par (Γ), Δ et les droites d'équations $x = -n$ et $x = 0$.

Déterminer A_n puis calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} A_n$.

Section : . . . . N° d'inscription : . . . . Série : . . . .

Nom et Prénom : . . . .

Date et lieu de naissance : . . . .

Signatures des surveillants

. . . .

. . . .

Épreuve: Mathématiques - Section : Sciences de l'informatique
Session principale (2026)
Annexe à rendre avec la copie