

N° d'inscription

**Le sujet comporte 4 pages numérotées de 1/4 à 4/4.  
La page 4/4 est à rendre avec la copie.**

**Exercice 1: ( 3 points )**

Une étude statistique faite dans une région a montré que :

- ✓ 80% des femmes enceintes font un suivi médical sur leur grossesse.
- ✓ 95% des femmes qui font un suivi médical sur leur grossesse, accouchent sans aucune complication.
- ✓ 70% des femmes qui ne font pas un suivi médical sur leur grossesse, accouchent sans aucune complication.

1) On choisit au hasard une femme de cette région qui vient d'accoucher.

On considère les événements suivants :

M : « la femme choisie a fait un suivi médical sur sa grossesse »,

A : « l'accouchement de la femme choisie se déroule sans aucune complication ».

a) Donner les probabilités  $p(M)$ ,  $p(A/M)$  et  $p(A/\bar{M})$ .

b) Montrer que  $p(A)=0.9$ .

c) Sachant que l'accouchement se déroule avec au moins une complication, calculer la probabilité que la femme choisie n'ait pas eu de suivi médical sur sa grossesse.

2) On interroge indépendamment 10 femmes de cette région ayant accouché.

On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre de femmes ayant accouché sans aucune complication.

a) Calculer l'espérance mathématique de X.

b) Justifier que  $p(X=9)=(0.9)^9$ .

c) Calculer la probabilité qu'au plus un accouchement se déroule avec au moins une complication. Le résultat sera arrondi à  $10^{-2}$  près.

## Exercice 2: ( 4.5 points )

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

On considère les points  $A(1, 2, 1)$ ,  $B(-1, 3, 2)$ ,  $C(1, 1, 2)$  et  $I(-1, 0, -1)$ .

- 1) a) Déterminer les composantes du vecteur  $\overline{AB} \wedge \overline{AC}$ .  
En déduire que les points A, B, et C déterminent un plan P.
  - b) Montrer qu'une équation cartésienne du plan P est  $x + y + z - 4 = 0$ .
  - c) Calculer l'aire du triangle ABC.
- 2) Soit  $\Delta$  la droite passant par le point B et de vecteur directeur  $\vec{u} = \vec{j} - \vec{k}$ .
  - a) Montrer que la droite  $\Delta$  est incluse dans le plan P.
  - b) Prouver que la distance du point I à la droite  $\Delta$  est  $d(I, \Delta) = 3\sqrt{2}$ .
- 3) Soit S l'ensemble des points  $M(x, y, z)$  de l'espace tels que  $x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 2z - 16 = 0$ .
  - a) Vérifier que S est la sphère de centre I et de rayon  $3\sqrt{2}$ .
  - b) Montrer que S et P sont sécants suivant le cercle  $\zeta$  de centre A et passant par le point B.
  - c) Montrer que, dans le plan P, la droite  $\Delta$  est tangente au cercle  $\zeta$  au point B.

## Exercice 3: ( 5 points )

1) On considère dans  $\mathbb{C}$ , l'équation (E):  $z^2 - (3\sqrt{3} + i)z + 6 + 2\sqrt{3}i = 0$ .

- a) Vérifier que  $(\sqrt{3} - i)^2 = 2 - 2\sqrt{3}i$ .
- b) Résoudre l'équation (E).

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ . On considère les points

A, B, C et D d'affixes respectives  $a = \sqrt{3} + i$ ,  $b = 2i$ ,  $c = 2\sqrt{3}$  et  $d = (1 + \sqrt{3})(1 + i)$ .

Dans la figure de l'annexe ci-jointe, on a placé le point B.

- 2) a) Montrer que le point A est le milieu du segment [BC].
  - b) Vérifier que  $a = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$ . Construire, dans l'annexe, les points A et C.
- 3) Soit  $\zeta$  le cercle de centre A et de rayon 2.
  - a) Vérifier que le point D appartient au cercle  $\zeta$ .
  - b) Montrer que  $b - c = 2i(d - a)$ . En déduire que les droites (AD) et (BC) sont perpendiculaires.
  - c) Construire, dans l'annexe, le point D.
- 4) Soit M un point du cercle  $\zeta$  d'affixe z non nulle.
  - a) Justifier que  $|z - a|^2 = 4$ . En déduire que  $\bar{z}z = a\bar{z} + \bar{a}z$ .
  - b) On pose  $z = re^{i\theta}$ ,  $r > 0$  et  $\theta \in \mathbb{R}$ . Montrer que  $r = 4\cos\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right)$ .
  - c) Ecrire le nombre complexe d sous forme exponentielle. Déduire que  $\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$ .
- 5) Le cercle de centre O et passant par le point D recoupe le cercle  $\zeta$  en un point H d'affixe h. Déterminer un argument de h.

### Exercice 4: ( 7.5 points )

**A/** Soit  $f$  la fonction définie sur  $]0, +\infty[$  par  $f(x) = x - \frac{1}{x} + e^{x-1}$ .

On désigne par  $(\zeta_f)$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

1) a) Calculer  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ . Interpréter graphiquement.

b) Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  et montrer que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ . Interpréter graphiquement.

2) a) Montrer que  $f$  est strictement croissante sur  $]0, +\infty[$ .

b) Dresser le tableau de variation de  $f$ .

3) a) Montrer que  $f$  admet une fonction réciproque  $f^{-1}$  définie sur  $\mathbb{R}$ .

On note  $(\Gamma)$  la courbe représentative de  $f^{-1}$  dans le même repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

b) Justifier que l'équation  $f(x) = 0$  admet dans  $]0, +\infty[$  une unique solution  $\alpha$ .

Vérifier que  $0.6 < \alpha < 0.7$ .

c) On donne ci-contre, le tableau de signe de l'expression  $f(x) - x$ ,  $x > 0$ .

$x$	0		1		$+\infty$
$f(x) - x$		-	0	+	

Donner la position relative de la courbe  $(\zeta_f)$

et la droite  $\Delta$  d'équation  $y = x$ .

d) Tracer, **sur votre copie**, les courbes  $(\zeta_f)$  et  $(\Gamma)$  dans le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

4) a) Soit  $\mathcal{A}$  l'aire ( en u.a ) de la partie du plan limitée par la courbe  $(\zeta_f)$ , l'axe des abscisses et les droites d'équations  $x = \alpha$  et  $x = 1$ .

Montrer que  $\mathcal{A} = \frac{3}{2} - \frac{\alpha^2}{2} + \ln \alpha - e^{\alpha-1}$ .

b) En déduire, à l'aide de  $\alpha$ , la valeur de l'intégrale  $\int_0^1 f^{-1}(x) dx$ .

**B/** Soit  $g$  la fonction définie sur l'intervalle  $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$  par  $g(x) = x - \frac{1}{6}f(x)$ .

1) a) Montrer que pour tout  $x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ ,  $\frac{1}{x^2} + e^{x-1} \leq 5$ .

b) Déduire que la fonction  $g$  est croissante sur l'intervalle  $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ .

2) Soit  $u$  la suite définie par  $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = g(u_n) \end{cases}$ , pour tout entier naturel  $n$ .

a) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel  $n$ ,  $\alpha \leq u_n \leq 1$ .

b) Montrer que la suite  $u$  est décroissante.

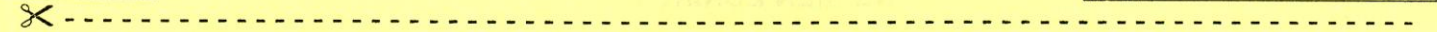
c) Déduire que la suite  $u$  est convergente et déterminer sa limite.

Section : ..... N° d'inscription : ..... Série : .....

Nom et Prénom : .....

Date et lieu de naissance : .....

**Signatures des surveillants**  
.....  
.....



**Épreuve: Mathématiques - Section : Sciences expérimentales  
Session principale (2026)  
Annexe à rendre avec la copie**

**Figure**

