RÉPUBLIQUE TUNISIENNE MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION	**EXAMEN DU BACCALAURÉAT * * * Session principale 2026**	
	Épreuve : **Mathématiques**	Section : **Mathématiques**
	Durée : **4h**	Coefficient de l'épreuve : **4**

N° d'inscription | | | | | | |

Le sujet comporte six pages numérotées de 1/6 à 6/6.

La page 6/6 est à rendre avec la copie.

Exercice 1 (5.5 points)

Dans **la figure 1** de l'annexe jointe, CEA et CDB sont deux triangles rectangles et isocèles en C de sens direct et ABC est un triangle rectangle en A tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}}\right) \equiv \frac{\pi}{6}[2\pi]$.

1. Soit R la rotation de centre C et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

   a) Déterminer R(A) et R(B).

   b) En déduire que $AB = ED$ et que les droites (AB) et (ED) sont perpendiculaires .

2. Soit f l'antidéplacement tel que $f(A) = E$ et $f(B) = D$.

   a) Montrer que f est une symétrie glissante.

   b) Montrer que $f = S_{(ED)} \circ R$.

   c) Soit F le symétrique de C par rapport au point E et O le milieu du segment $[BD]$.

   Montrer que $f(C) = F$. En déduire l'axe de f.

   d) Montrer que les points E , A et O sont alignés.

Soit g la similitude directe de centre O et telle que $g(C) = E$.

On désigne par ζ le cercle de diamètre $[BC]$.

3. a) Vérifier que O appartient au cercle ζ.

   b) En déduire qu'une mesure de l'angle de g est $\frac{\pi}{6}$.

4. La droite (EC) recoupe le cercle ζ en un point G.

   a) Montrer que le triangle OGE est rectangle et isocèle . En déduire que $g(B) = G$.

   b) Montrer que le quadrilatère ABGC est un rectangle.

c) En déduire que le rapport de g est $\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$.

5. La droite (AB) coupe la droite (OC) en un point H et la droite (AG) recoupe le cercle de diamètre $[EG]$ en un point K. Montrer que $g(H)=A$ puis que $g(A)=K$.

Exercice 2 (4 points)

Soit m un nombre complexe non nul.

1. On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E_m) : $mz^2-(1+m^2)z+m=0$.

Développer $(m^2-1)^2$ puis résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E_m).

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$.

On donne les points A, M et M' d'affixes respectives i, m et $\dfrac{1}{m}$ et on désigne par ζ le cercle de centre A et de rayon $\sqrt{2}$.

2. a) Vérifier que $\left(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{OM'}}\right)\equiv-\left(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{OM}}\right)[2\pi]$.

   b) Montrer que pour tout $z\in\mathbb{C}$, $|z-i|^2=2$ si et seulement si $z\bar{z}+iz-i\bar{z}-1=0$.

   c) En déduire que $M'\in\zeta$ si et seulement si $M\in\zeta$.

   d) Dans **la figure 2** de l'annexe jointe, on a placé un point M sur ζ. Construire le point M'.

3. Dans cette question, on suppose que M **est un point de** ζ qui n'appartient pas aux axes du repère. On pose $m=a+ib$ où a et b sont deux réels.

On désigne par T_M et $T_{M'}$ les tangentes à ζ respectivement en M et M'.

T_M coupe l'axe des abscisses en un point E d'affixe x, où x est un réel.

   a) Montrer que $a^2+b^2=1+2b$.

   b) Montrer que $\dfrac{\text{aff}(\overrightarrow{EM})}{\text{aff}(\overrightarrow{AM})}=\dfrac{1+b-ax}{2}+i\,\dfrac{a+x(b-1)}{2}$.

   c) En déduire que $x=\dfrac{1+b}{a}$.

   d) Vérifier que $\dfrac{1}{m}=\dfrac{a}{1+2b}-i\dfrac{b}{1+2b}$.

   e) Montrer alors que les droites T_M, $\left(O,\vec{u}\right)$ et $T_{M'}$ sont concourantes en E.

Exercice 3 (4 points)

On considère la suite U définie par $U_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = 3\,U_n^2 - 1$.

1. a) Montrer que pour tout entier naturel n , $U_{n+2} = 27U_n^4 - 18U_n^2 + 2$.

   b) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{2n} \equiv 1 \pmod{10}$.

   c) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{2n+1} \equiv 2 \pmod{10}$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = U_0 + U_1 + \ldots + U_n$ et $P_n = U_0 \times U_1 \times \ldots \times U_n$.

2. a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_{2n} \equiv 3n + 1 \pmod{10}$.

   b) Vérifier que 7 est un inverse de 3 modulo 10.

   c) Déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_{2n} \equiv 0 \pmod{10}$ si et seulement si $n \equiv 3 \pmod{10}$.

3. a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P_{2n} \equiv 2^n \pmod{10}$.

   b) Montrer que pour tout $q \in \mathbb{N}$, $2^{4q} \equiv 1 \pmod{5}$ puis déterminer ,suivant les valeurs de n , les restes modulo 5 de 2^n.

   c) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P_{2n} \equiv 2 \pmod{10}$ si et seulement si $n \equiv 1 \pmod{4}$.

4. On considère dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation (E) : $2x - 5y = 1$.

   a) Vérifier que $(3,1)$ est une solution de (E).

   b) Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation (E).

5. Déterminer le plus petit entier naturel pair m tel que $\begin{cases} S_m \equiv 0 \pmod{10} \\ P_m \equiv 2 \pmod{10} \end{cases}$.

Exercice 4 (6.5 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sqrt{1 + e^x}$. On désigne par Γ la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1.a) Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$. Interpréter graphiquement le résultat.

b) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$. Interpréter graphiquement le résultat.

2. a) Dresser le tableau de variation de f.

   b)Tracer, sur votre copie, la courbe Γ.

Dans la suite on pose, pour $x \in \left]1,+\infty\right[$, $F(x)=\displaystyle\int_0^{\ln(x^2-1)} g(t)\,dt$ où $g(t)=\sqrt{1+\left(f'(t)\right)^2}$; $t\in\mathbb{R}$.

3. Vérifier que pour tout $t\in\mathbb{R}$, $g(t)=\dfrac{2+e^t}{2\sqrt{1+e^t}}$.

4. a) Vérifier que pour tout $x>1$, $\dfrac{x^2+1}{x^2-1}=1+\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x+1}$.

b) Montrer que F est dérivable sur $\left]1,+\infty\right[$ et que pour tout $x>1$, $F'(x)=1+\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x+1}$.

c) Calculer $F(\sqrt{2})$. Déduire que pour tout $x>1$, $F(x)=x+\ln\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)-\sqrt{2}-\ln\left(\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right)$.

d) Déterminer alors la valeur de l'intégrale $L=\displaystyle\int_0^{\ln 3} g(t)\,dt$.

e) Vérifier que pour tout $t\in\mathbb{R}$, $f(t)=g(t)+\dfrac{e^t}{2\sqrt{1+e^t}}$.

f) Calculer l'aire de la partie du plan limitée par la courbe Γ, l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x=0$ et $x=\ln 3$.

5. Pour tout entier $n\geq 1$, on pose $L_n=\dfrac{\ln 3}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n} g(x_k)$ avec $x_k=\dfrac{k}{n}\ln 3$.

a) Montrer que pour tout $t\in\mathbb{R}$, $g'(t)=\dfrac{e^{2t}}{4(1+e^t)\sqrt{1+e^t}}$.

b) En déduire que pour tout $k\in\{0,1,\dots,n-1\}$, $\dfrac{\ln 3}{n}\,g(x_k)\leq\displaystyle\int_{x_k}^{x_{k+1}} g(t)\,dt\leq\dfrac{\ln 3}{n}\,g(x_{k+1})$.

c) Montrer alors que $\dfrac{\ln 3}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} g(x_k)\ \leq\ L\ \leq\dfrac{\ln 3}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} g(x_{k+1})$.

d) Calculer $g(0)$, $g(\ln 3)$ et montrer que $L_n-\dfrac{5\ln 3}{4n}\leq\ L\ \leq L_n-\dfrac{3\ln 3}{2\sqrt{2}n}$.

e) En déduire que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} L_n=L$.

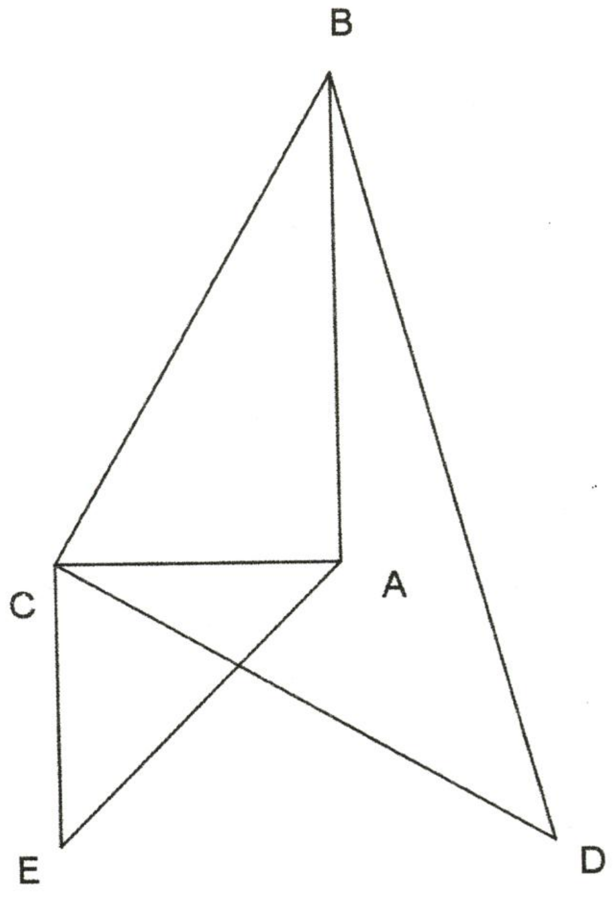

Figure 1

Section : . . . . N° d'inscription : . . . . Série : . . . .

Nom et Prénom : . . . .

Date et lieu de naissance : . . . .

Signatures des surveillants

. . . .

. . . .

Épreuve : Mathématiques - Section : Mathématiques
Session principale (2026)
Annexe à rendre avec la copie

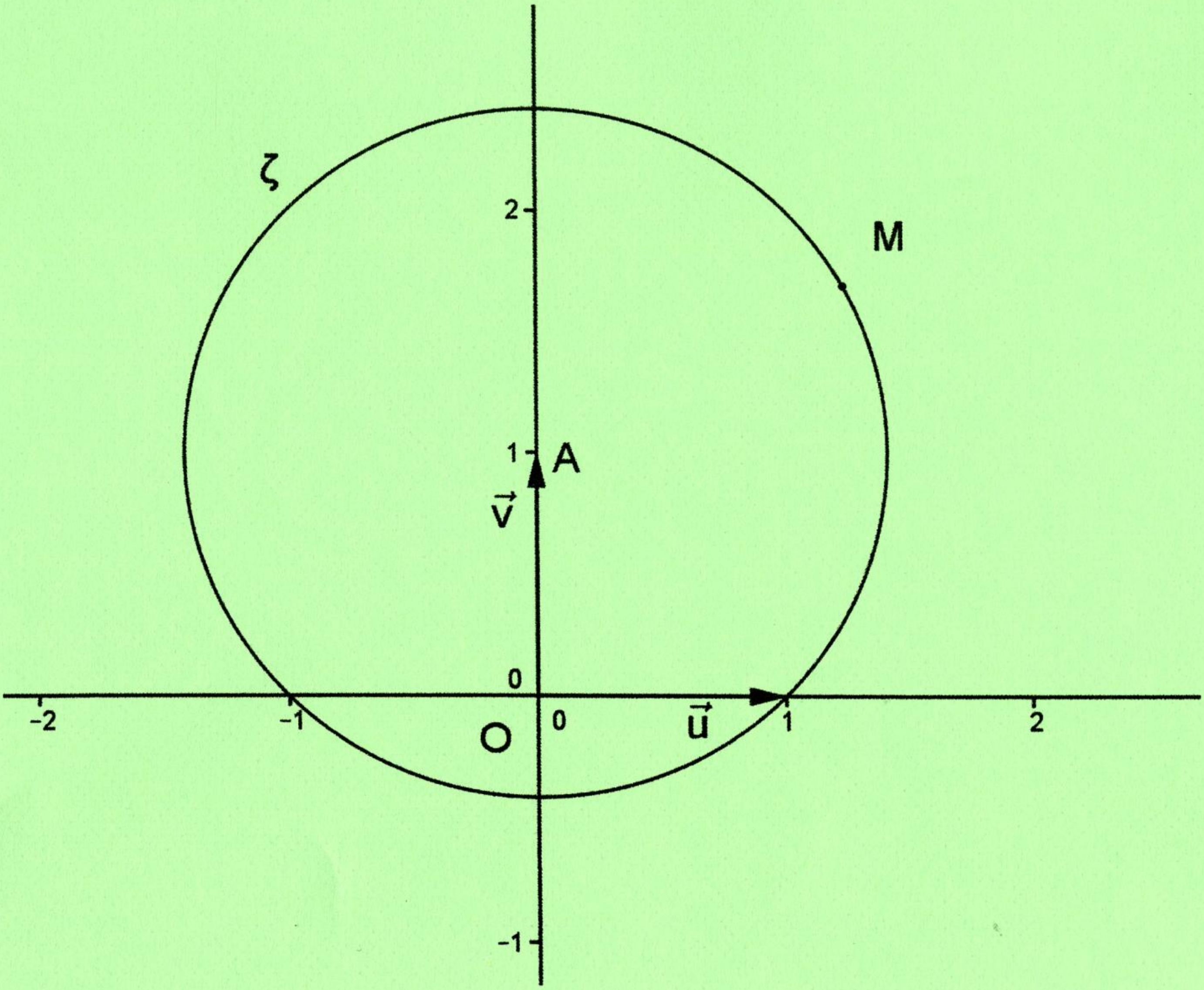

Figure2