

Mon club de math
Recueil d'activités (Niveau 3^{ème} année Secondaire)

Hédi Abderrahim

Été 2017

Table des matières

1	D'un carré à un autre	3
1.1	Enoncés	3
1.2	Phase expérimentale	3
1.3	Solution	3
1.3.1	1ère méthode : Niveau 2ème Année et plus	3
1.3.2	2ème méthode : Niveau Terminale et plus	4
2	Trois triangles équilatéraux génèrent un parallélogramme	5
2.1	Énoncés	5
2.2	Solution	5
2.2.1	Méthode 1 : on fait appel aux rotations	5
2.2.2	Méthode 2 : on fait appel aux cas d'isométrie des triangles	6
3	Volumes et répartition des liquides	8
3.1	Enoncés	8
3.2	Solution	8
4	L'échiquier tronqué	10
4.1	Enoncés	10
4.2	Solution	10
5	Prédire un nombre	12
5.1	Enoncés	12
5.2	Solution	13
5.3	Exploit mathématique de cette devinette	13
5.3.1	Remarque	13
5.3.2	Exemples	13
6	La collection des pièces	14
6.1	Enoncés	14
6.2	Solution	14

TABLE DES MATIÈRES

7	Les moyennes arithmétique, géométrique et harmonique	16
7.1	Rappels	16
7.2	Énoncés	16
7.3	Solution	16
7.4	Commentaires	17
7.4.1	Moyenne arithmétique	17
7.4.2	Moyenne géométrique	18
7.4.3	Moyenne harmonique	19
8	Sans faire appel aux équations	22
8.1	Prédire un nombre	22
8.1.1	Énoncés	22
8.1.2	Solution	22
8.1.3	Commentaire	23
8.2	Prédire deux nombres à la fois	24
8.2.1	Énoncés	24
8.2.2	Solution	24
8.2.3	Commentaires	25
9	Quelques techniques de comparaison des réels	26
9.1	Technique 1	26
9.1.1	Énoncés	26
9.1.2	Solution	26
9.2	Technique 2	27
9.2.1	Énoncés	27
9.2.2	Solution	27
10	Principe des tiroirs	29
10.1	Introduction	29
10.2	Démonstration	30
10.3	Points de méthode ¹	30
10.4	Problèmes	31
10.5	Solutions	32
11	Arithmétique	37
11.1	Rappels	37
11.2	Problèmes proposés ²	40

1. Les Mathématiques du Club Olympique Kangourou , Marc Bachmakov page 200

2. Les problèmes et les solutions proposés sont en grande partie inspirés des concours et préparations précédents de l'A.T.S.M

TABLE DES MATIÈRES

11.3 Solutions proposées	41
12 Les deux tranches d'une tarte	44
12.1 Énoncés	44
12.2 Solution	45
12.2.1 Aire d'un secteur circulaire d'angle α radians	45
12.2.2 Aire d'un segment circulaire	46
12.2.3 Le cas particulier de notre exercice	46
12.3 Autres expressions de \mathcal{A}_g	47
12.3.1 Situation où les données sont α et R	48
12.3.2 Situation où les données sont α et ℓ	48
12.3.3 Situation où les données sont R et ℓ	48
13 La promenade de Robi	50
13.1 Énoncés ³	50
13.2 Solution	50
13.2.1 Piste 1 : Théorème d'Al-Kashi (Loi des cosinus)	53
13.2.2 Piste 2 : Et la géométrie analytique, peut-elle nous venir en aide?	55
13.2.3 Piste 3 : le calcul d'intégrale peut-il être un outil efficace puisqu'on a un problème de calcul d'aire?	57
13.3 Application numérique	58
14 Les essuie - glaces d'une voiture	59
14.1 Énoncés	59
14.2 Solution	61
14.2.1 Premier modèle	61
14.2.2 Deuxième modèle	62
14.2.3 Troisième modèle	64
15 Diagonale et quadrant	68
15.1 Énoncés	68
15.2 Expérimentation	68
15.3 Solution	69
15.3.1 1ère méthode	69
15.3.2 2ème méthode	70
15.3.3 3ème méthode	72
15.3.4 4ème méthode	73

3. L'habillage de cet exercice est inspiré de : MATH EN JEUX , Niveau 4e/3e, Bordas, Problème 29 page 62

TABLE DES MATIÈRES

16 Une distance dans l'espace	75
16.1 Énoncés	75
16.2 Solution	76
16.2.1 Détermination du point T	76
16.2.2 Détermination du la droite Δ	77
16.2.3 Calcul de la distance AP	77
17 Une belle application de l'homothétie	80
17.1 Rappels	80
17.1.1 Définition d'une homothétie	80
17.1.2 Définition analytique	80
17.2 Homothéties itérées	80
17.3 Expérimentation manuelle	81
17.4 Le triangle de Sierpiński	82
17.4.1 Définition	82
17.4.2 Le triangle de Sierpinski et le triangle de Pascal	82
17.4.3 Script de construction et construction d'un triangle de Sierpinski avec Scrach	84
18 Deux cercles isométriques inscrits dans un triangle	85
18.1 Énoncés	85
18.2 Solution	86
18.2.1 1ère méthode	87
18.2.2 2ème méthode	89
19 Segments découpés par des angles égaux	91
19.1 Énoncés	91
19.2 Solution	92
19.2.1 Méthode 1 (Théorèmes de la bissectrice et de Pythagore)	92
19.2.2 Méthode 2 (Trigonométrie : rapports dans un triangle rectangle et formules d'addition)	93
20 Tangente de la somme de 2 angles	95
20.1 Énoncés	95
20.2 Solution	96
21 Segments découpés par des angles égaux	98
21.1 Énoncés	98
21.2 Phase expérimentale	98
21.3 Solution	99

TABLE DES MATIÈRES

21.3.1	Question 1	99
21.3.2	Question 2	101
22	Rapport des rayons de deux cercles inscrits	103
22.1	Énoncés	103
22.2	Phase expérimentale	104
22.3	Solution	104
22.3.1	Rappel	104
22.3.2	Solution	104

Chapitre 1

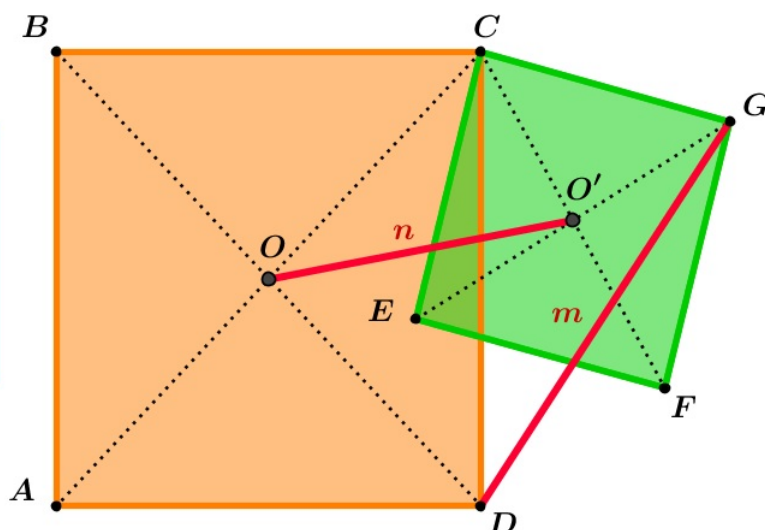
D'un carré à un autre

1.1 Énoncés

Dans la figure ci – contre :

- * $ABCD$ est un carré
- * $CEFG$ est un carré
- * $DG = m$
- * $OO' = n$

Montrer que $m = n\sqrt{2}$



1.2 Phase expérimentale

http://mongeogebra.com/ggbg/2016/04/24/carre_carre/

1.3 Solution

1.3.1 1ère méthode : Niveau 2ème Année et plus

Soit :

- $\alpha = \widehat{ECD}$

- c la mesure du côté du carré $ABCD$
- c' la mesure du côté du carré $CEFG$

On a :

$$\widehat{OCO'} = \widehat{OCD} + \widehat{DCO'} = \frac{\pi}{4} + (\widehat{ECO'} - \widehat{ECD}) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} - \alpha = \frac{\pi}{2} - \alpha$$

$$\widehat{DCG} = \widehat{ECG} - \widehat{ECD} = \frac{\pi}{2} - \alpha$$

En appliquant le théorème d'Al-Kashi dans le triangle COO' , on aura :

$$\begin{aligned} n^2 &= CO^2 + CO'^2 - 2.CO.CO'.\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \\ &= \left(\frac{c\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{c'\sqrt{2}}{2}\right)^2 - 2.\frac{c\sqrt{2}}{2}.\frac{c'\sqrt{2}}{2}.\sin(\alpha) \\ &= \frac{1}{2}.c^2 + \frac{1}{2}.c'^2 - c.c.\sin(\alpha) \end{aligned}$$

En appliquant le théorème d'Al-Kashi dans le triangle CDG , on aura :

$$\begin{aligned} m^2 &= CD^2 + CG^2 - 2.CD.CG.\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \\ &= c^2 + c'^2 - 2.c.c'.\sin(\alpha) \\ &= 2\left(\frac{1}{2}.c^2 + \frac{1}{2}.c'^2 - c.c.\sin(\alpha)\right) \\ &= 2.n^2 \end{aligned}$$

Ce qui nous conduit à conclure que : $m = n.\sqrt{2}$

1.3.2 2ème méthode : Niveau Terminale et plus

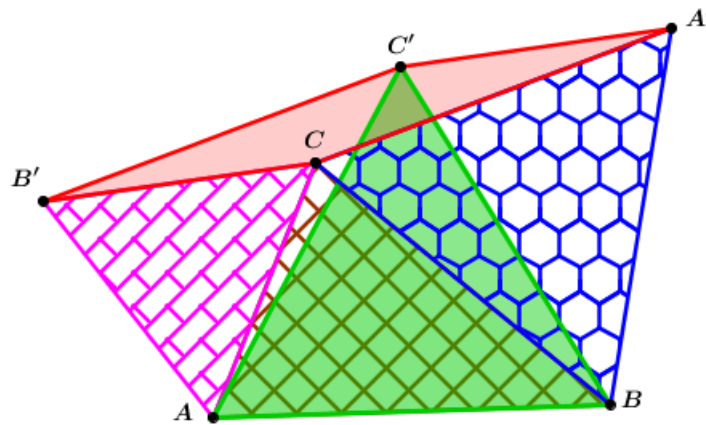
Soit S la similitude directe de centre C , d'angle $\frac{\pi}{4}$ et de rapport $\sqrt{2}$

$$\left. \begin{array}{l} S : O \mapsto D \\ O' \mapsto G \end{array} \right\} \implies DG = OO'.\sqrt{2} \implies m = n.\sqrt{2}$$

Chapitre 2

Trois triangles équilatéraux génèrent un parallélogramme

2.1 Énoncés



Données :
 * ABC : triangle
 * $AB'C'$: triangle équilatéral
 * ABC' : triangle équilatéral
 * $A'BC$: triangle équilatéral
Conclusion :
 le quadrilatère $A'C'B'C$ est un parallélogramme

المعطيات:
 - مثلث ABC
 - مثلث متقايس الأضلاع $A'B'C$
 - مثلث متقايس الأضلاع $AB'C'$
 - مثلث متقايس الأضلاع $A'BC$
المطلوب:
 أثبت أن الرباعي $A'C'B'C$ متوازي الأضلاع

2.2 Solution

2.2.1 Méthode 1 : on fait appel aux rotations

On suppose que le plan est orienté.

- le triangle ACB' est équilatéral direct

$$\implies r_{\left(A, \frac{\pi}{3}\right)}(C) = B' \quad (1)$$

CHAPITRE 2. TROIS TRIANGLES ÉQUILATÉRAUX GÉNÈRENT UN PARALLÉLOGRAMME

- le triangle ABC' est équilatéral direct

$$\implies r\left(A, \frac{\pi}{3}\right)(B) = C' \quad (2)$$

$$(1) \text{ et } (2) \implies BC = B'C' \quad (3)$$

- le triangle $BA'C$ est équilatéral direct

$$\implies r\left(C, \frac{\pi}{3}\right)(B) = A'$$

$$\implies BC = CA' \quad (4)$$

$$(3) \text{ et } (4) \implies B'C' = CA' \quad (5)$$

• - le triangle $BA'C$ est équilatéral direct

$$\implies r\left(B, -\frac{\pi}{3}\right)(C) = A' \quad (a)$$

- le triangle ABC' est équilatéral direct

$$\implies r\left(B, -\frac{\pi}{3}\right)(A) = C' \quad (b)$$

$$(a) \text{ et } (b) \implies AC = A'C' \quad (c)$$

- le triangle ACB' est équilatéral direct

$$\implies B'C = AC \quad (d)$$

$$(c) \text{ et } (d) \implies B'C = A'C' \quad (e)$$

Conclusion : les égalités (5) et (e) expriment que les côtés opposés du quadrilatère $ACBC$ sont isométriques alors ce quadrilatère est un parallélogramme.

2.2.2 Méthode 2 : on fait appel aux cas d'isométrie des triangles

• **Étape 2**

- le triangle ACB' est équilatéral

$$\implies \widehat{B'AC} = 60^\circ \quad \text{et} \quad AC = AB' \quad (1)$$

$$\implies \widehat{B'AC'} - \widehat{C'AC} = 60^\circ \quad (2) \quad (\text{dans notre cas de figure})$$

CHAPITRE 2. TROIS TRIANGLES ÉQUILATÉRAUX GÉNÈRENT UN PARALLÉLOGRAMME

- le triangle ABC' est équilatéral

$$\implies \widehat{BAC'} = 60^\circ \quad \text{et} \quad AB = AC' \quad (3)$$

$$\implies \widehat{BAC} - \widehat{CAC'} = 60^\circ \quad (4) \quad (\text{dans notre cas de figure})$$

$$(2) \text{ et } (4) \implies \widehat{B'AC'} - \widehat{C'AC} = \widehat{BAC} - \widehat{CAC'} \quad (5)$$

$$\implies \widehat{B'AC'} = \widehat{BAC}$$

Résumé de cette étape : $AC = AB'$, $AB = AC'$ et $\widehat{B'AC'} = \widehat{BAC}$

\implies les deux triangles ABC et $AB'C'$ sont isométriques

$$\implies BC = B'C'$$

- d'autre part le triangle $A'CB$ est équilatéral

$$\implies BC = CA'$$

$\implies CA' = B'C'$ (6) : ce sont deux côtés opposés du quadrilatère $A'C'B'C$

• Étape 2

- le triangle $A'CB$ est équilatéral

$$\implies \widehat{A'BC} = 60^\circ \quad \text{et} \quad BC = BA' \quad (a)$$

$$\implies \widehat{A'BC'} + \widehat{C'BC} = 60^\circ \quad (b) \quad (\text{dans notre cas de figure})$$

- le triangle ABC' est équilatéral

$$\implies \widehat{ABC'} = 60^\circ \quad \text{et} \quad BA = BC' \quad (c)$$

$$\implies \widehat{ABC} + \widehat{C'BC'} = 60^\circ \quad (d) \quad (\text{dans notre cas de figure})$$

$$(b) \text{ et } (d) \implies \widehat{A'BC'} + \widehat{C'BC} = \widehat{ABC} + \widehat{C'BC'} \quad (e)$$

$$\implies \widehat{A'BC'} = \widehat{ABC}$$

Résumé de cette étape : $BC = BA'$, $BA = BC'$ et $\widehat{ABC} = \widehat{A'BC'}$

\implies les deux triangles ABC et $A'BC'$ sont isométriques

$$\implies AC = A'C'$$

- d'autre part le triangle ACB' est équilatéral

$$\implies AC = CB'$$

$\implies A'C' = CB'$ (f) : ce sont les deux autres côtés opposés du quadrilatère $A'C'B'C$

Conclusion : d'après les résultats (6) et (f), le quadrilatère $A'C'B'C$ est un parallélogramme.

Chapitre 3

Volumes et répartition des liquides

3.1 Enoncés

Une personne possède du miel, de l'huile et du lait. Le volume d'huile est le double de celui du miel et le volume du lait est le triple de celui de l'huile.

Cette personne a reparti ces 3 liquides sur 9 récipients de contenances respectives : **3l, 6l, 10l, 11l, 15l, 17l, 23l, 25l** et **30l**

Sachant que tous les récipients étaient pleins sauf **un** qui est resté complètement vide. Vous est – t –il possible de déterminer :

1. La contenance du récipient vide ?
2. Le volume en litres de chacun de 3 liquides ?
3. La nature du liquide versé dans chacun de 8 récipients remplis ?



3.2 Solution

A chacun de neuf récipients correspond l'une des contenances suivantes : **3l, 6l, 10l, 11l, 15l, 17l, 23l, 25l** et **30l**

CHAPITRE 3. VOLUMES ET RÉPARTITION DES LIQUIDES

Alors la capacité de tous les récipients est $C = 3+6+10+11+15+17+23+25+30 = 140l$

Désignons par : V_M, V_H et V_L les volumes respectifs du miel, de l'huile et du lait et par V_T le volume de 3 liquides

d'où le système :

$$\begin{cases} V_H = 2V_M \\ V_L = 6V_M \\ V_T = V_M + V_H + V_L = V_M + 2.V_M + 6.V_M = 9.V_M \end{cases}$$

Donc V_T est un multiple de 9

D'autre part, on a : $C = 140 = 9 \times 15 + 5$

Par suite le récipient qui restera vide doit être de contenance : $C_V = 5 + 9 \times k$
($9 \times k$: un multiple de 9)

- Pour $k = 0$ $C_V = 5$ or on n'a pas de récipient de $5l$
- Pour $k = 1$ $C_V = 14$ or on n'a pas de récipient de $14l$
- Pour $k = 2$ $C_V = 23$ et **on a un récipient de $23l$**
- Pour $k = 3$ $C_V = 28$ or on n'a pas de récipient de $28l$
- Il est inutile de considérer d'autres valeurs pour k car C_V sera supérieur à 30

Conclusion : le récipient qui restera vide est celui de contenance **23l**

Par suite $V_T = 140 - 23 = 117 = 9V_M$ d'où :

- $V_M = \frac{117}{9} = 13l$ c'est le volume du miel et ça nécessite **les récipients de $3l$ et de $10l$**
- $V_H = 2 \times V_M = 2 \times 13 = 26l$ c'est le volume de l'huile et ça nécessite **les récipients de $11l$ et de $15l$**
- $V_L = 6 \times V_M = 6 \times 13 = 78l$ c'est le volume du lait et ça nécessite **les récipients de $6l, 17l, 25l$ et de $30l$**

Chapitre 4

L'échiquier tronqué

4.1 Enoncés

On dispose

- d'un échiquier carré qui a 8 cases par côté. Ces cases sont coloriées de telle sorte que si l'une d'elles est blanche alors celles qui lui sont adjacentes sont noires et vice-versa (Figure 1 ci-dessous).
- d'une boîte de 32 dominos. En le posant sur l'échiquier, chacun d'eux en couvre 2 cases.

On supprime les 2 cases blanches qui sont dans les coins opposés (Figure 2 ci-dessous).

Est-il possible de paver l'échiquier obtenu avec seulement 31 dominos? (La justification est exigée)

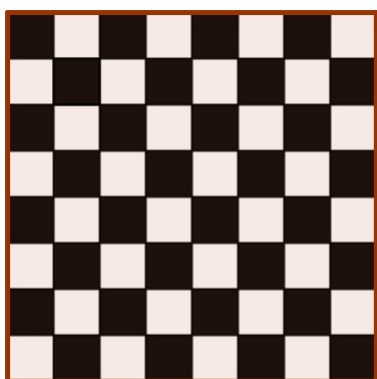


Figure 1

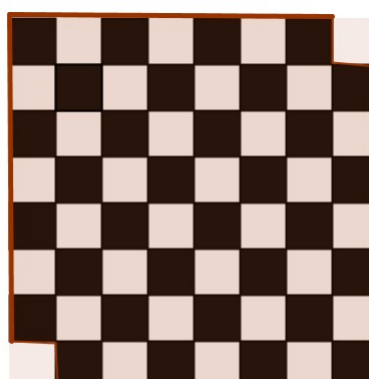


Figure 2

4.2 Solution

L'arrangement des cases sur l'échiquier nous permet de déduire que dans n'importe quelle disposition, chaque domino couvre une case blanche et une case noire,

CHAPITRE 4. L'ÉCHIQUIER TRONQUÉ

par suite *l'égalité du nombre de cases blanches et celui des cases noires* est une condition nécessaire pour l'existence d'une solution. Or, après suppression de 2 "coins", on n'a plus que 30 blanches contre 32 noires, donc il n'est plus possible de couvrir ce qui reste de l'échiquier avec ces dominos : il y aura soit 2 cases noires non cachées (cas de 30 dominos), soit 2 dominos qui auront une partie hors de l'échiquier.

Nombre de dominos	Situation sur l'échiquier
30	2 cases noires non cachées
31	1 case noire non cachée et et une partie d'un domino hors de l'échiquier
32	2 dominos qui auront chacun une partie hors de l'échiquier

Chapitre 5

Prédire un nombre

5.1 Enoncés

Une personne (Personne1) présente à son amie (Personne2) une feuille sur laquelle sont inscrites les 5 listes suivantes : (Chacune d'elles contient 16 nombres entiers compris entre 1 et 31)

Liste 1	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31
Liste 2	2	3	6	7	10	11	14	15	18	19	22	23	26	27	30	31
Liste 3	4	5	6	7	12	13	14	15	20	21	22	23	28	29	30	31
Liste 4	8	9	10	11	12	13	14	15	24	25	26	27	28	29	30	31
Liste 5	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31

Personne1 propose à Personne2 de choisir un nombre de l'une des listes et de ne pas l'en informer. Il lui ajoute : **”Si tu me précises toutes les listes sur lesquelles figure ce nombre, je pourrai te le prédire!”**

Personne2 accepte : il pense à un nombre, donne les numéros des listes et Personne1 dévoile ce nombre.

Propos de Personne2	Réponse de Personne1
Listes 1, 2 et 5	19
Listes 3 et 4	12
Listes 1, 2, 3 et 5	23

Au bout de ces 3 essais, tous réussis par Personne1, Personne2 affirme qu'il a découvert le secret et qu'il est aussi capable de faire de même !

- Et vous cher lecteur, êtes-vous capable de démystifier ce jeu ? Si oui, rédigez votre explication tout en l'appliquant à un exemple ou deux.

5.2 Solution

Pour prédire le nombre choisi par *Personne2*, *Personne1* se contente de faire la somme des nombres qui sont dans les premières cases des listes citées par *Personne2*.

5.3 Exploit mathématique de cette devinette

Dans ce paragraphe, on va imaginer un prolongement de ce petit jeu. A chaque nombre \mathcal{N} à deviner, on va associer un code formé d'un certain nombre de chiffres (de un à cinq chiffres) déterminés comme suit :

- Si \mathcal{N} se trouve sur la liste 1, on écrira 1 comme premier chiffre du code cherché, sinon on écrira 0.
- Si \mathcal{N} se trouve sur la liste 2, à gauche de 1 ou du 0 écrit à l'issue de l'étape précédente, on écrira 1, sinon on écrira 0.
- Si \mathcal{N} se trouve sur la liste 3, le 3ème chiffre du code à partir de la droite sera 1, sinon on écrira 0.
- on continue à procéder de la même façon successivement avec la liste 4 puis la liste 5.

5.3.1 Remarque

Tout chiffre 0 n'ayant pas un chiffre 1 à sa gauche peut être omis.

5.3.2 Exemples

listes contenant \mathcal{N}	Code associé à \mathcal{N}	Valeur de \mathcal{N}
Listes 1, 2 et 5	10011	19
Listes 3 et 4	1100	12
Listes 1, 2, 3 et 5	10111	23

Chapitre 6

La collection des pièces

6.1 Enoncés

Le jeu consiste à rassembler des pièces de différentes valeurs et à les aligner dans un ordre quelconque tout en plaçant aux extrémités du fil deux pièces de plus petite valeur. Chacun de deux adversaires, à son tour, prend une pièce située à l'une de deux extrémités de la rangée (peu importe laquelle).



La partie continue tant qu'il y a des pièces, celui qui rassemble la plus grande somme gagne la partie!

Quelle stratégie doit adopter un joueur pour gagner la partie ?

6.2 Solution

- Cas où le nombre de pièces est pair :
 - C'est à toi de commencer
 - Imagine que les pièces sont disposées alternativement pile puis face
 - Calcule le montant des pièces "pile" et celui des pièces "face".
 - Saisis la pièce (extrême) du genre de celles qui correspondent à la plus grande somme
 - Ton adversaire choisira l'une parmi les deux pièces extrêmes (elles sont du même type, elles diffèrent par leur valeur
 - A ton tour, tu prendras toujours la pièce qui succède à celle qui était récupérée par ton adversaire; ainsi tu seras sûr d'emporter la partie!
- Cas où le nombre de pièces est impair :

CHAPITRE 6. LA COLLECTION DES PIÈCES

- Laisse ton adversaire commencer : il prendra une pièce de faible valeur à l'une des extrémités
- Il y a maintenant un nombre pair de pièces
- Divise-les en pile et face et procède comme indiqué ci-dessus!

Remarque

Pour plus de détails sur les jeux de Nim et les stratégies gagnantes, voir l'article : <http://revue.sesamath.net/spip.php?article777> publié sur le numéro 47 de la revue électronique MathémaTICE

Chapitre 7

Les moyennes arithmétique, géométrique et harmonique

7.1 Rappels

a et b étant deux réels positifs, on appelle :

- moyenne arithmétique de a et b le réel $m_a = \frac{a+b}{2}$
- moyenne géométrique de a et b le réel $m_g = \sqrt{a \times b}$
- moyenne harmonique de a et b le réel $m_h = \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$

7.2 Énoncés

Montrer que pour tout réel positif a et tout réel positif b , on a :

$$m_h \leq m_g \leq m_a$$

7.3 Solution

- $m_g \leq m_a$

$$\begin{aligned} a + b - 2\sqrt{ab} &= \sqrt{a^2} - 2\sqrt{ab} + \sqrt{b^2} && (a \text{ et } b \text{ sont positifs}) \\ &= (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \\ &\implies a + b - 2\sqrt{ab} \geq 0 \\ &\implies a + b \geq 2\sqrt{ab} \\ &\implies \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \quad (1) \end{aligned}$$

- $m_h \leq m_g$

$$\begin{aligned} \text{On a : } \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} - \sqrt{ab} &= \frac{2}{\frac{a+b}{ab}} - \sqrt{ab} \\ &= \frac{2ab}{a+b} - \sqrt{ab} \\ &= \frac{2\sqrt{ab}}{a+b} \left(\sqrt{ab} - \frac{a+b}{2} \right) \end{aligned}$$

D'autre part, on a :

$$\begin{aligned} \frac{2\sqrt{ab}}{a+b} \geq 0 \quad \text{et} \quad \sqrt{ab} - \frac{a+b}{2} \leq 0 \quad (m_g \leq m_a) \\ \implies \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} - \sqrt{ab} \leq 0 \\ \implies m_h - m_g \leq 0 \\ \implies m_h \leq m_g \quad (2) \end{aligned}$$

- $m_h \leq m_a$

$$\left. \begin{array}{l} m_h \leq m_g \\ m_g \leq m_a \end{array} \right\} \implies m_h \leq m_a \quad (3)$$

En conclusion, d'après (1); (2) et (3) : $m_h \leq m_g \leq m_a$

7.4 Commentaires

La notion de moyenne nous est très familière et nous en parlons beaucoup sans nous poser de question. Pourtant il existe divers types de moyennes : arithmétique, géométrique, harmonique...

Voilà déjà trois types de moyenne. Mais à quoi servent-elles ? Et surtout, dans une situation bien déterminée, laquelle faut-il utiliser ?

7.4.1 Moyenne arithmétique

1. C'est la plus familière pour nous. On sait, par exemple que si on a eu un $\frac{6}{20}$ au premier devoir de contrôle, pour le contrebalancer, on tâchera d'avoir un $\frac{14}{20}$ pour faire comme si on a eu $\frac{10}{20}$ en chacun de deux devoirs !

2. Attention : Une même moyenne peut cacher des performances très différentes puis qu'elle n'indique pas la répartition des valeurs observées autour de la valeur centrale (un élève qui a une moyenne égale à $\frac{10}{20}$ en Math et en Langue peut avoir des résultats très différents en ces deux matières)

7.4.2 Moyenne géométrique

1.

$$m_g = \sqrt{ab} \quad \Leftrightarrow \quad m_g^2 = ab$$

Ainsi la moyenne géométrique de deux réels positifs a et b peut être considérée comme étant la mesure que doit avoir le côté d'un carré qui a la même aire qu'un rectangle de dimensions a et b

2. Un agent de la bourse garantit, à une personne qui voudrait y placer des actions estimées à 10000 Dinars, un rendement de +60% au cours de la première semaine et de -40% au cours de la deuxième. La personne fait ses "calculs" : $\frac{(+60\%) + (-40\%)}{2} = (+10\%)$ par semaine (c'est la moyenne arithmétique de 2 taux). Ce gain moyen de +10% par semaine la séduit et elle espère que le coût de ses actions s'élèvera à :

- $10000 \left(1 + \frac{10}{100}\right) = 11000$ (à la fin de la première semaine)

- $11000 \left(1 + \frac{10}{100}\right) = 12100$ (à la fin de la deuxième semaine)

ce qui se résume par un gain de 2100 Dinars par rapport à la valeur initiale des actions : c'est alléchant !

En réalité, et selon les garanties de l'agent, cette somme de 10000 Dinars passera à :

- $10000 \left(1 + \frac{60}{100}\right) = 16000$ (à la fin de la première semaine)

- $16000 \left(1 - \frac{40}{100}\right) = 9600$ (à la fin de la deuxième semaine)

ce qui se résume par une perte de 400 Dinars par rapport à la valeur initiale des actions ! On est loin de ce que la personne a prévu !

Comment la convaincre ?

Si au lieu de la moyenne arithmétique, la personne a calculé la moyenne géométrique des rendements (1.6 et 0.6) puis elle en a retranché 1 (100 représentent

CHAPITRE 7. LES MOYENNES ARITHMÉTIQUE, GÉOMÉTRIQUE ET HARMONIQUE

le montant initial des actions), elle aura obtenu :

$$\sqrt{1.6 \times 0.6} - 1 \approx -0.02 \quad (\text{c'est le rendement moyen par semaine})$$

ce qui nous conduit à :

- $10000 \left(1 - \frac{2}{100}\right) \approx 9800$ (à la fin de la première semaine)
- $9800 \left(1 - \frac{2}{100}\right) \approx 9600$ (à la fin de la deuxième semaine)

Les approximations des calculs sont dues 'a la valeur approchée qu'on a prise pour $\sqrt{0.96}$

7.4.3 Moyenne harmonique

1. Une voiture monte une côte de 10 kilomètres à la vitesse de 40 km/h et la redescend à 120 km/h. Quelle est sa vitesse moyenne ?

- On est tenté de répondre 80 km/h (moyenne arithmétique : $\frac{40 + 120}{2}$). Or le calcul détaillé ci-dessous ne confirme pas cette prédiction :

$$\text{La montée dure } \frac{10}{40} = \frac{1}{4} = 15 \text{ mn}$$

$$\text{La descente dure } \frac{10}{120} = \frac{1}{12} = 5 \text{ mn}$$

Ce qui fait 20 mn pour 20 kilomètres, ce qui correspond à une vitesse moyenne de 1 km/mn, c'est à dire 60 km/h

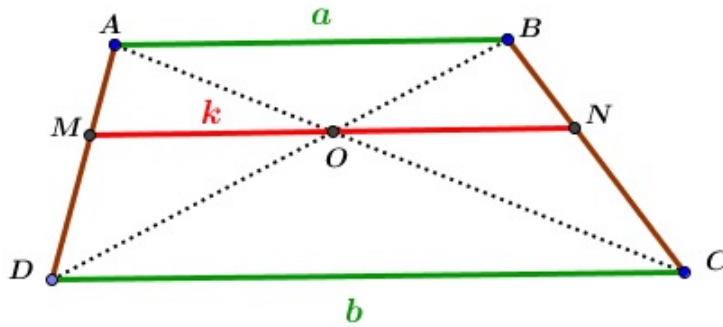
- Le calcul de la moyenne harmonique des vitesses de la montée et de la descente nous donne :

$$\frac{2}{\frac{1}{40} + \frac{1}{120}} = \frac{2}{\frac{160}{4800}} = 2 \times \frac{4800}{160} = 60 : \text{c'est le résultat prévu par le calcul détaillé.}$$

En conclusion : la vitesse moyenne de la montée et de la descente est la moyenne harmonique des vitesses de la montée et de la descente.

2. Dans un trapèze, la longueur du segment parallèle à ses bases et passant par l'intersection de ses diagonales est la moyenne harmonique des longueurs des bases.

**CHAPITRE 7. LES MOYENNES ARITHMÉTIQUE,
GÉOMÉTRIQUE ET HARMONIQUE**



On a : $k = \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$

- En appliquant Thalès dans le triangle ABC , on aura :

$$\begin{aligned} \frac{CA}{CO} &= \frac{AB}{ON} \\ \Rightarrow \frac{CO + OA}{CO} &= \frac{AB}{ON} \\ \Rightarrow 1 + \frac{OA}{CO} &= \frac{AB}{ON} \quad (1) \end{aligned}$$

- En appliquant Thalès dans la configuration croisée, on aura :

$$\begin{aligned} \frac{OA}{OC} &= \frac{OB}{OD} = \frac{AB}{DC} \quad (2) \\ (1) \text{ et } (2) &\Rightarrow 1 + \frac{AB}{CD} = \frac{AB}{ON} \\ \Rightarrow \frac{1}{AB} + \frac{1}{CD} &= \frac{1}{ON} \quad (I) \end{aligned}$$

(on multiplie l'égalité ci-dessus par $\frac{1}{AB}$)

- Montrons que O est le milieu de $[MN]$

dans le triangle ACD , on aura : $\frac{AM}{AD} = \frac{AO}{AC} = \frac{MO}{DC}$ (a)

dans le triangle BCD , on aura : $\frac{BN}{BC} = \frac{BO}{BD} = \frac{NO}{DC}$ (b)

On considère les deux côtés autres que les bases : $\frac{AM}{AD} = \frac{BN}{BC}$ (c)

$$(a), (b) \text{ et } (c) \quad \frac{MO}{DC} = \frac{NO}{DC}$$

$$\Rightarrow MO = NO$$

$$\left. \begin{array}{l} MO = NO \\ O \in [MN] \end{array} \right\} \Rightarrow O = M * N$$

CHAPITRE 7. LES MOYENNES ARITHMÉTIQUE, GÉOMÉTRIQUE ET HARMONIQUE

•

$$\left. \begin{array}{l} O = M * N \implies ON = \frac{MN}{2} \\ \text{et on a : } \frac{1}{AB} + \frac{1}{CD} = \frac{1}{ON} \quad (I) \end{array} \right\} \implies \frac{1}{AB} + \frac{1}{CD} = \frac{2}{MN}$$

$$\implies \frac{1}{\frac{1}{AB} + \frac{1}{CD}} = \frac{MN}{2}$$

$$\implies \frac{1}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} = \frac{k}{2}$$

$$\implies \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} = k$$

Chapitre 8

Sans faire appel aux équations

8.1 Prédire un nombre

8.1.1 Énoncés

Sami refuse de dire à son amie Samia le solde de son compte bancaire. Devant son insistance, il lui présente l'information suivante :

”Si tu multiplies mon solde par 50 et tu retranches 2 000 Dinars du résultat tu trouveras 3 000 Dinars

8.1.2 Solution

Astuce

Pour surprendre Sami, Samia qui vient de lire une méthode étrange sur un ancien livre des mathématiques, réplique :

- ”Supposons que ton solde est de 1 000 Dinars, alors :

$$50 \times 1\,000 - 2\,000 = 48\,000 \neq 3\,000$$

donc ton solde est différent de 1 000 Dinars

- Supposons que ton solde est de 4 000 Dinars, alors :

$$50 \times 4\,000 - 2\,000 = 198\,000 \neq 3\,000$$

donc ton solde n'est pas 4 000 Dinars non plus.

- ton solde est alors $s = \frac{1\,000(198\,000 - 3\,000) - 4\,000(48\,000 - 3\,000)}{195\,000 - 48\,000}$

$$\implies s = \frac{1\,000 \times 195\,000 - 4\,000 \times 45\,000}{150\,000} = \frac{15\,000}{150} = 100$$

donc tu disposes dans ton compte de 100 Dinars”.

8.1.3 Commentaire

La méthode appliquée par Samia est dite "Méthode de fausse position" (*regula falsi*)

On appelle ainsi une méthode de résolution algébrique (*regula*) consistant à fournir une solution approchée (*falsi*) conduisant, par un algorithme approprié tirant parti de l'écart constaté, à la solution du problème considéré.

Cette méthode est très ancienne : elle semble prendre sa source 2 000 ans avant J.-C. On la trouve dans les papyrus de l'Égypte ancienne comme le papyrus Rhind et le papyrus de Moscou. On la retrouve également dans la mathématique chinoise quelques siècles avant J.-C. puis chez les mathématiciens Indiens, puis arabes (comme *Al-Khwarizmi*, *Ibn Al-Bannâa*) et enfin en Occident (*Fibonacci*, *Pacioli*, *Recorde*, ...). Plus récemment, la méthode de *Jacobi* pour la résolution des systèmes d'équations linéaires, relève de cette méthode.

La résolution de l'équation $ax = b$ nous apparaît comme triviale mais il y a 4 000 ans, le calcul fractionnaire et le symbolisme algébrique n'étaient pas vraiment au point... En fait, le problème n'est alors pas dans la résolution même de l'équation mais dans la mise en équation et la difficulté d'aboutir -à défaut d'une démarche algébrique pratique- à la forme simple : $ax = b$ qui n'est autre que l'écriture d'une division $x = \frac{b}{a}$. Le problème est donc de trouver le nombre a car *Ahmes* savait fort bien effectuer multiplications et divisions quitte à utiliser une décomposition en fractions unitaires. Cette méthode permet d'éviter l'étape de la mise en équation, mais ne fonctionne que pour un problème faisant intervenir une loi proportionnelle. Il fallut attendre le 14^{ème} siècle avec *Oresme* pour un usage aisé des opérations fractionnaires, puis *Pacioli* et *Chuquet* suivis des grands algébristes *Cardan* et *Bombelli* pour la mise en place d'un début de symbolisme algébrique efficace. Tout sera dit (ou presque) avec *Descartes*.

Eu égard à l'époque considérée, cette méthode de résolution procède d'une géniale pensée. Voici le problème 24 du papyrus *Rhind* : "Un nombre ajouté à son septième donne 19"

En notation algébrique moderne de nos jours, l'équation se ramène à $\frac{8}{7}x = 19$: forme $ax = b$. L'idée première est de se débarrasser du dénominateur gênant en choisissant 7 comme solution "approchée" (fausse position) : le scribe obtient 8 dans le calcul du nombre augmenté de son septième. Il utilise ensuite implicitement l'algorithme suivant ($x_0 = 7$; $c = 8$) :

Le problème revient donc à la recherche d'une quatrième proportionnelle : que l'on résout facilement, de nos jours : $? = x' \cdot \frac{b}{c}$

Ahmes expose exactement cela : il divise 19 par 8, ce qui lui fournit $2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$ et multi-

plie le tout par $7 = 1 + 2 + 4$, ce qui fournit $\left(2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}\right) + \left(4 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) + \left(9 + \frac{1}{2}\right)$, soit $16 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8}$.

http://serge.mehl.free.fr/anx/fauss_pos.html

8.2 Prédire deux nombres à la fois

8.2.1 Enoncés

Samia refuse de dire son âge et son poids à son ami Sami. Il la défie de les dévoiler. Il lui donne une calculatrice et lui demande de :

- Taper 13
- Multiplier par ton poids en kg
- Enlever 13
- Multiplier par 7
- Enlever 10
- Ajouter ton âge
- Multiplier par 11
- Soustraire ton poids
- Soustraire ton âge
- Ajouter 101
- Donner le résultat

Samia a répondu : 54 160. Sami, tout joyeux, dit alors tu as 17 ans et tu pèses 55 kilos. Samia confirme, mais elle veut bien savoir comment Sami est-il arrivé à découvrir ses données confidentielles à partir du résultat 54 160 ?

8.2.2 Solution

L'astuce

- Sami ignore le chiffre des unités

CHAPITRE 8. SANS FAIRE APPEL AUX ÉQUATIONS

- Au nombre formé par chiffres de dizaines et celui des centaines, il ajoute 1 pour obtenir l'âge
- Au nombre formé par chiffres des unités des milles et celui des dizaines des milles, il ajoute 1 pour obtenir le poids

$$\begin{array}{c} \boxed{54} \boxed{160} \\ \boxed{\text{Poids} = 54 + 1 = 55} \\ \boxed{\text{Âge} = 16 + 1 = 17} \end{array}$$

Justification

Désignons l'âge et le poids de Samia respectivement par a et p , d'où :

$$\begin{aligned} & [(13 \times p - 13) \times 7 - 10 + a] \times 11 - p - a + 101 \\ &= 7 \times 11 \times 13 \times p - 7 \times 11 \times 13 - 110 + 11 \times a - p - a + 101 \\ &= 1000p - 1010 + 10a \\ &= 1000p - 1000 + 10a - 10 = 1000(p - 1) + 10(a - 1) \\ &= 10 [100(p - 1) + (a - 1)] \end{aligned}$$

Le fait d'ignorer le 0 (zéro) de droite du résultat transforme : $10 [100(p - 1) + (a - 1)]$
en : $[100(p - 1) + (a - 1)]$

Désignons par du et $d'u'$ les écritures respectives de $(a - 1)$ et $(p - 1)$ dans la base 10 (d ou d' peut être nul et on a supposé que a et p sont inférieurs ou égaux à 100) alors $100(p - 1) + (a - 1) = d'u'00 + du = d'u'du$

d'où l'idée de Sami pour découvrir l'âge et le poids de Samia.

8.2.3 Commentaires

1. Si le 2ème nombre est inférieur ou égal à 10, le 3ème chiffre à partir de la droite sera 0 (zéro) et par suite le 2ème nombre sera la somme du 2ème chiffre du résultat et 1
2. Si le 2ème nombre est supérieur ou égal à 101, cet algorithme ne sera plus valable car son 4ème chiffre à partir de la droite sera le chiffre des unités de $(c' + d')$ où c est le chiffre des centaines du 2ème nombre.
3. Si le 1er nombre est supérieur ou égal à 101, le résultat sera un nombre de 6 chiffres et le 1er nombre sera la somme de 1 et du nombre formé par les 3 premiers chiffres à partir de la gauche.

Chapitre 9

Quelques techniques de comparaison des réels

Les méthodes de comparaison de deux réels sont nombreuses et il est difficile d'en dresser une liste exhaustive. Dans ce chapitre, certaines parmi ces méthodes seront appliquées dans des situations diverses.

9.1 Technique 1

Pour comparer deux réels a et c , il "suffit" de trouver un nombre b tel que : $a < b$ et $b < c$ puis d'utiliser la transitivité de l'inégalité pour conclure que $a < c$. La difficulté réside au niveau de la recherche du bon b .

9.1.1 Énoncés

Montrer que : $\pi^6 < \sqrt{2^{21}}$

9.1.2 Solution

- On sait que : $\pi^2 < 10$
 $\implies \pi^6 < 10^3 = 1000$ (a)
- d'autre part, on sait aussi que :
 $2^{10} = \sqrt{2^{20}} = 1024$ (b)
(a) et (b) $\implies \pi^6 < \sqrt{2^{20}}$

•

$$\left. \begin{array}{l} \pi^6 < \sqrt{2^{20}} \\ \sqrt{2^{20}} < \sqrt{2^{21}} \end{array} \right\} \implies \pi^6 < \sqrt{2^{21}}$$

9.2 Technique 2

Dans certaines situations, pour comparer deux réels, on doit faire appel à une inégalité connue et il faut savoir l'adapter aux conditions de la situation.

La difficulté réside au niveau de la recherche de la bonne inégalité et les transformations à lui faire subir.

9.2.1 Énoncés

1. Montrer que pour tous réels strictement positifs a, b et c , on a :

$$(a) \quad (a + b)(a + c)(b + c) \geq 8abc$$

$$(b) \quad a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + ac + bc$$

$$(c) \quad \frac{a^3}{b} + \frac{b^3}{a} \geq a^2 + b^2$$

2. Montrer que si : $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ sont des réels strictement positifs et dont le produit est égal à 1, alors : $(1 + a_1)(1 + a_2)(1 + a_3) \dots (1 + a_n) \geq 2^n$.

9.2.2 Solution

1. (a) Pour les réels positifs, on sait que : $m_a \geq m_g$ (m_a et m_g étant respectivement la moyenne arithmétique et la moyenne géométrique de ces réels)

$$\left. \begin{array}{l} (a + b) \geq 2\sqrt{ab} \\ (a + c) \geq 2\sqrt{ac} \\ (b + c) \geq 2\sqrt{bc} \end{array} \right\} \implies (a + b)(a + c)(b + c) \geq 2\sqrt{ab} \times 2\sqrt{ac} \times 2\sqrt{bc}$$

$$\implies (a + b)(a + c)(b + c) \geq 8\sqrt{(abc)^2}$$

$$\implies (a + b)(a + c)(b + c) \geq 8abc$$

(b) L'inégalité : $m_a \geq m_g$ rappelée en (a) et appliquée à 2 réels qui sont des carrés, nous mène à :

$$\left. \begin{array}{l} (a^2 + b^2) \geq 2(ab) \\ (a^2 + c^2) \geq 2(ac) \\ (b^2 + c^2) \geq 2(bc) \end{array} \right\} \implies (a^2 + b^2) + (a^2 + c^2) + (b^2 + c^2) \geq 2(ab) + 2(ac) + 2(bc)$$

$$\implies 2(a^2 + b^2 + c^2) \geq 2(ab + ac + bc)$$

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + ac + bc$$

CHAPITRE 9. QUELQUES TECHNIQUES DE COMPARAISON DES RÉELS

(c) Supposons que : $a \geq b > 0$

$$\implies \frac{1}{b} \geq \frac{1}{a}$$

$$\implies \frac{1}{b} - \frac{1}{a} \geq 0$$

d'autre part $a \geq b > 0 \implies a^3 \geq b^3 > 0$

$$\implies a^3 \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a} \right) \geq b^3 \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a} \right)$$

$$\implies \frac{a^3}{b} - \frac{a^3}{a} \geq \frac{b^3}{b} - \frac{b^3}{a}$$

$$\implies \frac{a^3}{b} + \frac{b^3}{a} \geq \frac{b^3}{b} + \frac{a^3}{a}$$

$$\implies \frac{a^3}{b} + \frac{b^3}{a} \geq a^2 + b^3$$

Remarques

- Puisque a et b jouent des rôles symétriques, le cas $b > a$ se traite de la même façon.
- On retiendra que si a, b, c et d sont des réels positifs alors

$$\left. \begin{array}{l} a \geq b \\ c \geq d \end{array} \right\} \implies ac + bd \geq ad + bc$$

2. L'inégalité : $m_a \geq m_g$ rappelée en 1. (a) et appliquée aux 2 réels 1 et a_1 puis successivement à : 1 et a_2 , 1 et a_3, \dots 1 et a_n , nous mène à :

$$\left. \begin{array}{l} (1 + a_1) \geq 2\sqrt{1a_1} \\ (1 + a_2) \geq 2\sqrt{1a_2} \\ (1 + a_3) \geq 2\sqrt{1a_3} \\ \cdot \geq \cdot \\ \cdot \geq \cdot \\ \cdot \geq \cdot \\ (1 + a_n) \geq 2\sqrt{1a_n} \end{array} \right\} \implies (1 + a_1)(1 + a_2) \dots (1 + a_n) \geq 2^n \sqrt{(1a_1)(1a_2) \dots (1a_n)}$$

$$\implies (1 + a_1)(1 + a_2) \dots (1 + a_n) \geq 2^n \sqrt{a_1 a_2 \dots a_n}$$

$$\implies (1 + a_1)(1 + a_2) \dots (1 + a_n) \geq 2^n \quad (a_1 a_2 \dots a_n = 1)$$

Chapitre 10

Principe des tiroirs

10.1 Introduction

Le thème de ce chapitre est renommé, on lui donne des noms différents suivant le pays : on l'appelle, en France, le principe des tiroirs, en Russie, principe du Dirichlet, en Angleterre, Pigeon-Hole Principale et en Allemagne, Schubfachprinzip.

Le mathématicien à qui on doit ce principe (ou cette méthode de raisonnement) est le mathématicien allemand Gustav Lejeune-Dirichlet (1805-1859) connu pour ses travaux en analyse et son application à la mécanique et à la physique mathématique et notamment son théorème de répartition des nombres premiers dans les suites arithmétiques.

Il s'agit d'un raisonnement presque évident relatif plutôt à la logique de tous les jours qu'à sa formulation mathématique. En effet, n'est-il pas évident que :

- si quatre marteaux sont rangés dans trois tiroirs, alors il existe au moins un tiroir dans lequel se trouveront au moins deux marteaux.



- si six lapins sont mis dans cinq cages, alors il existe au moins une cage dans laquelle se trouveront au moins deux lapins.
- si dans un sac il y a dix paires différentes de chaussures, en retirant du sac au moins 11 chaussures au hasard alors il existe parmi elles au moins une paire assortie.
- Si on écrit 101 nombres entiers naturels alors il existe au moins 11 nombres qui ont le même dernier chiffre.

- Si dans une forêt il y a plus de 1000 arbres tels que chacun d'eux a au plus 99 branches, donc il existe au moins 11 arbres qui ont le même nombre de branches.

Toutes ces situations sont construites selon la même règle : un certain nombre d'objets sont répartis en k tiroirs. Si le nombre total d'objets est strictement supérieur à $n.k$, alors il existe au moins un tiroir contenant plus de n objets¹.

10.2 Démonstration

<https://www.youtube.com/watch?v=H2HfstoXDxE>

10.3 Points de méthode²

1. L'application directe du principe de Dirichlet ne demande pas de grandes compétences. Il faut, à partir des énoncés, savoir quels sont les objets qui jouent le rôle des lapins et quels sont les objets qui jouent le rôle des cages (ou des tiroirs) où l'on met ces lapins. Il arrive souvent que le rôle de la cage soit joué par une propriété quelconque de l'objet. Dans les applications ci-dessus, la propriété est facile à découvrir :
 - Dans l'exemple des chaussures : c'est l'appartenance des chaussures à une paire bien déterminée.
 - Dans l'exemple des 101 nombres : c'est l'existence d'un dernier chiffre déterminé dans la notation décimale.
 - Dans l'exemple des arbres : c'est l'existence d'un nombre déterminé de branches

Application 1

Dans les cases d'un tableau sont placés les nombres -1 , 0 , et 1 . Démontrer que parmi les 8 sommes prises dans celles des lignes, des colonnes ou des diagonales, il existe deux sommes égales

2. L'application du principe des tiroirs s'accompagne souvent d'arguments supplémentaires.

1. Les Mathématiques du Club Olympique Kangourou , Marc Bachmakov page 199

2. Les Mathématiques du Club Olympique Kangourou , Marc Bachmakov page 200

Ainsi, dans les problèmes faisant intervenir le nombre d'amis ou de connaissances d'une personne donnée dans un groupe de n personnes, le nombre de connaissances de toute personne peut varier de 0 à n , c'est-à-dire qu'il existe $n + 1$ variantes. Pourtant, il est impossible que toutes ces variantes se réalisent à la fois puisque, s'il existe une personne ayant n connaissances (c'est-à-dire qui connaît tout le groupe), alors il n'existe aucune personne dont le nombre de connaissances est égal à 0. Des raisons analogues surgissent dans les problèmes qui traitent de tournois ou de matchs.

Application 2

Démontrer qu'à Gabès, il y a au moins deux personnes qui connaissent parmi les Gabèsiens, autant de personnes l'une que l'autre.

3. Dans plusieurs problèmes concernant la divisibilité où l'on applique le principe des tiroirs, un "tiroir" est souvent l'un des restes possibles d'une division par un nombre fixe. Ainsi, si l'on considère une suite de nombres entiers et s'il faut démontrer que la différence de deux termes de cette suite est divisible par n , alors il suffit de trouver dans cette suite deux nombres ayant le même reste modulo n . Compte-tenu du fait qu'il existe exactement n restes différents, au moins deux de ces restes se répètent à condition que la suite ait au moins $n + 1$ termes.

Application 3

Démontrer que parmi 1998 nombres arbitraires, on peut trouver des nombres dont la somme est divisible par 1998.

10.4 Problèmes

Mais, malgré son apparente simplicité, le principe des tiroirs permet de prouver des résultats non triviaux. Ci-après un recueil de quelques problèmes³ faisant appel à ce principe très puissant et basés sur les nombres.

Problème 1

Montrer que parmi 101 nombres entiers distincts, il existe toujours 11 d'entre eux dont la somme est divisible par 11.

3. Martin Gardner Pour la Science numéro 36 octobre 1980 et nombreuses revues françaises et anglo-saxonnes sur le sujet

Problème 2

Un médecin prescrit à son patient de prendre 100 pilules de *XXX* pendant 9 semaines consécutives à raison d'une pilule au moins par jour. Il n'y a aucune contre-indication sur le nombre maximum de pilules à ne pas dépasser dans une journée. Montrer que pendant les 9 semaines, il existe toujours une période au cours de laquelle le patient prendra : 5 pilules, 10 pilules, ..., $5n$ pilules. Jusqu'où peut aller l'entier n ?

Problème 3

On choisit un carré parfait n^2 et on choisit n nombres entiers distincts parmi les entiers de 1 à n^2 . Pour quelles valeurs de n serait-on certain de pouvoir extraire de ces n nombres deux ensembles disjoints de même somme ?

Problème 4

501 nombres différents sont choisis parmi les entiers de 1 à 1 000. Montrer qu'il existe toujours au moins un couple de nombres tel que l'un des termes divise l'autre.

Problème 5

Montrer qu'il existe une puissance de 73 qui se termine par 2 004 fois le chiffre 0 suivis du chiffre 1 :(2 004 fois le chiffre 0)..0001.

Problème 6

On constitue l'ensemble S à l'aide de 102 nombres entiers distincts choisis parmi les entiers de 1 à 200. Montrer qu'il existe au moins 2 éléments de S dont la somme appartient à S .

Problème 7

Est-il possible que le produit de cinq nombres entiers consécutifs soit un carré parfait ? Si oui, donner au moins un exemple.

10.5 Solutions

Problème 1

On calcule les restes de la division par 11 des 101 nombres et l'on obtient les classes de restes $C(0), C(1), C(2), \dots, C(i), \dots, C(10)$ où $C(i)$ désigne l'ensemble des

CHAPITRE 10. PRINCIPE DES TIROIRS

entiers parmi les 101 nombres dont le reste de la division par 11 est égal à i . Deux cas peuvent se présenter :

- aucun des $C(i)$ n'est vide. Dès lors en prenant un élément dans chaque $C(i)$ pour $i = 0$ à 10, on obtient 11 nombres dont la somme est divisible par 11 car $0 + 1 + 2 + 3... + 10 = 55 = 5 \times 11$
- au moins un indice i pour lequel $C(i)$ est vide. 101 nombres sont alors répartis dans un maximum de 10 tiroirs et l'un des tiroirs contient donc 11 nombres. L'addition de ces 11 nombres dont le reste de la division par 11 est le même donne un nombre divisible par 11.

Problème 2

On désigne par $p_1, p_2, p_3, \dots, p_i, \dots, p_{63}$ le nombre total de pilules qui sont prises à la fin du 1^{er} jour, du 2^{ème} jour, du 3^{ème} jour,.....du i ème jour,.....du 63^{ème} jour qui clôt les 9 semaines. $p_{63} = 100$ et la suite des p_i est strictement croissante $p_1 < p_2 < p_3 < \dots < p_i < \dots < p_{63}$ en raison du fait qu'une pilule au minimum est prise chaque jour. On ajoute 5 à chaque terme de la suite, ce qui donne une nouvelle suite strictement croissante $p_1 + 5 < p_2 + 5 < p_3 + 5 < \dots < p_i + 5 < \dots < p_{63} + 5 = 105$. Il y a 63 nombres distincts dans la première suite et 63 autres nombres distincts dans la deuxième suite soit globalement 126 nombres tous inférieurs ou égaux à 105. D'après le principe des tiroirs, deux de ces nombres au moins sont égaux. Il en résulte qu'au moins un des p_i est égal à un $p_j + 5$ avec $i < j$. D'où $p_i - p_j = 5$ pour au moins un couple d'indices (i, j) . Il s'ensuit que 5 pilules exactement ont été prises durant les jours consécutifs $j + 1, j + 2, \dots, i$

Cette démonstration reste encore valable pour $k = 10, 15, 20$ et 25 pilules. Prenons la valeur la plus élevée de $k = 25$. Dans la deuxième suite de terme général $p_i + 25$, le terme le plus élevé est le dernier $p_i + 25$ qui vaut 125.

126 est encore supérieur d'une unité à 125 et le principe des tiroirs s'applique encore, ce qui permet de dire qu'il existe toujours une période au cours de laquelle le patient prendra 25 pilules.

Pour $k = 30$, il apparaît que le dernier terme $p_{63} + 30$ vaut 130 et les 126 nombres peuvent se loger dans 130 tiroirs sans avoir à cohabiter.

Problème 3

Avec un ensemble de N entiers, il y a $2^N - 1$ façons de les regrouper soit en prenant chaque entier isolément soit en les additionnant 2 par 2, 3 par 3,.... Or la somme des nombres appartenant à tous ces sous-ensembles ne peut prendre que des valeurs comprises entre 1 et N fois le plus grand d'entre eux qui est N^2 c'est

à dire entre 1 et N^3 . Si $2^N - 1 > N^3$, le principe des tiroirs s'applique et deux sous-ensembles ont la même somme. S'ils sont disjoints, on a répondu à la question et si les deux sous-ensembles ont des termes communs, il suffit de les enlever pour trouver deux sous-ensembles disjoints de même somme. Il est facile de vérifier que l'inégalité précédente $2^N - 1 > N^3$ est satisfaite pour tout $N > 9$. En effet pour $N = 9$, on a $2^9 - 1 = 511$ et $N^3 = 729$ alors que pour $N = 10$, on a $2^{10} - 1 = 1023$ et $N^3 = 1000$. Pour les valeurs de $N > 10$, on a toujours $2^N - 1 > N^3$.

Problème 4

Etant donné un nombre entier n , il est toujours possible d'en extraire autant de facteurs 2 qu'il en contient jusqu'à ce qu'il se réduise à la forme $n = 2^k p$ où p est un entier impair. Bien entendu pour tous les entiers n impairs, $k = 0$. Si chacun des 501 nombres choisis n_i est exprimé sous cette forme, on obtient un ensemble de 501 valeurs de p , chacune d'elles appartenant à l'ensemble des 500 nombres impairs 1, 3, 5, 7, ..., 999. En raison du principe des tiroirs, on en déduit qu'au moins deux valeurs de p sont identiques. Il en résulte qu'il existe $n_i = 2^a p$ et $n_j = 2^b p$ avec $a > b$. Le nombre correspondant à la plus petite puissance de 2 divise l'autre.

Problème 5

On se contentera de démontrer la propriété pour une puissance se terminant par 001 et l'on verra que la généralisation à 2004 fois 0 suivi de 1 coule de source une fois cette démonstration faite.

On considère la suite des 1001 nombres entiers qui sont les puissances successives de 73, $73^2, 73^3, \dots, 73^{1001}$

D'après le principe des tiroirs, deux de ces nombres ont les mêmes trois derniers chiffres (1001 nombres pour 1000 tiroirs disponibles). La différence de ces deux nombres est de la forme $73^a (73^b - 1)$ avec a et b entiers. Elle est divisible par 1000. Or 1000 est premier avec 73, donc avec 73^a et divise, d'après le théorème de Gauss, $(73^b - 1)$. Il en résulte que $73^b - 1 = 1000 \times A$. D'où $73^b = 1000.A + 1$. Et par suite, 73^b se termine bien par 001. On voit que la démonstration reste valable quel que soit le nombre de zéros considérés. Il suffit de prendre un nombre suffisant de puissances consécutives de 73, en l'occurrence un nombre égal à 10000, ..., 2004 fois ...001 pour répondre à la question posée.

D'après le principe des tiroirs, une différence de deux puissances sera nécessairement de la forme $73^a (73^b - 1)$ et sera divisible par un nombre se terminant 2004 zéros. Le nombre cherché sera 73^b .

Problème 6

Si les 101 nombres parmi 200 sont les entiers allant de 100 à 200, on constitue un ensemble S tel que la somme de deux entiers pris dans S ne donne jamais un élément de S . En effet la somme de deux quelconques d'entre eux donne un nombre toujours supérieur à 200 qui ne peut jamais appartenir à S .

On ajoute un 102ème terme à cet ensemble S . Si l'on veut que les sommes des termes pris 2 à 2 restent supérieures à 200, le nombre doit être compris entre 100 et 200 mais d'après le principe des tiroirs il est égal à un nombre déjà choisi, ce qui est en contradiction avec l'hypothèse que tous les nombres choisis sont distincts. Il est alors inférieur à 100 et on ne peut pas échapper à au moins une addition de ce nombre avec un élément de S qui donne un 3ème élément de S .

Supposons que l'ensemble S des 101 premiers nombres choisis comporte 100 nombres compris entre 100 et 200 constituant un ensemble S' et un nombre strictement inférieur à 100, par exemple $p < 100$. Avec ce dernier nombre, on s'interdit de mettre dans S' à la fois 100 et $100 + p$, 101 et $101 + p$, Ceci réduit d'au moins 2 le nombre de termes compris entre 100 et 200 qui sont permis. Le nombre maximum de termes de S' est donc ramené à 99. D'où la contradiction avec l'hypothèse qu'il y a dans S' , 100 nombres compris entre 100 et 200. A fortiori S ne peut pas contenir 101 termes et le 102ème ne peut pas être ajouté. S'il y a plus d'un terme strictement inférieur à 100 dans S , en raison du nombre encore plus élevé que précédemment de termes supérieurs à 100 qui deviennent interdits, il est impossible d'avoir un ensemble S de 101 termes tel que la somme de deux entiers pris dans S ne donne jamais un élément de S . A fortiori, cela est impossible avec 102 termes

Solution proposée par Antoine Vanney (*septembre 2 010*)

La question se ramène à trouver 2 nombres dont la différence est dans S . On classe donc dans l'ordre croissant les éléments de S et on calcule les 101 différences par rapport au plus petit. Ces différences sont entre 1 et 200, elles sont différentes les unes des autres. En les réunissant avec S , on obtient un ensemble de 203 nombres entre 1 et 200. Il faut éliminer le cas possible, nombre qui peut se présenter au plus 2 fois parmi les 203, d'une différence égale au plus petit des nombres. Il reste donc 201 nombres, dont forcément 1 qui se retrouve 2 fois : une différence est égale à l'un des éléments de S .

Problème 7

Il s'agit de résoudre l'équation $y^2 = x(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)$ avec x et y entiers strictement positifs. On remarque que le plus grand commun diviseur de chaque paire de nombres du second membre est au plus égal à 4. Il en résulte que tout nombre premier $p \geq 5$ qui entre dans la factorisation de l'un quelconque des

CHAPITRE 10. PRINCIPE DES TIROIRS

cinq nombres consécutifs a un exposant pair. S'agissant des facteurs premiers 2 et 3, on peut subdiviser les cinq entiers en quatre catégories :

1. ceux pour lesquels 2 et 3 entrent l'un et l'autre dans leur factorisation avec des exposants pairs.
2. ceux pour lesquels 2 et 3 entrent respectivement avec des exposants impair et pair.
3. ceux pour lesquels 2 et 3 entrent respectivement avec des exposants pair et impair.
4. ceux pour lesquels 2 et 3 entrent l'un et l'autre avec des exposants impairs.

ce qui revient à dire que chaque entier du second membre est nécessairement de la forme n^2 ou $2n^2$ ou $3n^2$ ou $6n^2$.

Selon le principe des tiroirs, il y a au moins deux nombres parmi les cinq qui entrent dans la même catégorie. Leur différence est au plus égale à 4 qui est l'écart entre x et $x + 4$. Dès lors les seules valeurs possibles des cinq nombres sont 1, 2, 3, 4 et 5 dont le produit 120 n'est pas un carré.

Conclusion : il n'y a jamais cinq entiers consécutifs dont le produit donne un carré parfait.

Chapitre 11

Arithmétique

11.1 Rappels

Le thème de ce chapitre est l'**Arithmétique** : c'est la Science qui a pour objet l'étude de la formation des nombres, de leurs propriétés et des rapports qui existent entre eux.

Dans ce document, on s'intéressera plutôt à certaines propriétés des nombres (**et spécialement les entiers naturels**) et certains rapports (au sens commun du mot) entre eux. L'atteinte de cet objectif nous impose de commencer par énoncer quelques règles incontournables dans ce domaine.

1. Règle 1

On dit qu'un entier naturel non nul d divise un entier naturel a si et seulement si il existe un entier naturel k tel que $a = k.d$ (on dit aussi que a est congru à 0 modulo d et on note : $a \equiv 0 (d)$)

(a) Règle 1.0

a, b et c sont trois entiers naturels tels que a et b ne sont pas nuls

- Si a divise b alors a divise $b \times c$
- Si a divise b et b divise a alors $a = b$
- Si a divise b et b divise c alors a divise c .

(b) Règle 1.1

Un entier naturel a distinct de 0 et de 1 est dit premier s'il n'est divisible que par 1 et par lui-même.

(c) Règle 1.2

Tout entier naturel $a > 1$ peut être écrit comme un produit de nombres premiers, cette factorisation est unique à l'ordre des facteurs près :

$$a = (p_1)^{r_1} \times (p_2)^{r_2} \times (p_3)^{r_3} \times \dots \times (p_n)^{r_n}$$

où les p_i sont des nombres premiers distincts et les r_i des entiers naturels.

(d) *Règle 1.3*

Si $a = (p_1)^{r_1} \times (p_2)^{r_2} \times (p_3)^{r_3} \times \dots \times (p_n)^{r_n}$ est la décomposition d'un entier naturel $a > 1$ en un produit de facteurs premiers alors a possède $(r_1 + 1) \times (r_2 + 1) \times (r_3 + 1) \times \dots \times (r_n + 1)$ diviseurs.

(e) *Règle 1.4*

Les critères de divisibilité par 2 et 5, 4 et 25, 3 et 9 doivent être sus.

(f) *Règle 1.5*

Si un entier naturel non nul d divise chacun de deux entiers naturels a et b ($a \geq b$) alors d divise :

- $a + b$
- $a - b$
- $a \times b$
- $\alpha.a + \beta.b$ ($\alpha, \beta \in \mathbb{N}$)

2. Règle 2 Soit deux entiers naturels a et b tels que $b \neq 0$. Effectuer la division euclidienne de a par b , c'est trouver l'unique couple d'entiers naturels $(q; r)$ tel que :

$$a = bq + r \quad \text{avec} \quad 0 \leq r < b$$

q est le quotient et r est le reste de la division euclidienne de a par b

(a) *Règle 2.0*

Dans la division euclidienne d'un entier naturel a par un entier naturel non nul b , le reste est un élément de l'ensemble $\{0, 1, 2, \dots, b - 1\}$.

(b) *Règle 2.1*

Si les restes des divisions euclidiennes de deux entiers naturels a et b par le même entier naturel non nul n sont égaux, on dit que a et b sont congrus modulo n et on note : $a \equiv b \pmod{n}$

(c) *Règle 2.2*

Soit a, b, c et d quatre entiers naturels et n un entier naturel non nul.

- Si $a \equiv b \pmod{n}$ et $c \equiv d \pmod{n}$ alors $a + c \equiv b + d \pmod{n}$
- Si $a \equiv b \pmod{n}$ et $c \equiv d \pmod{n}$ alors $a.c \equiv b.d \pmod{n}$
- Si $a \equiv b \pmod{n}$ alors $a.k \equiv b.k \pmod{n}$ (pour tout entier naturel k)
- Si $a \equiv b \pmod{n}$ alors $a^p \equiv b^p \pmod{n}$ (pour tout entier naturel p)

3. Règle 3 Le plus grand commun diviseur de deux entiers naturels non nuls a et b est l'entier naturel d noté $a \wedge b$ tel que :

- d divise a et b

- Tout autre diviseur de a et b est inférieur à d

(a) *Règle 3.0*

Le plus grand commun diviseur de deux entiers naturels non nuls a et b est le dernier reste non nul dans la suite des divisions euclidiennes dans l'algorithme d'Euclide.

(b) *Règle 3.1*

Soit a et b deux entiers naturels non nuls

- Si d' est un diviseur commun à a et b alors d' divise $a \wedge b$
- Pour tout entier naturel non nul k , on a : $k.a \wedge k.b = k(a \wedge b)$

4. Règle 4

Deux entiers naturels a et b non nuls sont dits premiers entre eux si leur plus grand commun diviseur est égal à 1.

(a) *Règle 4.0*

Soit deux entiers naturels a et b non nuls. Si $d = a \wedge b$ alors les deux entiers a' et b' tels que : $a = d \times a'$ et $b = d \times b'$ sont premiers entre eux.

(b) *Règle 4.1*

Soit trois entiers naturels a, b et c avec a et b non nuls. Si a et b sont premiers entre eux et a divise le produit $b \times c$ alors a divise c .

5. Règle 5

Le plus petit commun multiple de deux entiers naturels non nuls a et b est l'entier naturel non nul k noté $a \vee b$ tel que :

- k est un multiple de a et b
- Tout autre multiple non nul de a et b est supérieur à k

(a) *Règle 5.0*

Soit deux entiers naturels non nuls a et b . Pour tout entier naturel non nul n , on a : $na \vee nb = n(a \vee b)$

(b) *Règle 5.1*

Si a et b deux entiers naturels non nuls alors on a : $(a \wedge b) \times (a \vee b) = a \times b$

6. Règle 6

- Tout entier naturel n distinct de 1 admet au moins un diviseur premier

- Si n est entier naturel distinct de 1 alors le plus petit diviseur de n distinct de 1 est premier.

(a) *Règle 6.0*

Un entier naturel $n > 1$ est composé (c'est-à-dire n'est pas premier) si et seulement si il admet un diviseur premier inférieur ou égal à \sqrt{n} .

(b) *Règle 6.1*

Il existe une infinité de nombres premiers.

(c) *Règle 6.2*

Soit a et b deux entiers naturels et p un nombre premier qui divise le produit $a \times b$. Si p ne divise pas a alors p divise b .

(d) *Règle 6.3 (le petit théorème de Fermat)*

1er énoncé : Soit un nombre premier p et un entier naturel a . Alors p divise $a^p - a$

2ème énoncé : Soit un nombre premier p et un entier naturel a non divisible par p alors $a^p - 1 \equiv 1 \pmod{p}$

Autre version : Soit un entier naturel $n > 1$, s'il existe un entier naturel a tel que $a^p - a$ ne soit pas divisible par n alors n n'est pas premier.

11.2 Problèmes proposés¹

Problème 1 (Concours national 2005)

Quel est le plus petit entier naturel qui admet 1, 1 et 5 pour reste lorsqu'il est divisé par 3, 5 et 7 respectivement ?

Problème 2 (Concours national 2005)

Soit E un ensemble de 17 entiers naturels : $n_1, n_2, n_3, \dots, n_{17}$ (distincts ou non). Montrer qu'il existe une partie de E dont la somme de ses éléments est un multiple de 17. (On pourra considérer les sommes $S_i = n_1 + n_2 + n_3 + \dots + n_i$ avec $1 \leq i \leq 17$)

Problème 3

Montrer qu'il existe au moins deux puissances de 3 dont la différence est divisible par 2011.

1. Les problèmes et les solutions proposés sont en grande partie inspirés des concours et préparations précédents de l'A.T.S.M

Problème 4

Déterminer le PGCD des entiers : $3^3 - 3, 5^5 - 5, 7^7 - 7, 9^9 - 9, \dots, 2015^{2015} - 2015$

Problème 5

Soit n un entier naturel non nul et d_1, d_2 et d_3 ses trois plus petits diviseurs positifs tels que : $d_1 < d_2 < d_3$. Déterminer n sachant que $n = 1 + (d_1)^2 + (d_2)^2 + (d_3)^2$

11.3 Solutions proposées

Problème 1

Soit n l'entier naturel cherché

$$\implies \begin{cases} n = 3p + 1 \\ n = 5p' + 1 \\ n = 7p'' + 1 \end{cases} \implies \begin{cases} n + 44 = 3p + 45 = 3q \\ n + 44 = 5p' + 45 = 5q' \\ n + 44 = 7p'' + 49 = 7q'' \end{cases}$$

alors $n + 44$ est un multiple commun de 3, 5 et 7 alors il est divisible par leur PPCM qui est 105

donc $n + 44 = 105k$ et puisque n doit prendre la plus petite valeur possible, on aura $n + 44 = 105$ et par suite $n = 61$.

Problème 2

Raisonnement par disjonction des cas (reste de la division euclidienne)

Soit $S_i = n_1 + n_2 + n_3 + \dots + n_i$ avec $1 \leq i \leq 17$ et soit $r_1, r_2, r_3, \dots, r_{17}$ les restes de la division euclidienne respectivement de $S_1, S_2, S_3, \dots, S_{17}$ par 17

- **1er cas** : il existe deux entiers naturels i et j tels que $1 \leq i \leq j \leq 17$ et $r_i = r_j$
 Dans ce cas $(S_j - S_i)$ sera divisible par 17 et comme $S_j - S_i = n_{i+1} + n_{i+2} + n_{i+3} + \dots + n_j$
 donc on prend $E = \{n_{i+1}, n_{i+2}, n_{i+3}, \dots, n_j\}$ qui répond bien à la question
- **2ème cas** : tous les r_i sont distincts deux à deux.
 Comme la division euclidienne d'un entier naturel par 17 admet exactement 17 restes possibles $(0, 1, 2, \dots, 16)$ et la suite

$$(S_i) : S_i = \sum_{k=1}^i n_k$$

ne peut avoir que 17 termes donc il existe i tel que $r_i = 0$ et donc S_i est multiple de 17 et la partie $E = \{n_1, n_2, n_3, \dots, n_i\}$ répond bien à la question.

Problème 3

- **1ère méthode** : On a : $1936 < 2011 < 2025$ alors $44 < \sqrt{2011} < 45$. On vérifie que 2011 n'a pas de diviseur premier inférieur à 45 ; on en déduit que 2011 est premier.
alors $3^{2010} \equiv 1 \pmod{2011}$ (d'après le petit théorème de Fermat)
alors $3^n \times 3^{2010} \equiv 3^n \times 1 \pmod{2011} \implies 3^{n+2010} \equiv 3^n \pmod{2011}$
ce qui nous permet de conclure que $(3^{n+2010} - 3^n)$ est divisible par 2011 ($n \in \mathbb{N}^*$)
- **2ème méthode** : Considérons les restes r_n de la division de 3^n par 2011, ($n \in \mathbb{N}^*$). Évidemment les restes sont en nombre fini puisque $0 \leq r_n \leq 2010$ donc il existe m et n tels que $r_m = r_n$ et $m < n$, donc $(3^m - 3^n)$ est divisible par 2011.
- **3ème méthode** : La 2ème méthode nous inspire une autre idée : on peut aussi appliquer le principe de tiroirs !

Problème 4

On a : $3^3 - 3 = 24$ alors le PGCD cherché est un diviseur de 24 et d'autre part tous ces entiers sont de la forme $n^n - n$ avec n entier impair.

Posons $n = 2p + 1$ avec $p \geq 1$ alors on aura :

$$\begin{aligned} n^n - n &= n^{2p+1} - n = n(n^{2p} - 1) = n[(n^2)^p - 1] = n[m^p - 1] \quad (m = n^2) \\ \implies n^n - n &= n(m-1)(m^{p-1} + m^{p-2} + m^{p-3} + \dots + m + 1) \\ &= n(n^2 - 1)[(n^2)^{p-1} + (n^2)^{p-2} + (n^2)^{p-3} + \dots + (n^2) + 1] \\ &= n(n-1)(n+1)[(n^2)^{p-1} + (n^2)^{p-2} + (n^2)^{p-3} + \dots + (n^2) + 1] \end{aligned}$$

ainsi $n^n - n$ est divisible par les 3 entiers consécutifs : $(n-1)$, n et $(n+1)$

- alors il est divisible par 3
- d'autre part $n = 2p + 1$ d'où $(n-1)(n+1) = 2p(2p+2) = 4p(p+1)$ et puis que $p(p+1)$ est un produit de 2 entiers consécutifs alors il est pair, il en découle que $(n-1)(n+1) = 8k$

donc $n^n - n$ est divisible par 3 et 8 qui sont premiers entre eux

alors il est divisible par leur produit qui est 24

alors 24 qui est le P.G.C.D de ces entiers.

Problème 5

Résultat préliminaire

$$\text{Si } n \in \mathbb{N} \implies \begin{cases} \text{Si } n \text{ est pair} \implies n^2 \equiv 0 \pmod{4} \\ \text{Si } n \text{ est impair} \implies n^2 \equiv 1 \pmod{4} \end{cases}$$

Justification

- Si n est pair alors $n = 2p \implies n^2 = 4p^2 = 4q$
- Si n est impair alors
 $n = 2p + 1 \implies n^2 = 4p^2 + 4p + 1 = 4(p^2 + p) + 1 = 4k + 1$

Revenons à notre exercice

PARITÉ DE n : supposons que n est impair alors tous ses diviseurs seraient impairs et en particulier d_1, d_2 et d_3

On a $n = 1 + (d_1)^2 + (d_2)^2 + (d_3)^2 \implies n \equiv 1 + 1 + 1 + 1 \pmod{4} \implies n \equiv 0 \pmod{4}$
 alors n est pair : absurde! On retient que : n est pair et que $d_1 = 2$

$$\text{Deux cas sont possibles pour } d_2 \text{ et } d_3 : \begin{cases} d_2 \wedge d_3 = 1 \\ \text{ou} \\ d_2 \wedge d_3 = d \neq 1 \end{cases}$$

- 1er cas : $d_2 \wedge d_3 = 1$ alors
 - d_2 et d_3 sont impairs $\implies n \equiv 1 + 0 + 1 + 1 \pmod{4} \implies n \equiv 3 \pmod{4}$
 alors n est impair : absurde! (on a déjà prouvé que n est pair)
 - Parmi d_2 et d_3 , l'un est impair et l'autre est pair
 $\implies n \equiv 1 + 0 + 0 + 1 \pmod{4}$ (à un ordre près)
 $\implies n \equiv 2 \pmod{4}$: absurde! car n admet comme diviseurs pairs 2 ($d_1 = 2$)
 et un autre diviseur parmi d_2 et d_3
- 2ème cas : $d_2 \wedge d_3 = d \neq 1$ alors tout diviseur commun à d_2 et d_3 diviserait n et il doit être plus petit qu'eux
 alors ça ne peut être que 2 et par suite on aura : $d_3 = 2d_2$
 alors $n = 1 + (d_1)^2 + (d_2)^2 + (d_3)^2 = 1 + 4 + (d_2)^2 + 4(d_2)^2 = 5(1 + (d_2)^2)$
 ce qui nous mène à déduire que : $d_2 = 5, d_3 = 10$ et $n = 130$

Chapitre 12

Les deux tranches d'une tarte

12.1 Énoncés

Parmi les produits exposés dans une vitrine réfrigérée d'une pâtisserie, on trouve une tarte aux fraises et deux tranches découpées d'une tarte identique à celle qui est exposée (des points de vue : forme, dimensions, ingrédients et goût).



- **Tranche 1** : elle est obtenue en découpant un secteur angulaire d'angle β radians

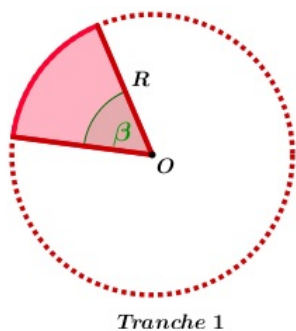


FIGURE 12.1 – Schéma du découpage

FIGURE 12.2 – Résultat

- **Tranche 2** : elle est obtenue en découpant la tarte suivant une corde de longueur $\ell = R$

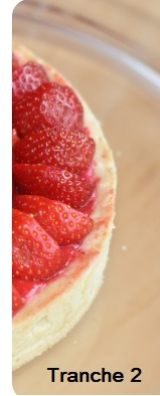
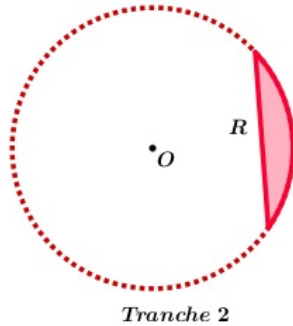


FIGURE 12.3 – Schéma du découpage

FIGURE 12.4 – Résultat

La question : laquelle de deux tranches me conseillez - vous d'acheter sachant que :

- elles sont affichées au même prix
- l'angle $\beta \equiv 0.1812 \text{ radians}$
- je veux manger le plus possible de gâteau
- la tarte est d'une épaisseur constante
- la forme n'est pas l'un de mes critères

12.2 Solution

En prenant en considération l'égalité des épaisseurs de deux tranches, on déduit que la plus volumineuse parmi elles sera celle dont la face de dessus a la plus grande surface : ainsi le problème revient à comparer les aires : \mathcal{A}_s d'un secteur circulaire et \mathcal{A}_g d'un segment circulaire.

12.2.1 Aire d'un secteur circulaire d'angle $\alpha \text{ radians}$

On sait que l'aire d'un secteur circulaire est proportionnelle à l'angle au centre qui l'intercepte et qu'un secteur circulaire d'angle 2π est le disque tout entier donc il lui correspond une aire qui vaut $\pi.R^2$

Dans notre cas, l'angle du secteur est α alors

$$\frac{\mathcal{A}_s}{\alpha} = \frac{\pi.R^2}{2\pi} \implies \mathcal{A}_s = \frac{\alpha.\pi.R^2}{2\pi} \implies \mathcal{A}_s = \frac{1}{2} \times \alpha \times R^2 \quad (1)$$

12.2.2 Aire d'un segment circulaire

Définition

On appelle segment circulaire la partie du plan limitée par un arc de cercle et la corde qui le sous-tend.

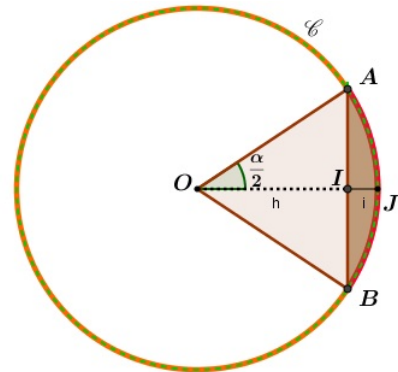
L'aire \mathcal{A}_g d'un segment circulaire

- A et B sont deux points distincts donnés d'un cercle \mathcal{C} de centre O et de rayon R . I est le milieu de $[AB]$
- (C) l'arc $[\widehat{AB}]$ de \mathcal{C}
- $(C) \cap [OI] = \{J\}$
- \mathcal{A}_s , l'aire du secteur circulaire $[OA, \widehat{OB}]$
- \mathcal{A}_t , l'aire du triangle OAB

Aire du triangle OAB

Le triangle OAB est isocèle en O et (OI) est la médiatrice de $[AB]$

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_t &= \frac{1}{2} \times OI \times AB \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{R^2 - \frac{\ell^2}{4}} \times \ell \quad (IOA \text{ est rectangle en } I) \\ &= \frac{1}{4} \times \ell \times \sqrt{4R^2 - \ell^2} \quad (2) \end{aligned}$$



D'autre part, on a : $\mathcal{A}_g = \mathcal{A}_s - \mathcal{A}_t$ (3)

Ainsi, d'après (1), (2) et (3), on aura :

$$\mathcal{A}_g = \frac{1}{2} \times \alpha \times R^2 - \frac{1}{4} \times \ell \times \sqrt{4R^2 - \ell^2} \quad (4)$$

12.2.3 Le cas particulier de notre exercice

L'aire du secteur circulaire dont l'angle au centre est $\beta \equiv 0.1812 \text{ radians}$ (Tranche 1)

D'après l'égalité (1), $\mathcal{A}_s = \frac{1}{2} \times \beta \times R^2 \equiv 0.0906 \times R^2$ (5)

L'aire du segment circulaire (Tranche 2)

D'après les données de notre exercice, $\ell = R$ alors le triangle OAB est équilatéral et $\alpha = \frac{\pi}{3}$

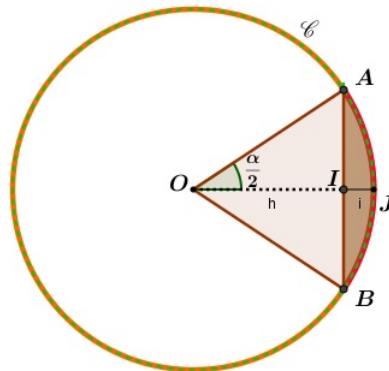
$$\begin{aligned}
 \mathcal{A}_g &= \frac{1}{2} \times \alpha \times R^2 - \frac{1}{4} \times \ell \times \sqrt{4R^2 - \ell^2} \\
 &= \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{3} \times R^2 - \frac{1}{4} \times R \times \sqrt{4R^2 - R^2} \\
 &= \frac{\pi}{6} \times R^2 - \frac{1}{4} \times R^2 \sqrt{3} \\
 &= R^2 \left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4} \right) \\
 &\approx R^2 \times 0.0906 \approx 0.0906 \times R^2 \quad (6)
 \end{aligned}$$

En conclusion : une petite comparaison des résultats (5) et (6) nous permet de conclure que les 2 tranches ont le même volume et c'est ce qui justifie leurs prix identiques donc peu importe laquelle je choisirai.

Il semble que ce pâtissier est un matheux !

12.3 Autres expressions de \mathcal{A}_g

Dans le cas particulier de notre exercice, le fait que la longueur de la corde $\ell = R$ nous a permis de déduire que le triangle OAB est équilatéral et par suite que $\alpha = \frac{\pi}{3}$. Ainsi, s'impose l'étude du cas général où la détermination de α n'est pas aussi évidente. Dans la suite de ce chapitre, on tâchera de trouver l'expression de \mathcal{A}_g dans diverses situations.



Dans le triangle isocèle OAB , on pose $h = OI$ la hauteur relative à la base $AB = \ell$

12.3.1 Situation où les données sont α et R

Le triangle OIA est rectangle en I

alors $AI = \frac{\ell}{2} = R \times \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$

alors

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_g &= \frac{1}{2} \times \alpha \times R^2 - \frac{1}{4} \times \ell \times \sqrt{4R^2 - \ell^2} \\ &= \frac{1}{2} \times \alpha \times R^2 - \frac{1}{4} \times 2R \times \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \sqrt{4R^2 - 4R^2 \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \\ &= \frac{1}{2} \times \alpha \times R^2 - R^2 \times \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \sqrt{1 - \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \\ &= \frac{1}{2} \times R^2 \left(\alpha - 2 \times \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \times \left| \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \right| \right) \\ &= \frac{1}{2} \times R^2 \left(\alpha - 2 \times \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \times \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \right) \quad \left(\alpha \text{ est un angle géométrique donc } \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \geq 0 \right) \\ &= \frac{1}{2} \times R^2 (\alpha - \sin(\alpha)) \end{aligned}$$

$$\mathcal{A}_g = \frac{1}{2} \times R^2 (\alpha - \sin(\alpha))$$

12.3.2 Situation où les données sont α et ℓ

Le triangle OIA est rectangle en I . (Rappelons que ℓ est la longueur de la corde $[AB]$)

alors $R = \frac{\frac{\ell}{2}}{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{\ell}{2 \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$

alors

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_g &= \frac{1}{2} \times R^2 (\alpha - \sin(\alpha)) \quad \text{(Résultat du paragraphe 3.1 ci-dessus)} \\ &= \frac{\ell^2}{8 \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)} (\alpha - \sin(\alpha)) \end{aligned}$$

$$\mathcal{A}_g = \frac{\ell^2}{8 \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)} (\alpha - \sin(\alpha))$$

12.3.3 Situation où les données sont R et ℓ

Le triangle IOA étant rectangle en I alors :

$$\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\ell}{2R} \quad (a) \quad \text{et} \quad \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{OI}{R} = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{4R^2 - \ell^2}}{R} = \frac{\sqrt{4R^2 - \ell^2}}{2R} \quad (b)$$

- Dans une première étape, on détermine l'angle α à partir de son sinus ou son cosinus calculé à l'aide de l'une de deux formules (a) ou (b) ci-dessus

CHAPITRE 12. LES DEUX TRANCHES D'UNE TARTE

- Dans une deuxième étape, on applique la formule (5) établie dans le paragraphe 2.2.2 ci-dessus :

$$\mathcal{A}_g = \frac{1}{2} \times \alpha \times R^2 - \frac{1}{4} \times \ell \times \sqrt{4R^2 - \ell^2}$$

$\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\ell}{2R} \quad \text{et} \quad \mathcal{A}_g = \frac{1}{2} \times \alpha \times R^2 - \frac{1}{4} \times \ell \times \sqrt{4R^2 - \ell^2}$
--

Chapitre 13

La promenade de Robi

13.1 Énoncés¹

Mr et Mme Smith vont faire une promenade avec leur chien Robi. Chacun d'eux veut le tenir en laisse. Ils finissent par accrocher à la pauvre bête deux laisses de longueurs différentes : celle qui est tenue par le Mr a pour longueur R et celle qui est tenue par la dame a pour longueur R' .

Sachant que Mr et Mme Smith marchent toujours à une distance fixe d l'un de l'autre, quelle est à chaque instant l'aire \mathcal{A} de la surface dans laquelle le chien peut évoluer librement ? (On exprimera \mathcal{A} en fonction de R , R' et d)

Donnez une valeur approchée de \mathcal{A} au millième près dans le cas où $R = 1\text{ m}$, $R' = 0.75\text{ m}$ et $d = 1.5\text{ m}$

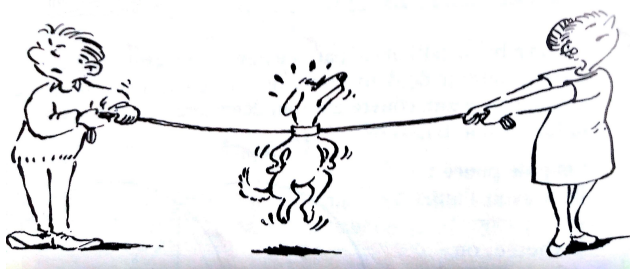


FIGURE 13.1 – Robi tenu par ses maîtres

13.2 Solution

Pour tout instant t :

1. L'habillage de cet exercice est inspiré de : MATH EN JEUX , Niveau 4e/3e, Bordas, Problème 29 page 62

CHAPITRE 13. LA PROMENADE DE ROBI

1. on désignera par O et O' les points où se trouvent respectivement Mr et Mme Smith
 - Si Robi est tenu par Mme Smith seulement alors il pourra se déplacer librement sur un disque limité par un cercle $\mathcal{C}'_{(O', R')}$
 - Si Robi est tenu par Mr Smith seulement alors il pourra se déplacer librement sur un disque limité par un cercle $\mathcal{C}_{(O, R)}$
 - mais puisque la dame et son mari tenaient le chien en même temps alors celui-ci ne pourra évoluer qu'à l'intérieur de l'intersection de ces deux disques (voir figure 23.2 ci-dessous)

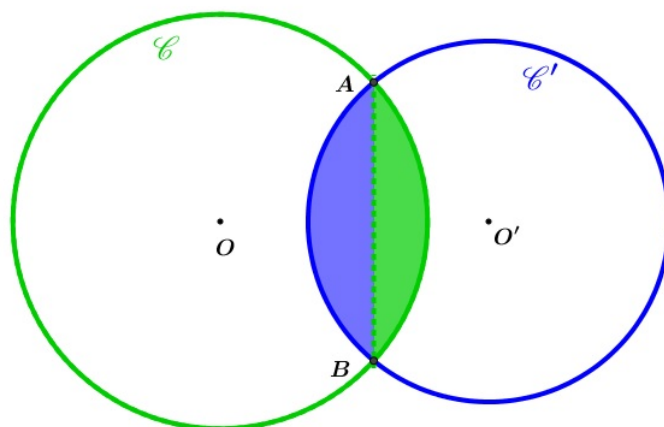


FIGURE 13.2 – Intersection de 2 disques

2. On se placera dans le cas où : $R + R' > OO' = d > R > R' > R - R'$. (Mme Smith veut toujours être la plus proche du chien!)
3. on pose :
 - $\mathcal{C} \cap \mathcal{C}' = \{A, B\}$
 - $(C) = \widehat{AB}$ de \mathcal{C} et $(C') = \widehat{AB}$ de \mathcal{C}' : ce sont les deux arcs qui délimitent la surface abordable.
 - $(C) \cap (OO') = \{M\}$ et $(C') \cap (OO') = \{M'\}$
 - H le pied de la hauteur issue de A dans le triangle OAO'

L'aire \mathcal{A} , à calculer, et qui est limitée par les deux arcs (C) et (C') peut être considérée comme étant la réunion de deux segments circulaires déterminés par le cercle \mathcal{C} et sa corde $[AB]$ et d'aire \mathcal{A}_1 puis le cercle \mathcal{C}' et la même corde et d'aire \mathcal{A}_2 .

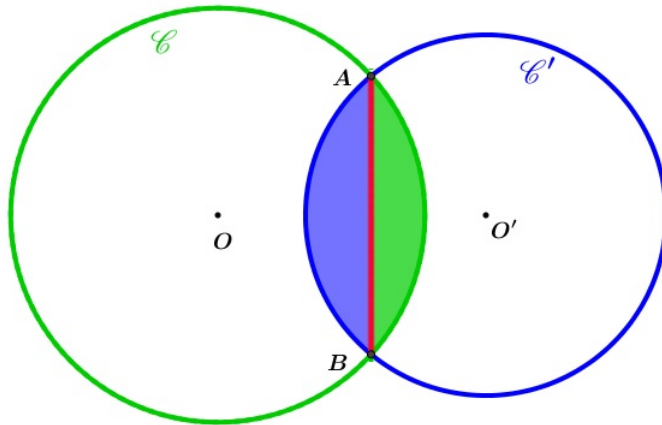


FIGURE 13.3 – Réunion de 2 seg. circ.

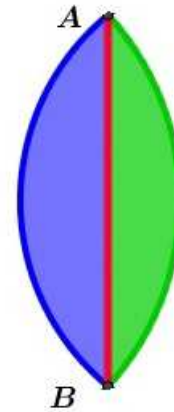


FIGURE 13.4 – Surface abordable

Ainsi, on aura :

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2$$

Par manque de données, aucune de trois formules de calcul de l'aire d'un segment circulaire :

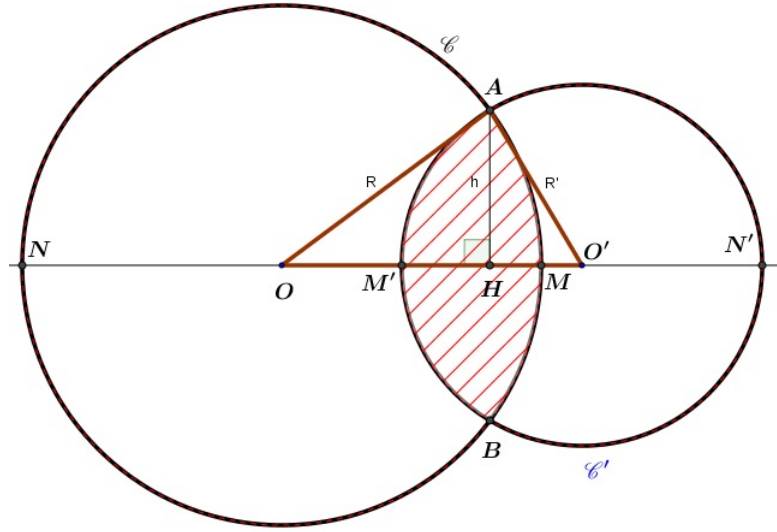
$$\mathcal{A}_g = \frac{1}{2} \times R^2 (\alpha - \sin(\alpha))$$

$$\mathcal{A}_g = \frac{\ell^2}{8 \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)} (\alpha - \sin(\alpha))$$

$$\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\ell}{2R} \quad \text{et} \quad \mathcal{A}_g = \frac{1}{2} \times \alpha \times R^2 - \frac{1}{4} \times \ell \times \sqrt{4R^2 - \ell^2}$$

établies au chapitre précédent 12.3 (chapitre 22) n'est directement applicable. (On n'a ni la longueur ℓ de la corde $[AB]$ ni l'angle au centre α qui intercepte le secteur circulaire) : c'est ce qui nous pousse à explorer d'autres pistes

13.2.1 Piste 1 : Théorème d'Al-Kashi (Loi des cosinus)



D'après le théorème d'Al-Kashi appliqué au triangle AOO' , on a :

$$R'^2 = R^2 + d^2 - 2R.d.\cos(\widehat{AOO'}) \quad \text{On pose : } \alpha = \widehat{AOB} = 2.\widehat{AOO'}$$

$$\implies \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{R^2 + d^2 - R'^2}{2dR}$$

d'autre part, et puisque le triangle AOH est rectangle en H, on a :

$$\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \cos(\widehat{AOO'}) = \cos(\widehat{AOH}) = \frac{d_1}{R} \quad (d_1 = OH)$$

$$\implies R'^2 = R^2 + d^2 - 2.R.d.\frac{d_1}{R} = R^2 + d^2 - 2.d.d_1$$

$$\implies d_1 = \frac{R^2 + d^2 - R'^2}{2d}$$

D'après la formule (3) ci-dessus, on a :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_g &= \frac{1}{2} \times \alpha \times R^2 - \frac{1}{4} \times \ell \times \sqrt{4R^2 - \ell^2} \\ &= \frac{1}{2} \times \alpha \times R^2 - AH \times \sqrt{R^2 - AH^2} \\ &= \frac{1}{2} \times \alpha \times R^2 - d_1 \times \sqrt{R^2 - d_1^2} \\ &= \frac{1}{2} \times \alpha \times R^2 - \frac{R^2 + d^2 - R'^2}{2d} \times \sqrt{R^2 - \left(\frac{R^2 + d^2 - R'^2}{2d}\right)^2} \\ &= \frac{1}{2} \times \alpha \times R^2 - \frac{R^2 + d^2 - R'^2}{4d^2} \times \sqrt{4d^2R^2 - (R^2 + d^2 - R'^2)^2} \\ &= \frac{\alpha}{2} \times R^2 - \frac{R^2 + d^2 - R'^2}{4d^2} \times \sqrt{[R'^2 - (d - R)^2] [(d + R)^2 - R'^2]} \end{aligned}$$

car on a :

- $\ell = AB = 2.AH$
- le triangle AHO est rectangle en H alors $d_1 = \sqrt{R^2 - AH^2}$
et $AH = \sqrt{R^2 - d_1^2}$

Résultat 1

$$\mathcal{A}_1 = R^2 \cdot \left(\frac{\alpha}{2}\right) - \frac{R^2 + d^2 - R'^2}{4d^2} \times \sqrt{[R'^2 - (d - R)^2] [(d + R)^2 - R'^2]}$$

où l'angle $\frac{\alpha}{2} = \widehat{AOO'}$ et il est déterminé à partir de son cosinus :

$$\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{R^2 + d^2 - R'^2}{2dR}.$$

Résultat 2

En reprenant la même démarche et en l'appliquant au triangle rectangle AHO' on aura

$$\mathcal{A}_2 = R'^2 \cdot \left(\frac{\beta}{2}\right) - \frac{R'^2 + d^2 - R^2}{4d^2} \times \sqrt{[R^2 - (d - R')^2] [(d + R')^2 - R^2]}$$

où l'angle $\frac{\beta}{2} = \widehat{AO'O}$ et il est déterminé à partir de son cosinus :

$$\cos\left(\frac{\beta}{2}\right) = \frac{R'^2 + d^2 - R^2}{2dR'}.$$

(R et $\frac{\alpha}{2}$ d'une part et R' et $\frac{\beta}{2}$ d'autre part jouent des rôles symétriques dans le triangle AOO' .)

Résultat final

L'aire \mathcal{A} de la surface dans laquelle le chien peut évoluer librement est alors donnée par la formule :

$$\begin{aligned} \mathcal{A} = \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 = R^2 \cdot \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}\right) - \frac{R^2 + d^2 - R'^2}{4d^2} \times \sqrt{[R'^2 - (d - R)^2] [(d + R)^2 - R'^2]} \\ - \frac{R'^2 + d^2 - R^2}{4d^2} \times \sqrt{[R^2 - (d - R')^2] [(d + R')^2 - R^2]} \end{aligned}$$

En poussant nos calculs un peu plus, on vérifie que :

$$\sqrt{[R'^2 - (d - R)^2] [(d + R)^2 - R'^2]} = \sqrt{[R^2 - (d - R')^2] [(d + R')^2 - R^2]}$$

donc

$$\mathcal{A} = R^2 \cdot \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} \right) - \sqrt{[R'^2 - (d - R)^2] [(d + R)^2 - R'^2]} \left(\frac{R^2 + d^2 - R'^2}{4d^2} + \frac{R'^2 + d^2 - R^2}{4d^2} \right)$$

et en fin, on aura :

$$\boxed{\mathcal{A} = R^2 \cdot \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} \right) - \frac{1}{2} \sqrt{[R'^2 - (d - R)^2] [(d + R)^2 - R'^2]}}$$

$$\frac{\alpha}{2} = \widehat{AOO'}, \quad \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{R^2 + d^2 - R'^2}{2dR}, \quad \frac{\beta}{2} = \widehat{AO'O}, \quad \cos\left(\frac{\beta}{2}\right) = \frac{R'^2 + d^2 - R^2}{2dR'}$$

13.2.2 Piste 2 : Et la géométrie analytique, peut-elle nous venir en aide ?

On munit le plan d'un repère orthonormé $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$ où O est le centre du cercle \mathcal{C} et \vec{i} est colinéaire et de même sens que $\overrightarrow{OO'}$

Selon ce repère :

- $O(0, 0)$
- $O'(d, 0)$
- le cercle $\mathcal{C} : x^2 + y^2 = R^2$
- le cercle $\mathcal{C}' : (x - d)^2 + y^2 = R'^2$

i. Détermination de l'abscisse commune de A, B et H

Les coordonnées des points A et B communs à \mathcal{C} et \mathcal{C}' vérifient le système :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = R^2 \\ (x - d)^2 + y^2 = R'^2 \end{cases} \quad \text{qui est équivalent à : } \begin{cases} y^2 = R^2 - x^2 \\ x^2 - (x - d)^2 + R'^2 - R^2 = 0 \end{cases} \quad (2)$$

L'équation (2) de ce dernier système est équivalente à : $2xd - d^2 + R'^2 - R^2 = 0$

donc les points A et B ont une abscisse commune : $x = \frac{R^2 + d^2 - R'^2}{2d}$,

alors c'est aussi l'abscisse du point H , leur projeté orthogonal sur l'axe des abscisses (Notez qu'elle est égale $OH = d_1$ déterminé au paragraphe précédent).

ii. Calcul de l'ordonnée de A

A est un point de \mathcal{C} et il est situé au dessus de l'axe des abscisses alors

$$\begin{aligned}
 y_A &= \sqrt{R^2 - x_A^2} = \sqrt{R^2 - \left(\frac{R^2 + d^2 - R'^2}{2d}\right)^2} \\
 &= \frac{1}{2d} \times \sqrt{4d^2 R^2 - (R^2 + d^2 - R'^2)^2} \\
 &= \frac{1}{2d} \times \sqrt{[(d+R)^2 - R'^2] [R'^2 - (d-R)^2]}
 \end{aligned}$$

iii. Calcul de la distance AH

$$AH = \sqrt{(x_H - x_A)^2 + (y_H - y_A)^2} = y_A - y_H = y_A \text{ car } x_H = x_A \text{ et } y_H = 0$$

$$\text{ainsi d'après ii. ci-dessus, } AH = \frac{1}{2d} \times \sqrt{[(d+R)^2 - R'^2] [R'^2 - (d-R)^2]}$$

iv. Calcul de l'aire \mathcal{A}_t du triangle ABO

$$\begin{aligned}
 \mathcal{A}_t &= \frac{1}{2} \times OH \times 2AH = OH \times AH \\
 &= \frac{R^2 + d^2 - R'^2}{2d} \times \frac{1}{2d} \times \sqrt{[(d+R)^2 - R'^2] [R'^2 - (d-R)^2]} \\
 &= \frac{R^2 + d^2 - R'^2}{4d^2} \times \sqrt{[(d+R)^2 - R'^2] [R'^2 - (d-R)^2]}
 \end{aligned}$$

v. Détermination de l'aire \mathcal{A}_s du secteur circulaire intercepté par l'angle au centre

$$\alpha = \widehat{AOB}$$

on a : $\frac{\alpha}{2} = \widehat{AOO'} = \widehat{AOH}$ dont le cosinus peut être déterminé au moins de 2 manières :

- Méthode 1

$$\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{OH}{OA} = \frac{R^2 + d^2 - R'^2}{2dR} \quad (OA = R)$$

- Méthode 2

$$\vec{OA} \cdot \vec{OH} = OA \cdot OH \cdot \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = OH^2$$

$$\implies \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{OH^2}{OA \cdot OH} \implies \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{OH}{OA} = \frac{OH}{OA} = \frac{R^2 + d^2 - R'^2}{2dR}$$

vi. Détermination de l'aire \mathcal{A}_1 du segment circulaire

$$\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_s - \mathcal{A}_t = R^2 \left(\frac{\alpha}{2}\right) - \frac{R^2 + d^2 - R'^2}{4d^2} \times \sqrt{[(d+R)^2 - R'^2] [R'^2 - (d-R)^2]}$$

On peut vérifier que c'est identique au résultat 1 établi au paragraphe 2.1.1 ci-dessus.

vii. Détermination des aires \mathcal{A}_2 et \mathcal{A}

On laissera au soin du lecteur la tâche de continuer le calcul pour déterminer les expressions de \mathcal{A}_2 et \mathcal{A} et de comparer ses résultats avec ceux des paragraphes 2.1.2 et 2.1.3 ci-dessus.

13.2.3 Piste 3 : le calcul d'intégrale peut-il être un outil efficace puisqu'on a un problème de calcul d'aire ?

On reconsidère le repère orthonormé $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$ défini dans le paragraphe 2.2 ci-dessus (O étant toujours le centre du cercle \mathcal{C}). Selon ce repère :

- $O(0, 0)$
- $O'(d, 0)$
- $M'(d - R', 0)$
- $A(d_1, 0)$ où $d_1 = \frac{R^2 + d^2 - R'^2}{2d}$
- le cercle $\mathcal{C} : x^2 + y^2 = R^2$
- le cercle $\mathcal{C}' : (x - d)^2 + y^2 = R'^2$

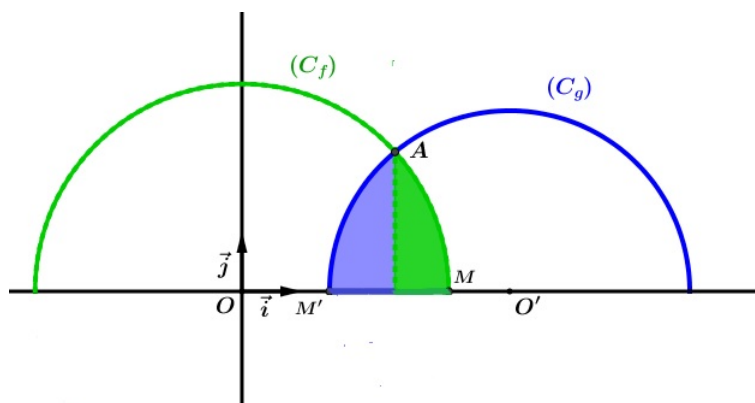


FIGURE 13.5 – L'outil "Intégrale"

- On considère la fonction f dont la courbe représentative (C_f) est le demi-cercle de \mathcal{C} situé au dessus de l'axe des abscisses (Voir figure 5)
la fonction f est définie sur $[-R, R]$ par $f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$
 f est continue sur son domaine de définition donc elle y admet au moins une primitive. On désignera par \mathcal{S}_1 l'aire de la partie du plan limitée par (C_f) , l'axe des abscisses et la droite d'équation : $x = x_A$ (rappelons que $x_A = d_1$)

- On considère la fonctions g dont la courbe représentative (C_g) est le demi-cercle de \mathcal{C}' situé au dessus de l'axe des abscisses (Voir figure 5)
la fonction g est définie sur $[d - R', d + R']$ par $g(x) = \sqrt{R'^2 - (x - d)^2}$
 g est continue sur son domaine de définition donc elle y admet au moins une primitive. On désignera par \mathcal{I}_2 l'aire de la partie du plan limitée par (C_g), l'axe des abscisses et la droite d'équation : $x = x_A$

Pour des raisons de symétrie (l'axe des abscisses passe par les centres des cercles), l'aire \mathcal{A} de la surface abordable par le chien est :

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= 2(\mathcal{I}_1 + \mathcal{I}_2) \\ &= 2\left(\int_{x_A}^{x_M} f(x) dx + \int_{x_{M'}}^{x_A} g(x) dx\right) \\ &= 2\left(\int_{d_1}^R \sqrt{R^2 - x^2} \cdot dx + \int_{d-R'}^{d_1} \sqrt{R'^2 - (x - d)^2} \cdot dx\right) \end{aligned}$$

Le contenu des programmes de l'enseignement secondaire à propos de calcul d'intégrale ne nous permet pas de continuer, on est alors obligé de s'arrêter à ce niveau !

13.3 Application numérique

En ppliant les formules établies dans le paragraphe 2.1.3 ci-dessus (intitulé Résultat final) dans le cas où $R = 1 m$, $R' = 0.75 m$ et $d = 1.5 m$, on trouve :
 $\mathcal{A} \simeq 0.333 m^2$

Chapitre 14

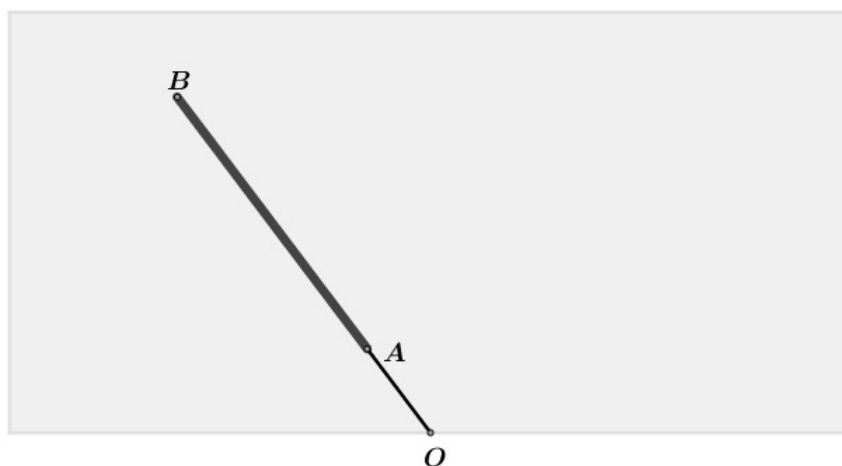
Les essuie - glaces d'une voiture

14.1 Énoncés

Dans ce document, on se propose de calculer l'aire de la surface balayée par trois modèles de balais d'essuie-glace d'un véhicule. On considérera que les pare-brises sont des surfaces planes.

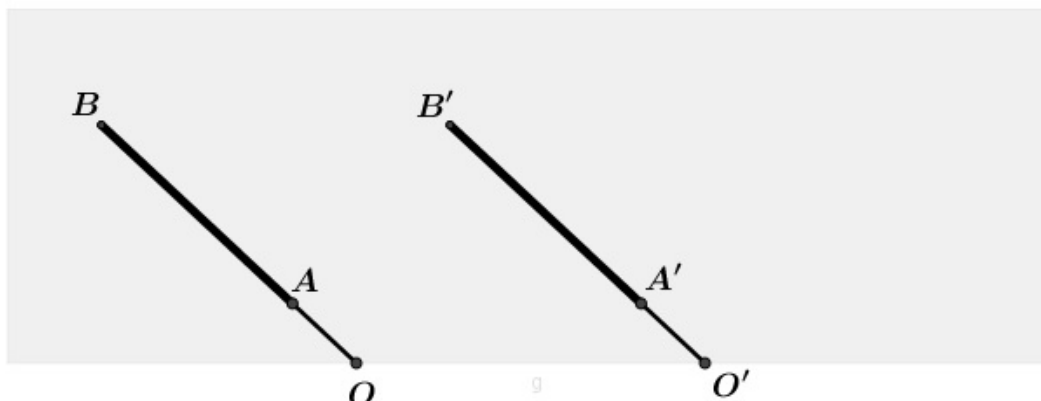
I) Premier modèle

Le véhicule est équipé d'un seul balai porté par une tige métallique de 60 cm , assimilée à un segment $[OB]$. Soit A le point de $[OB]$ tel que la distance $OA = 15\text{ cm}$. Le balai en caoutchouc est alors modélisé par le segment $[AB]$. Déterminer la valeur exacte de l'aire de la surface balayée par le balai, en admettant que celui ci décrit autour du point O un angle de 180° . En donner une valeur approchée au cm^2 près.



II) Deuxième modèle

Le pare-brise du véhicule possède deux essuie-glaces modélisés par deux segments $[OB]$ et $[OB']$ de même longueur R , l'un tournant autour d'un point O , l'autre autour d'un point O' , tels que $OO' = R$ (voir figure ci-dessous).



Le balai en caoutchouc de chacun de ces deux essuie-glaces en couvre une longueur $AB = A'B' = R - r$ à partir du point B (respectivement B'). Chacun des points B et B' décrit un demi-cercle au dessus de la droite (OO') .

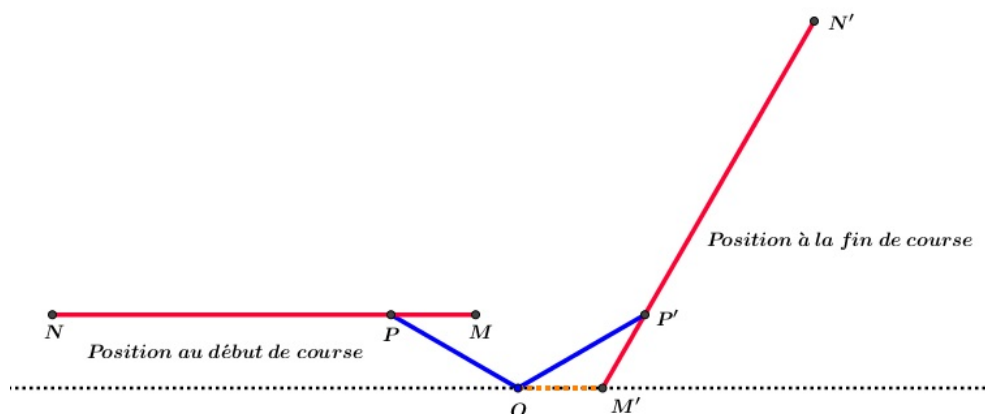
Exprimer l'aire de la surface du pare-brise essuyée par les balais en fonction de R et r . ($0 < r < R$).

Application numérique : donner une valeur approchée de l'aire de la partie du pare-brise non balayée de au cm^2 près dans le cas où $R = 60\text{ cm}$ et $r = 10\text{ cm}$.

III) Troisième modèle

Le véhicule est équipé d'un essuie-glace dont le support métallique est modélisé par la réunion de deux segments : un segment $[AB]$, qui porte le balai en caoutchouc sur toute sa longueur, et un segment $[OC]$ qui relie le centre de rotation O à un point C du segment $[AB]$ tels que $\widehat{OCA} = 30^\circ$, $CB = 4CA$ et $OC = \sqrt{3} \times CA$ (voir figure ci-dessous). On pose $CA = a$.

- (a) Démontrer que le triangle ACO est isocèle.
- (b) Lorsqu'il essuie le pare-brise du véhicule, l'essuie-glace tourne autour du point O . En début de course le balai est en position horizontale : les points A, B et C coïncident respectivement avec les points M, N et P du pare-brise tels que $[MN]$ est horizontal ; en fin de course A, B et C coïncident respectivement avec les points M', N' et P' du pare-brise tels que le segment $[OM']$ est horizontal (voir figure ci-dessous).

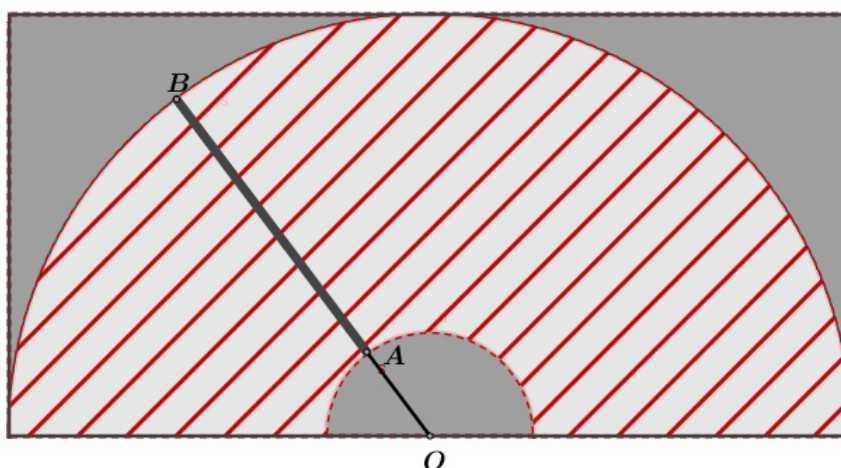


Déterminer l'angle dont a tourné le dispositif autour du point O pour passer d'une position à l'autre, puis exprimer, en fonction de a , l'aire de la surface essuyée par le balai.

14.2 Solution

14.2.1 Premier modèle

- Phase expérimentale
<http://mongeogebra.com/ggbg/2017/03/20/balai1essuiglance/>
- urface balayé



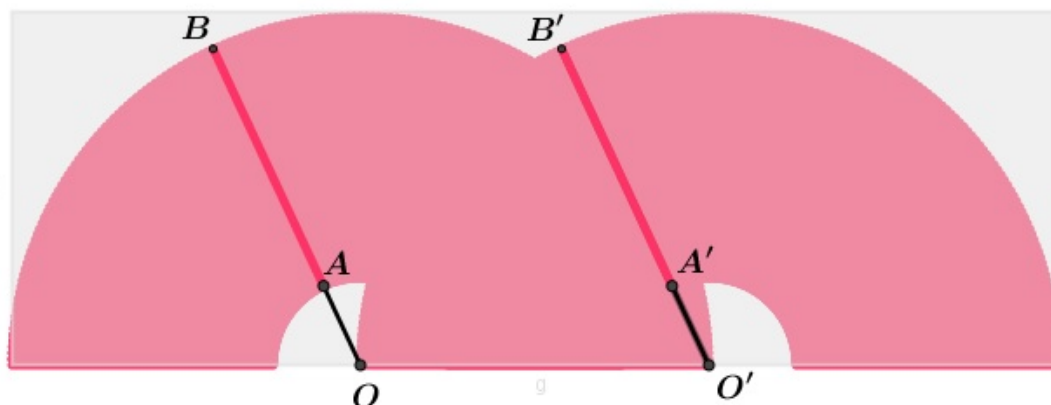
- **Solution** Le balai décrit autour du point O un angle de 180°
alors B décrit un demi-cercle \mathcal{C}_1 de centre O et de rayon 60 cm et A décrit un
demi-cercle \mathcal{C}_2 de centre O et de rayon 15 cm
alors la surface essuyée par le balai est la couronne \mathcal{C} limitée par \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 et

hachurée en rouge dans la figure ci-dessus ; donc l'aire balayée est

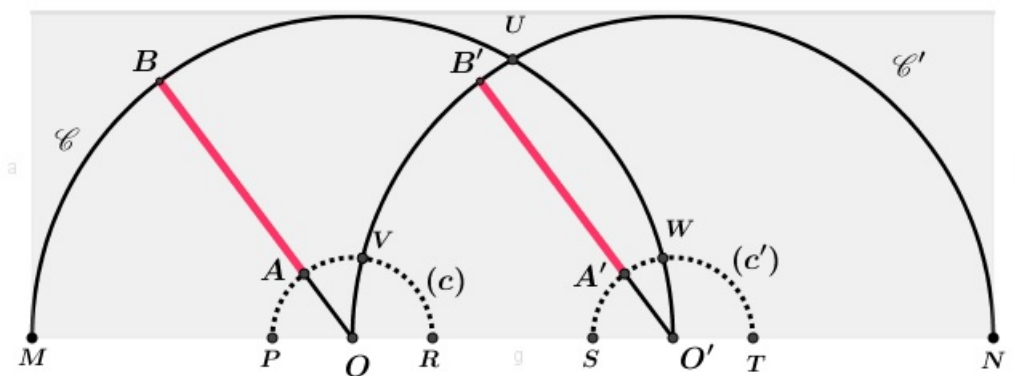
$$\mathcal{A}_e = \frac{1}{2} (\pi \times 60^2 - \pi \times 15^2) = \frac{1}{2} \pi \times 75 \times 45 = \frac{3375}{2} \times \pi \approx 5301 \text{ cm}^2$$

14.2.2 Deuxième modèle

- Phase expérimentale <http://mongeogebra.com/ggbg/2017/01/25/balai2essuieglace/>
- surface balayée



- Solution



Dans la figure ci-dessus, on désigne par :

- \mathcal{D} , le demi-disque délimité par le demi-cercle \mathcal{C} de centre O et de rayon R (il a pour diamètre $[MO']$)
- (d) , le demi-disque délimité par le demi-cercle (c) de centre O et de rayon r (il a pour diamètre $[PR]$)
- \mathcal{D}' , le demi-disque délimité par le demi-cercle \mathcal{C}' de centre O' et de rayon R (il a pour diamètre $[NO]$)

CHAPITRE 14. LES ESSUIE - GLACES D'UNE VOITURE

- (d') , le demi-disque délimité par le demi-cercle (c') de centre O' et de rayon r (il a pour diamètre $[ST]$)
- U , le point d'intersection de \mathcal{C} et \mathcal{C}' .
- V , le point d'intersection de (c) et \mathcal{C}' .
- W , le point d'intersection de (c') et \mathcal{C} .

Dans la suite de ce paragraphe, on désignera par \mathcal{A}_e , l'aire balayée par les deux essuie-glaces et par $\mathcal{A}_\mathcal{E}$, l'aire de toute surface notée \mathcal{E} ; alors :

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= \mathcal{A}_\mathcal{D} + \mathcal{A}_{\mathcal{D}'} - \mathcal{A}_{\mathcal{D} \cap \mathcal{D}'} - (\mathcal{A}_{d'} - \mathcal{A}_{\mathcal{D} \cap d'}) - (\mathcal{A}_d - \mathcal{A}_{\mathcal{D}' \cap d}) \\ &= 2 \times \mathcal{A}_\mathcal{D} - \mathcal{A}_{\mathcal{D} \cap \mathcal{D}'} - 2(\mathcal{A}_{d'} - \mathcal{A}_{\mathcal{D} \cap d'}) \quad \text{car } \mathcal{A}_\mathcal{D} = \mathcal{A}_{\mathcal{D}'} \quad \text{et } \mathcal{A}_d = \mathcal{A}_{d'}\end{aligned}$$

On a :

- $\mathcal{A}_\mathcal{D} = \mathcal{A}_{\mathcal{D}'} = \frac{1}{2}\pi R^2$
- $\mathcal{A}_d = \mathcal{A}_{d'} = \frac{1}{2}\pi r^2$
- $\mathcal{A}_{\mathcal{D} \cap \mathcal{D}'}$?

D'après les formules ci-dessous, établies au chapitre 23, paragraphe 2.1 Résultat final :

$$\mathcal{A}_{\mathcal{D} \cap \mathcal{D}'} = \frac{1}{2} \left(R^2 \cdot \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} \right) - \frac{1}{2} \sqrt{[R'^2 - (d - R)^2] [(d + R)^2 - R'^2]} \right)$$

$$\frac{\alpha}{2} = \widehat{UOO'}, \quad \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{R^2 + d^2 - R'^2}{2dR}, \quad \frac{\beta}{2} = \widehat{U'O'O}, \quad \cos\left(\frac{\beta}{2}\right) = \frac{R'^2 + d^2 - R^2}{2dR'}$$

de plus, on a : $R = R' = OO' = d$, alors le triangle UOO' sera équilatéral

et par suite $\frac{\alpha}{2} = \frac{\beta}{2} = \frac{\pi}{6}$ et ainsi :

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_{\mathcal{D} \cap \mathcal{D}'} &= \frac{1}{2} \left(R^2 \cdot \left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6} \right) - \frac{1}{2} \sqrt{R^2 [(2R)^2 - R^2]} \right) \\ &= R^2 \cdot \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4} R^2 \\ &= \left(\frac{2\pi - 3\sqrt{3}}{12} \right) R^2\end{aligned}$$

- $\mathcal{A}_{\mathcal{D} \cap d'}$?

$$\mathcal{A}_{\mathcal{D} \cap d'} = \frac{1}{2} \left(R^2 \cdot \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} \right) - \frac{1}{2} \sqrt{[R'^2 - (d - R)^2] [(d + R)^2 - R'^2]} \right)$$

$$\frac{\alpha}{2} = \widehat{WOO'}, \quad \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{R^2 + d^2 - R'^2}{2dR}, \quad \frac{\beta}{2} = \widehat{WO'O}, \quad \cos\left(\frac{\beta}{2}\right) = \frac{R'^2 + d^2 - R^2}{2dR'}$$

et puisque $R = OO' = d$ et $R' = r$, on aura

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{\mathcal{D} \cap \mathcal{D}'} &= \frac{1}{2} \left(R^2 \cdot \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} \right) - \frac{1}{2} \sqrt{r^2 [(2R)^2 - r^2]} \right) \\ &= \frac{R^2}{2} \cdot \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} \right) - \frac{r}{4} \sqrt{4R^2 - r^2} \end{aligned}$$

En conclusion :

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= 2 \cdot \mathcal{A}_{\mathcal{D}} - \mathcal{A}_{\mathcal{D} \cap \mathcal{D}'} - 2 \cdot (\mathcal{A}_{\mathcal{D}'} - \mathcal{A}_{\mathcal{D} \cap \mathcal{D}'}) \\ &= 2 \times \frac{1}{2} \pi R^2 - \left(\frac{2\pi - 3\sqrt{3}}{12} \right) R^2 - 2 \left(\frac{1}{2} \pi r^2 - \frac{R^2}{2} \cdot \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} \right) + \frac{r}{4} \sqrt{4R^2 - r^2} \right) \\ &= \left(\frac{5\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} \right) R^2 - \left(\pi r + \frac{1}{2} \sqrt{4R^2 - r^2} \right) r \end{aligned}$$

où :

$$\frac{\alpha}{2} = \widehat{WOO'}, \quad \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{2R^2 - r^2}{2R^2}, \quad \frac{\beta}{2} = \widehat{WO'O}, \quad \cos\left(\frac{\beta}{2}\right) = \frac{r}{2R}$$

Application numérique : On trouve :

$$* \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{71}{72} \implies \frac{\alpha}{2} \simeq 0.167 \text{ rad} \quad \cos\left(\frac{\beta}{2}\right) = \frac{1}{12} \implies \frac{\beta}{2} \simeq 1.487 \text{ rad}$$

* L'aire de la surface balayée est $\mathcal{A} \simeq 10644 \text{ cm}^2$

* L'aire de la surface du pare brise est $\mathcal{A} = 3 \times 60 \times 60 = 10800 \text{ cm}^2$

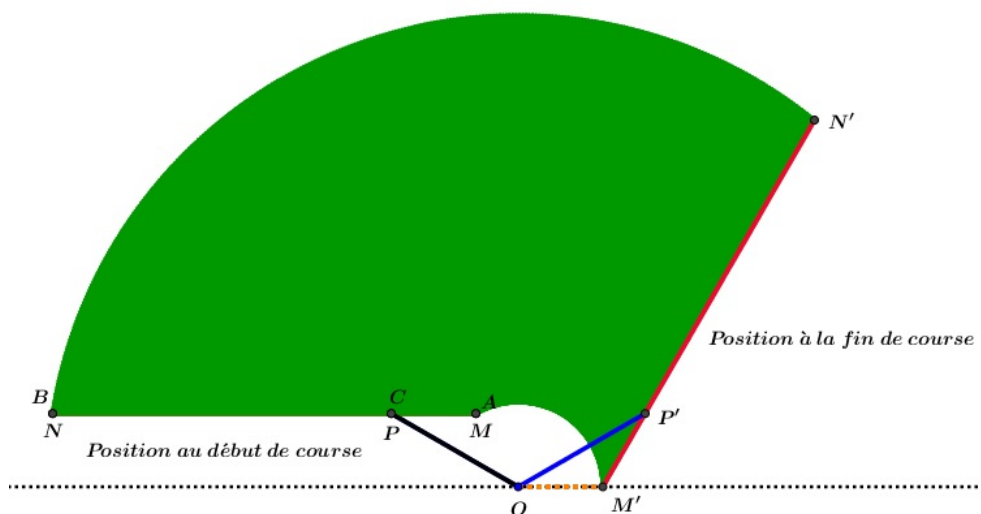
* L'aire de la surface non balayée est alors : $\mathcal{A} \simeq 10800 - 10644 \simeq 156 \text{ cm}^2$

14.2.3 Troisième modèle

- Phase expérimentale

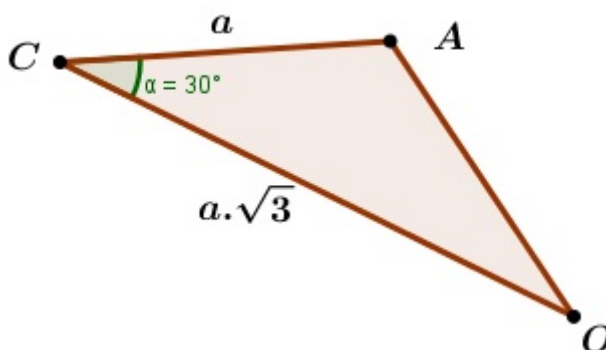
http://mongeogebra.com/ggbg/2017/03/31/balai_articulation/

- Surface balayée



• Solution

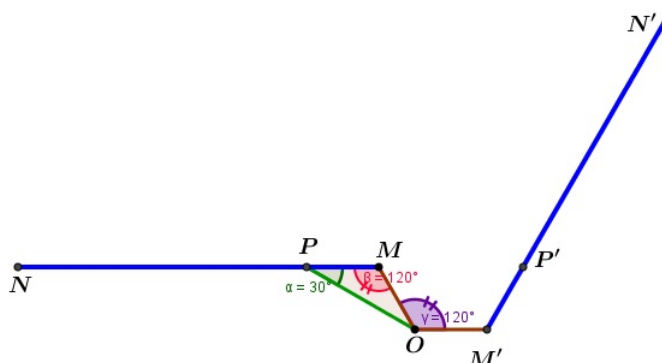
1. L'application du théorème d'AL-Kashi (Loi des cosinus) dans le triangle ACO nous conduit à :



$$\begin{aligned}
 AO^2 &= CA^2 + CO^2 - 2.CA.CO.\cos(\widehat{ACO}) \\
 &= a^2 + 3a^2 - 2\sqrt{3}.a^2.\frac{\sqrt{3}}{2} \\
 &= 4a^2 - 3a^2 \\
 &= a^2
 \end{aligned}$$

ainsi $AO = a = AC$ et par suite le triangle ACO est isocèle en A .

2. Pour éviter la notion d' "angles orientés", assez épineuse pour certains élèves et puisque l'angle de rotation du dispositif est toujours aigu, on désignera cet angle par un angle géométrique, c'est l'angle : $\widehat{POP'} = \widehat{MOM'}$



le triangle MPO est isocèle en M et $\widehat{OPM} = \widehat{OCA} = 30^\circ$
 alors $\widehat{PMO} = 180 - 2 \times 30 = 120^\circ$

D'autre part, en début de course le balai est en position horizontale et en fin de course le segment $[OM']$ est horizontal donc les droites (MP) et $(M'O)$ sont parallèles et coupées par une sécante commune : (MO)

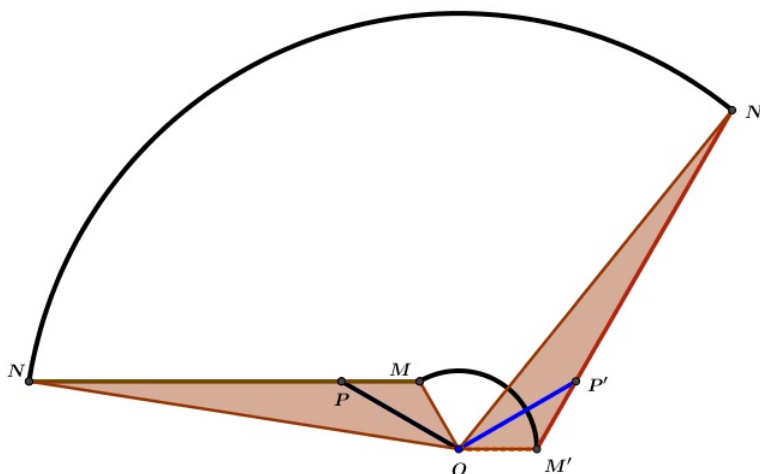
alors $\widehat{MOM'} = \widehat{PMO} = 120^\circ$: ils sont alternes-internes

En conclusion, le dispositif a tourné au tour du point O d'un angle de 120°

Soit \mathcal{A} l'aire de la surface balayée par l'essuie-glace

Les deux triangles MNO et $M'N'O$ ont la même aire (la rotation conserve les distances et en conséquence les aires). Par suite, la surface balayée par l'essuie-glace revient à une surface limitée par l'angle $\widehat{MOM'} = \frac{2\pi}{3}$ et les deux disques $\mathcal{D}_{(O,ON)}$ et $\mathcal{D}'_{(O,OM)}$.

On sait que : $OM = a$, quant à ON , d'après le théorème d'AL-Kashi dans le triangle MNO , on obtient :



$$\begin{aligned} ON^2 &= MO^2 + MN^2 - 2.MO.MN.\cos(\widehat{NMO}) \\ &= a^2 + 25a^2 - 2 \times 5.a^2.\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ &= 31a^2 \end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \frac{1}{2} \times \frac{2\pi}{3}.ON^2 - \frac{1}{2} \times \frac{2\pi}{3}.OM^2 \\ &= \frac{\pi}{3} (ON^2 - OM^2) \\ &= \frac{\pi}{3} (31a^2 - a^2) \\ &= 10.\pi.a^2 \end{aligned}$$

Chapitre 15

Diagonale et quadrant

15.1 Énoncés

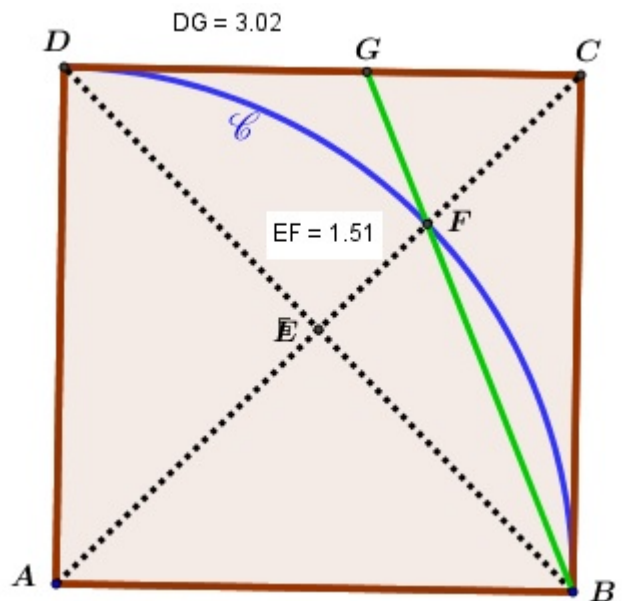
Dans la figure ci-contre :

$ABCD$ est un carré de côté a et de centre E .

\mathcal{C} est l'arc $[BD]$ de centre A .

La diagonale $[AC]$ coupe le quadrant \mathcal{C} en F . La demi-droite $[BF)$ coupe le côté $[CD]$ en G .

Montrer que $DG = 2.EF$

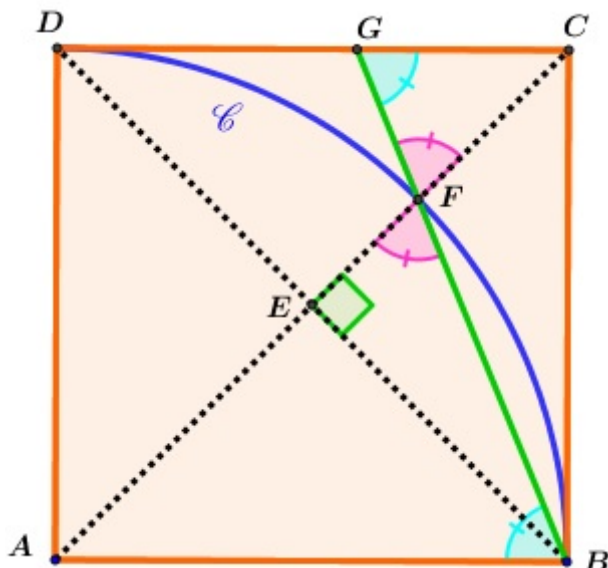


15.2 Expérimentation

<http://mongeogebra.com/ggbg/2017/08/06/quadrdiagonalecar/>

15.3 Solution

15.3.1 1ère méthode



- \widehat{CGF} et \widehat{FBA} sont deux angles alternes-internes déterminés par les parallèles (AB) et (DC) et la sécante (BG) alors :

$$\widehat{CGF} = \widehat{FBA} \quad (c)$$

- \widehat{GFC} et \widehat{AFB} sont deux angles opposés par le sommet alors :

$$\widehat{GFC} = \widehat{AFB} \quad (c)$$

•

$$AF = AB \quad (2 \text{ rayons de } \mathcal{C})$$

\Rightarrow le triangle ABF est isocèle en A

$$\Rightarrow \widehat{AFB} = \widehat{FBA}$$

$$\Rightarrow \widehat{GFC} = \widehat{CGF}$$

\Rightarrow le triangle CGF est isocèle en C

$$\Rightarrow CF = CG \quad (d)$$

•

$$CF = CA - AF$$

$$= a\sqrt{2} - a$$

$$= a(\sqrt{2} - 1)$$

$$= CG \quad \text{d'après } (d)$$

•

$$\begin{aligned}
 EF &= EC - CF \\
 &= a \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - a(\sqrt{2} - 1) \\
 &= a\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \sqrt{2} + 1\right) \\
 &= a\left(\frac{2 - \sqrt{2}}{2}\right)
 \end{aligned}$$

•

$$\begin{aligned}
 DG &= DC - CG \\
 &= a - a(\sqrt{2} - 1) \\
 &= a(1 - \sqrt{2} + 1) \\
 &= a(2 - \sqrt{2}) \\
 &= 2\left[a\left(\frac{2 - \sqrt{2}}{2}\right)\right] \\
 &= 2.EF
 \end{aligned}$$

15.3.2 2ème méthode

•

$$\begin{aligned}
 \widehat{CBG} &= \frac{1}{2} \cdot \widehat{CAB} && \text{(angle inscrit et angle au centre associé)} \\
 &= \frac{\pi}{8} && (1)
 \end{aligned}$$

•

$$\begin{aligned}
 \widehat{CBD} &= \frac{1}{2} \cdot \widehat{DAB} && \text{(angle inscrit et angle au centre associé)} \\
 &= \frac{\pi}{4} && (2)
 \end{aligned}$$

(Ou encore : dans un carré, une diagonale est une bissectrice.)

•

$$\begin{aligned}
 \widehat{EBF} &= \widehat{GBD} = \widehat{CBD} - \widehat{CBG} \\
 &= \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{8} \\
 &= \frac{\pi}{8} && (3)
 \end{aligned}$$

CHAPITRE 15. DIAGONALE ET QUADRANT

En résumé : Les deux triangles EBF et CBG sont rectangles (respectivement en E et C et ont deux autres angles respectivement égaux ($\widehat{EBF} = \widehat{CBG}$) alors ils sont semblables et par suite, on aura :

•

$$\frac{BG}{BF} = \frac{CG}{EF} = \frac{BC}{BE} = \frac{a}{\frac{a\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{2}$$

$$\implies CG = \sqrt{2}.EF \quad (I)$$

• Dans le triangle rectangle EBF , on a :

$$\tan(\widehat{EBF}) = \frac{EF}{EB} = \frac{EF}{\frac{a\sqrt{2}}{2}} \implies EF = \frac{a\sqrt{2}}{2} \times \tan(\widehat{EBF})$$

$$\begin{aligned} EF &= \frac{a\sqrt{2}}{2} \times \tan(\widehat{EBF}) = \frac{a\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sin(\frac{\pi}{8})}{\cos(\frac{\pi}{8})} \\ &= \frac{a\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{\frac{1 - \cos(\frac{\pi}{4})}{2}}}{\sqrt{\frac{1 + \cos(\frac{\pi}{4})}{2}}} = \frac{a\sqrt{2}}{2} \times \sqrt{\frac{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}}} \\ &= \frac{a\sqrt{2}}{2} \times \sqrt{\frac{2 - \sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}}} = \frac{a\sqrt{2}}{2} \times \frac{2 - \sqrt{2}}{\sqrt{2}} \\ &= a \times \frac{(2 - \sqrt{2})}{2} \quad (II) \end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned} DG &= DC - GC = a - \sqrt{2}.EF \quad \text{d'après (I)} \\ &= a - \sqrt{2}.a \times \frac{(2 - \sqrt{2})}{2} \quad \text{d'après (II)} \\ &= a(2 - \sqrt{2}) = 2 \times \frac{a(2 - \sqrt{2})}{2} \\ &= 2 \times EF \quad \text{d'après (II)} \end{aligned}$$

15.3.3 3^{ème} méthode

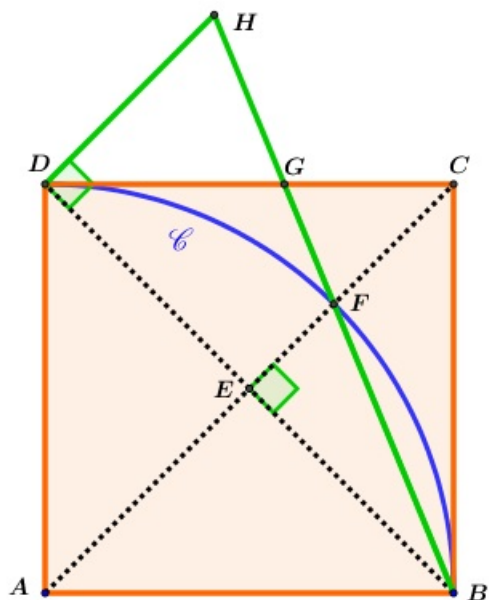


Figure 2.1

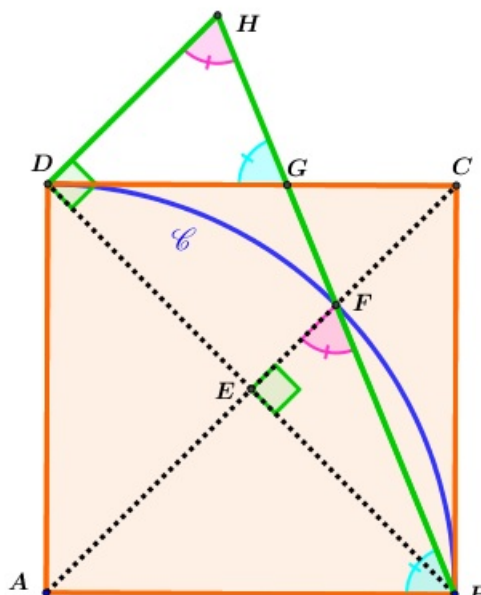


Figure 2.2

•

La parallèle à (AC) qui passe par D coupe la droite (BF) en H }
 d'autre part, (AC) passe par E : le milieu de $[BD]$ } $\implies DH = 2EF$ (a)

(voir figure 2.1 ci-dessus)

- \widehat{EFB} et \widehat{DHB} sont deux angles correspondants déterminés par les parallèles (DH) et (EF) et la sécante (BH) alors :

$$\widehat{EFB} = \widehat{DHB} \quad (b)$$

- \widehat{HGD} et \widehat{HBA} sont deux angles correspondants déterminés par les parallèles (AB) et (DC) et la sécante (BH) alors :

$$\widehat{HGD} = \widehat{HBA} \quad (c)$$

•

$$AF = AB \quad (2 \text{ rayons de } \mathcal{C})$$

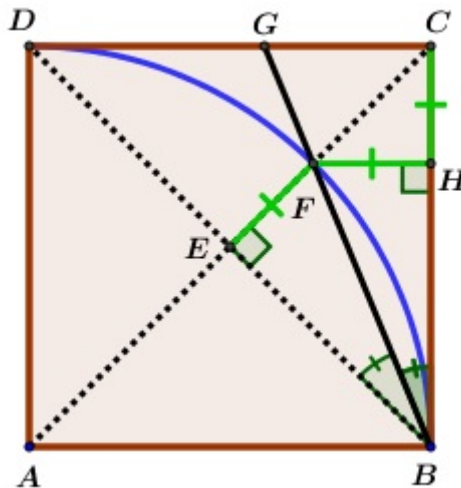
\implies le triangle ABF est isocèle en A

$$\implies \widehat{AFB} = \widehat{FBA}$$

$$\implies \widehat{EFB} = \widehat{HBA} \quad (d)$$

D'après (b), (c) et (d), on déduit que $\widehat{DHB} = \widehat{HGD}$
 alors le triangle DHG est isocèle en D
 alors $DH = DG$
 et d'après (a), on aura : $DG = 2.EF$

15.3.4 4ème méthode



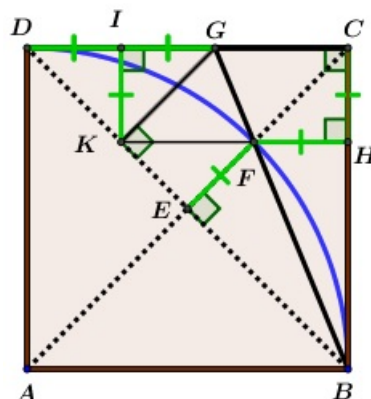
- Soit H le projeté orthogonal de F sur (BC)
 on a E le projeté orthogonal de F sur (BD) } $\implies FE = FH$ (a.1)

- Dans le triangle HCF , on a :

$$\left. \begin{array}{l} \widehat{FHC} = 90^\circ \\ \widehat{FCH} = 45^\circ \end{array} \right\} \implies HCF \text{ est un triangle isocèle en } H$$

$$\implies FH = CH$$

$$\implies EF = FH = CH \quad (a.2)$$



- soit

$$\left. \begin{array}{l} K = (FH) \cap (BD) \\ I \text{ le projeté orthogonal de } K \text{ sur } (CD) \end{array} \right\} \implies CIHK \text{ est un rectangle}$$

(il a trois angles droits)

$$\implies IK = CH \quad (a.3)$$

- Les deux triangles BHF et BCG sont rectangles et ont l'angle en B en commun

alors ils sont semblables donc :

$$\frac{BG}{BF} = \frac{HF}{CG} = \frac{BC}{BH} = \frac{a}{\frac{a\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{2}$$

$$\implies BC = \sqrt{2}.BH \quad (a.4)$$

- Le triangle BHK est isocèle et rectangle en H ($\widehat{BHK} = 90^\circ$ et $\widehat{HBK} = 45^\circ$)

$$\implies BK = \sqrt{2}.BH \quad (a.5)$$

$$\implies BK = BC \quad \text{d'après (a.4) et (a.5)}$$

- Dans les deux triangles BCG et BKG , on a :

$$\left. \begin{array}{l} [BG] \text{ côté commun} \\ BC = BK \\ \widehat{CBG} = \widehat{KBG} \end{array} \right\} \implies \text{ils sont isométriques}$$

$$\implies \widehat{GCB} = \widehat{GKB} = \widehat{GKD} = 90^\circ$$

- Dans le triangle DKG , on a :

$$\left. \begin{array}{l} \widehat{DKG} = 90^\circ \\ \widehat{KDG} = 45^\circ \end{array} \right\} \implies DKG \text{ est un triangle isocèle en } K$$

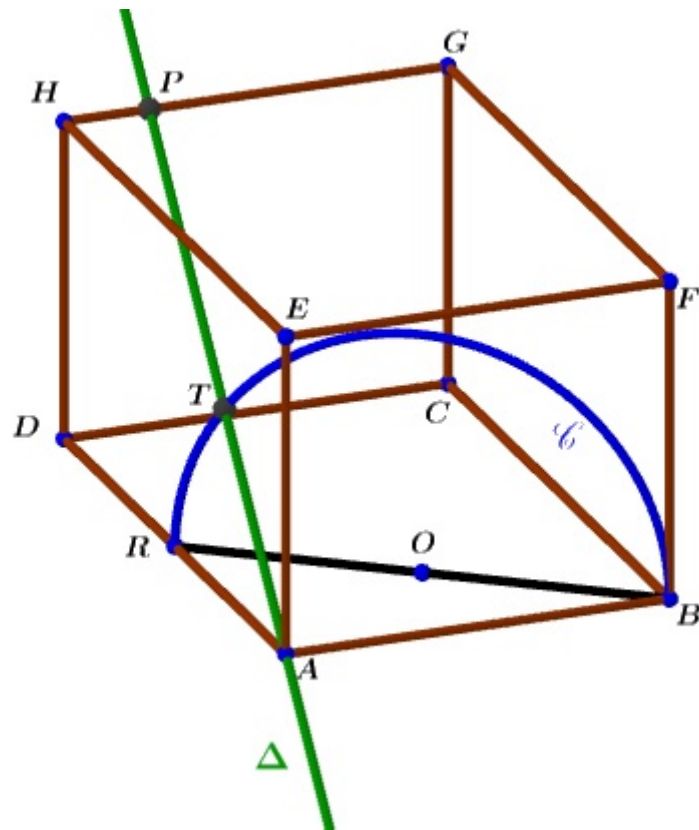
$$\implies DG = 2.IK \quad (\text{L'hypoténuse est un diamètre du cercle circonscrit})$$

$$\implies DG = 2.IK = 2.CH = 2.EF \quad \text{d'après (a.2) et (a.3)}$$

Chapitre 16

Une distance dans l'espace

16.1 Énoncés



Dans la figure ci-dessus :

- $ABCDEFGH$ est un parallépipède rectangle
- R et O sont les milieux respectifs des segments $[AD]$ et $[BR]$
- \mathcal{C} est le demi-cercle de diamètre $[BR]$ inclus dans le plan \mathcal{R} perpendiculaire au plan (ABC) suivant (BR)
- Δ est la droite qui passe par A et coupe \mathcal{C} en un point T et l'arête $[HG]$ en un point P

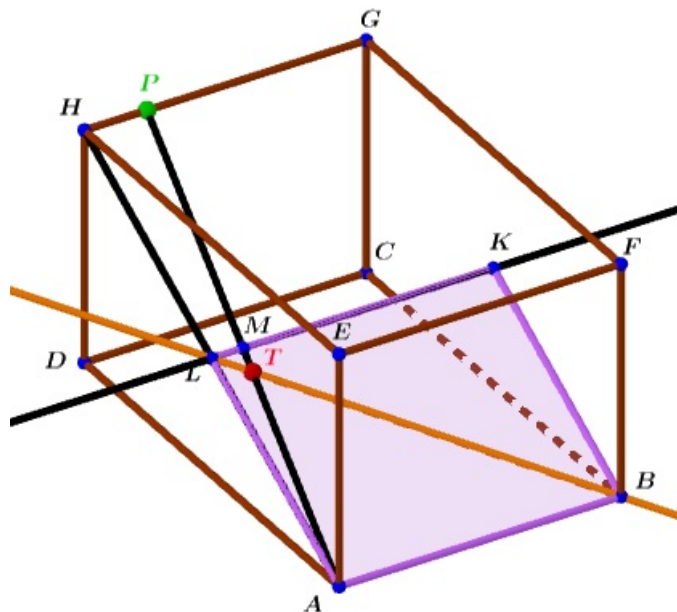


FIGURE 16.3 – Préparation pour le calcul

- On a $(AT) \subset \mathcal{P}$ et L et K sont les milieux respectifs de $[AH]$ et $[BG]$ donc $(LK) \subset \mathcal{P}$
 (AT) et (KL) sont sécantes, soit M leur point d'intersection (Voir Figure 3).
- Dans le plan \mathcal{P} , les deux parallèles (LM) et (AB) sont coupées par (AM) et (BL) , d'après Thalès :

$$\frac{TL}{TB} = \frac{TM}{TA} = \frac{LM}{AB}$$

$$\frac{TL}{TB} = \frac{LM}{AB} \quad (1)$$

- Dans le triangle ADH , on a :

$$\left. \begin{array}{l} R = A * D \\ (RL) \parallel (DH) \end{array} \right\} \Rightarrow RL = \frac{1}{2}DH = \frac{10}{3} \quad (2)$$

- le triangle ABR est rectangle en A (Voir figure 1) alors

$$BR = \sqrt{AB^2 + AR^2} = \sqrt{64 + 36} = 10$$

le triangle BLR est rectangle en R alors

$$BL = \sqrt{BR^2 + LR^2} = \sqrt{100 + \frac{100}{9}} = \frac{10 \cdot \sqrt{10}}{3}$$

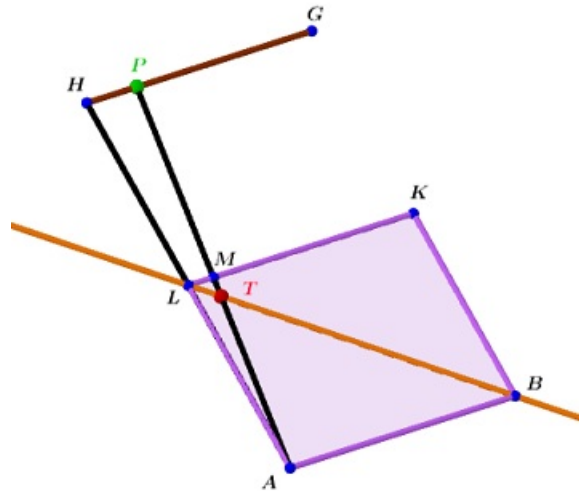


FIGURE 16.4 – Dans le plan \mathcal{P}

$$\sin(\widehat{LBR}) = \sin(\widehat{TBR}) = \frac{RL}{BL} = \frac{\frac{10}{3}}{\frac{10\sqrt{10}}{3}} = \frac{\sqrt{10}}{10}$$

le triangle BTR est rectangle en T alors

$$\begin{aligned} \sin(\widehat{TBR}) &= \frac{\sqrt{10}}{10} = \frac{RT}{RB} = \frac{RT}{10} \\ \implies RT &= \sqrt{10} \\ \implies BT &= \sqrt{RB^2 - RT^2} = \sqrt{100 - 10} = 3\sqrt{10} \\ T \in [BL] \implies LT &= BL - BT = \frac{10\sqrt{10}}{3} - 3\sqrt{10} = \frac{\sqrt{10}}{3} \end{aligned} \quad (3)$$

- En revenant à l'égalité (1) : $\frac{TL}{TB} = \frac{LM}{AB}$, on aura

$$\begin{aligned} \implies \frac{\frac{\sqrt{10}}{3}}{3\sqrt{10}} &= \frac{LM}{8} \quad \text{d'après (2) et (3)} \\ \implies LM &= \frac{8\sqrt{10}}{3} \times \frac{1}{3\sqrt{10}} = \frac{8}{9} \end{aligned} \quad (4)$$

- (AH) et (AP) sont coupées par les deux parallèles (LK) et (HG) , d'après Thalès :

$$\begin{aligned} \frac{AL}{AH} = \frac{AM}{AP} = \frac{LM}{HP} \quad \text{et on a : } L = A * H \implies \frac{AL}{AH} &= \frac{1}{2} \\ \implies \frac{LM}{HP} &= \frac{1}{2} \\ \implies HP &= 2.LM = 2 \times \frac{8}{9} = \frac{16}{9} \quad \text{d'après (4)} \end{aligned}$$

Chapitre 17

Une belle application de l'homothétie

17.1 Rappels

17.1.1 Définition d'une homothétie

Étant donné, un point I et un réel non nul k , on appelle homothétie de centre I et de rapport k qu'on note $h_{(I,k)}$, l'application qui à chaque point M du plan associe le point M' défini par :

$$\overrightarrow{IM'} = k \cdot \overrightarrow{IM}$$

17.1.2 Définition analytique

Dans un plan muni d'un repère $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère un point quelconque $M(x, y)$ et son image $M'(x', y')$ par une homothétie $h_{(I,k)}$ où $I(x_0, y_0)$

$$\overrightarrow{IM'} = k \cdot \overrightarrow{IM}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x' - x_0 = k \cdot (x - x_0) \\ y' - y_0 = k \cdot (y - y_0) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x' = k \cdot x + (1 - k)x_0 \\ y' = k \cdot y + (1 - k)y_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' = \frac{x - x_0}{2} \\ y' = \frac{y - y_0}{2} \end{cases} \quad (\text{si } k = \frac{1}{2})$$

17.2 Homothéties itérées

On considère un triangle équilatéral $S_1S_2S_3$ et un point à l'intérieur de ce triangle.

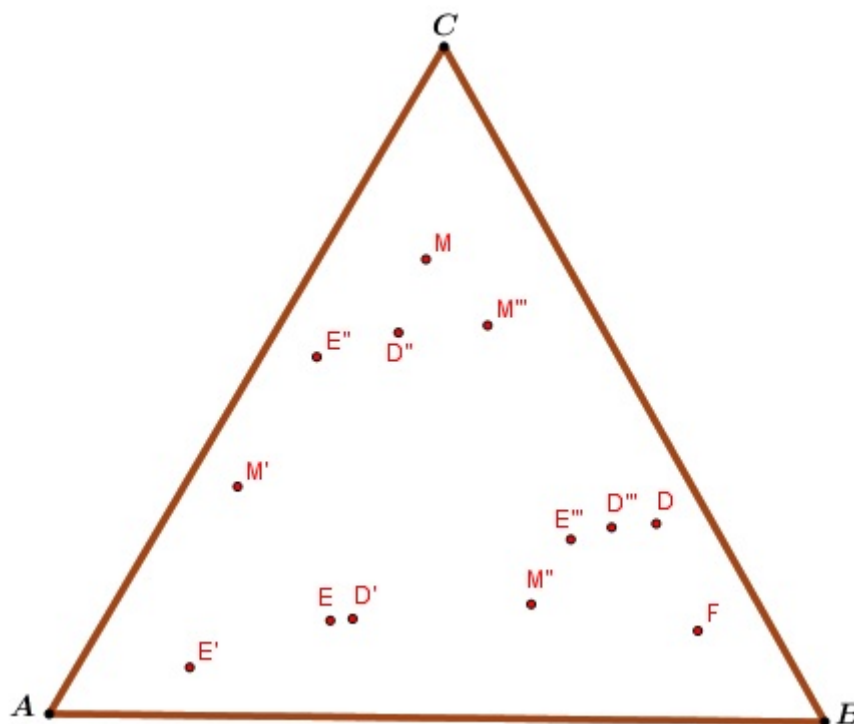
1. On choisit, de façon aléatoire, l'un des sommets $S_i, i \in \{1, 2, 3\}$ de ce triangle

CHAPITRE 17. UNE BELLE APPLICATION DE L'HOMOTHÉTIE

2. on construit l'image M' de M par l'homothétie $h = h_{(S_i, \frac{1}{2})}$ (M étant le point choisi à l'intérieur de ce triangle $S_1S_2S_3$).
3. On itère indéfiniment l'étape 2 ci-dessus et pour toute itération, on prendra comme antécédent l'image obtenue à l'issue de l'itération qui la précède : autrement dit, dans la j ème itération, on construit l'image de M par $\underbrace{h \circ h \circ h \circ h \circ \dots \circ h}_j$: j fois.

Attention : La notation commune à toutes ces homothéties (h) ne signifie pas qu'elles sont toutes identiques : elles peuvent différer par leurs centres.

17.3 Expérimentation manuelle



Dans cette construction "manuelle" (point par point), on est parti d'un point M à l'intérieur du triangle ABC , on a construit son image par l'homothétie $h_{(A,0.5)}$, on a eu M' qu'on a construit son image par l'homothétie $h_{(B,0.5)}$, on a eu M'' a construit son image par ... :

$$M \xrightarrow{h_A} M' \xrightarrow{h_B} M'' \xrightarrow{h_C} M''' \xrightarrow{h_B} D \xrightarrow{h_A} D' \xrightarrow{h_C} D''$$

et on a continué :

$$D'' \xrightarrow{h_B} D''' \xrightarrow{h_A} E \xrightarrow{h_A} E' \xrightarrow{h_C} E'' \xrightarrow{h_B} E''' \xrightarrow{h_B} F \xrightarrow{h_A} \dots$$

NB : Pour alléger les notations et puisque toutes les homothéties considérées ont le même rapport : 0.5, on s'est contenté de préciser le centre. Exemples :

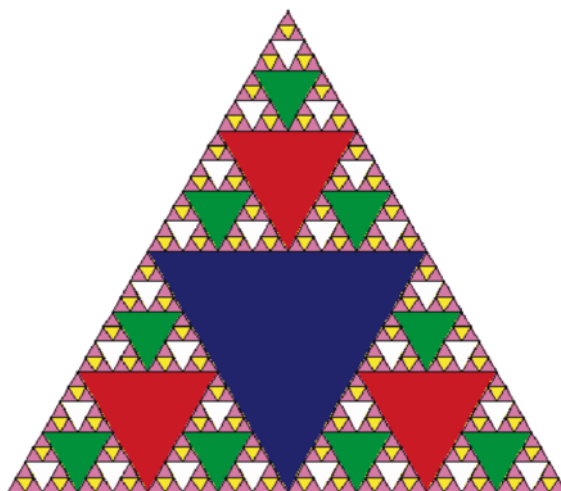
h_A : désigne l'homothétie $h_{(A,0.5)}$

h_B : désigne l'homothétie $h_{(B,0.5)}$

17.4 Le triangle de Sierpiński

17.4.1 Définition

Le triangle de Sierpiński¹, appelé aussi : tamis de Sierpinski est une figure fractale obtenue en suivant les trois étapes décrites dans le paragraphe : **2 Homothéties itérées**

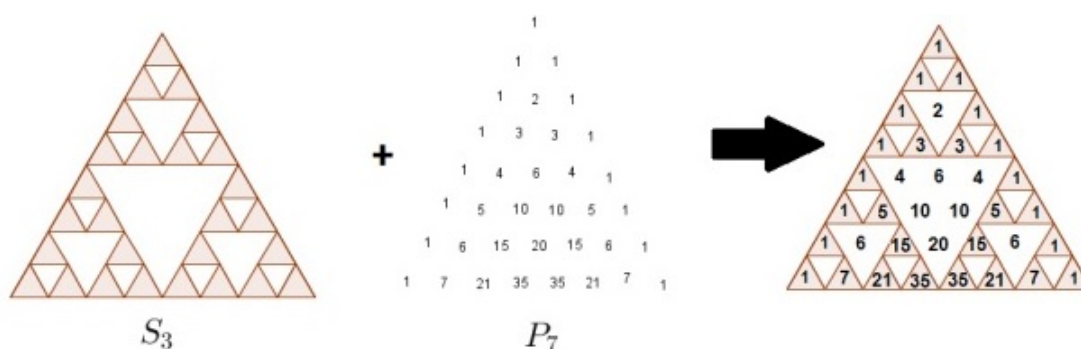
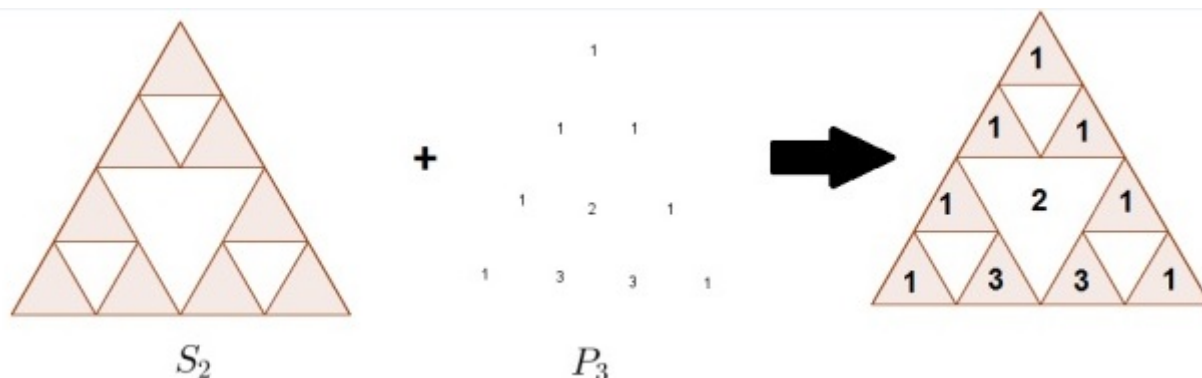


17.4.2 Le triangle de Sierpinski et le triangle de Pascal

Le triangle de Sierpinski a un lien inattendu avec celui de Pascal, visualisé sur la figure ci-dessous :

1. Waclaw Fransizek Sierpinski est né à Varsovie, en Pologne, le 14 mars 1882. Il fait ses études dans sa ville natale. Il reçoit ensuite son doctorat en 1908, et devient professeur à l'université de Lvov. Il y consacre alors ses recherches à la théorie des nombres. Il obtient en 1919 un poste à l'université de Varsovie où il y restera jusqu'à sa mort. Entre temps, il aura écrit plus de 700 articles et 50 livres dont "La théorie des nombres irrationnels" (1910), "La théorie des nombres" (1912). et par-dessus tout, les premiers objets fractals. Sierpinski fonde également une école mathématique polonaise en créant la revue mathématique "Fundamenta mathematicae" (1920), encore présente aujourd'hui !

CHAPITRE 17. UNE BELLE APPLICATION DE L'HOMOTHÉTIE

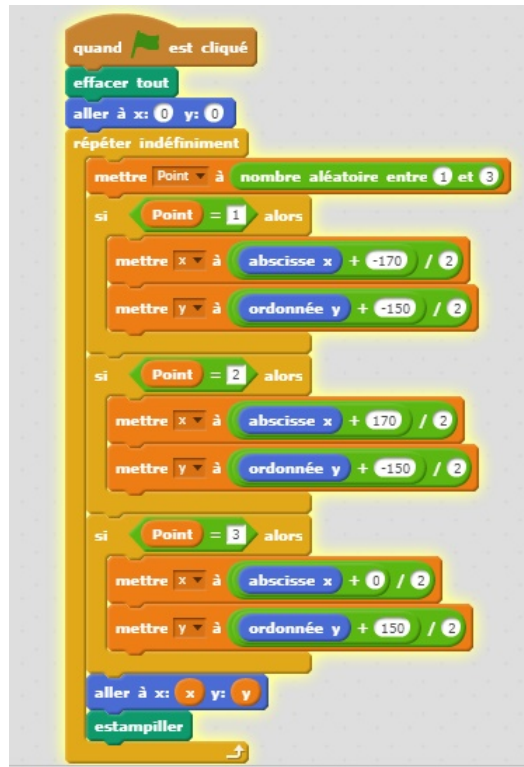


On remarque que tous les petits triangles de S_n sont occupés par des coefficients binomiaux impairs et aucun coefficient impair n'est en dehors d'un petit triangle. On constate donc que pour tout $n \geq 1$, le triangle S_n correspond au triangle de Pascal P_{2^n-1} dans lequel on a retiré tous les coefficients binomiaux qui sont pairs. (Ces constatations ne sont pas encore prouvées).

<https://blogdemaths.wordpress.com/2013/07/16/sierpinski-et-pascal-sont-dans-un-triangle/>

17.4.3 Script de construction et construction d'un triangle de Sierpinski avec Scratch

Le script



Vidéo illustrant l'exécution du script

<https://youtu.be/Gv1KXxslxbM>

Chapitre 18

Deux cercles isométriques inscrits dans un triangle

18.1 Énoncés

1. Montrer que pour tout $a \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} + k'\pi \ (k, k' \in \mathbb{Z})\}$, on a :

$$\tan(2a) = \frac{2 \tan(a)}{1 - \tan^2(a)}$$

2. ABC est un triangle rectangle en B et de côtés $BA = 3$, $BC = 4$ ("Figure 1")
 \mathcal{C} et \mathcal{C}' sont deux cercles de même rayon r , de centres respectifs O et O' et tels que :

- \mathcal{C} est tangent à (AB) , (AC) et à \mathcal{C}'
- \mathcal{C}' est tangent à (CB) , (CA) et à \mathcal{C}

Calculer le rayon r de \mathcal{C} et \mathcal{C}' .

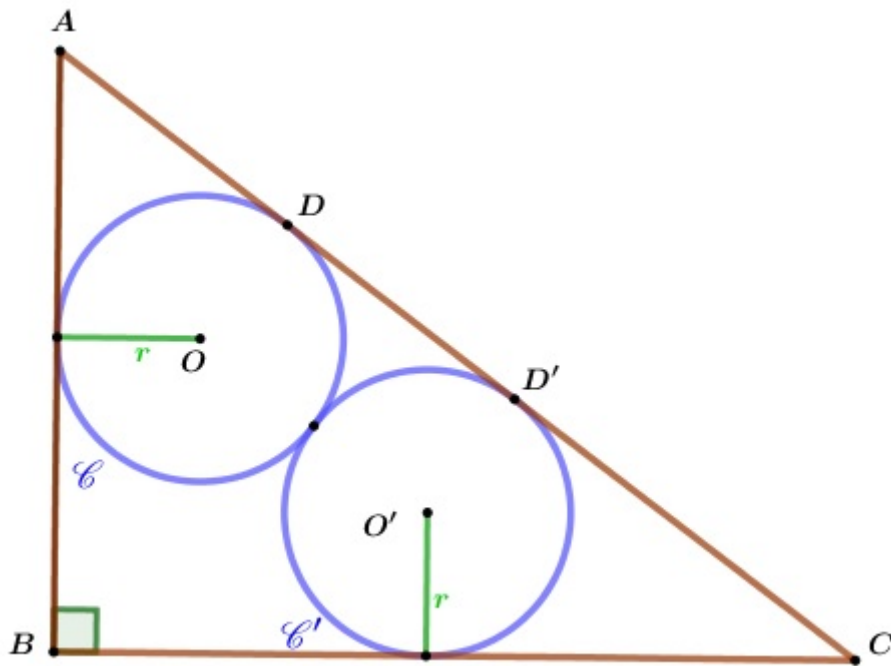
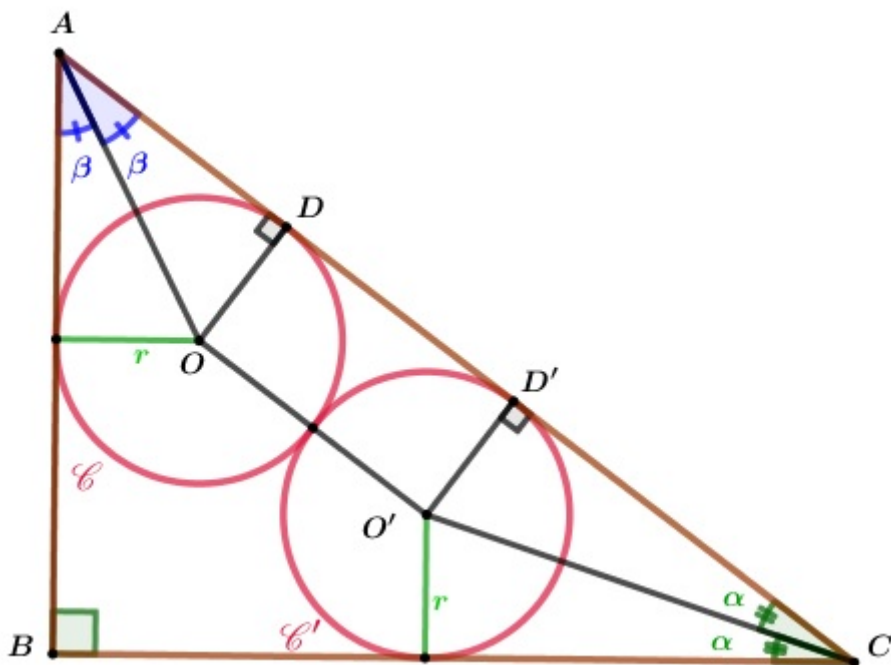


FIGURE 18.1 – Énoncés

18.2 Solution



Dans toute la suite, on désignera par :

- D , le point de contact de \mathcal{C} et (AC)
- D' , le point de contact de \mathcal{C}' et (AC)

CHAPITRE 18. DEUX CERCLES ISOMÉTRIQUES INSCRITS DANS UN TRIANGLE

- β , chacun des angles \widehat{DAO} et \widehat{BAO}
- α , chacun des angles $\widehat{D'CO'}$ et $\widehat{BCO'}$

18.2.1 1ère méthode

1ère étape :

- Dans le triangle rectangle ABC , on a :

$$\begin{aligned}\tan(\widehat{BAC}) &= \frac{BC}{BA} \\ \tan(2\beta) &= \frac{4}{3} \\ \frac{2 \tan(\beta)}{1 - \tan^2(\beta)} &= \frac{4}{3} \\ 4 \tan^2(\beta) + 6 \tan(\beta) - 4 &= 0 \quad (E) \\ (E) \Leftrightarrow 4t^2 + 6t - 4 &= 0 \quad (\text{On a posé } t = \tan(\beta) \text{ dans } (E)) \\ \Delta &= 100\end{aligned}$$

alors $\tan(\beta) = \frac{1}{2}$ (1) ou $\tan(\beta) = -2 < 0$: à rejeter car β est aigu

- Dans le triangle rectangle AOD , on a :

$$\begin{aligned}\tan(\widehat{OAD}) &= \frac{OD}{AD} \\ \tan(\beta) &= \frac{r}{AD} \\ \frac{r}{AD} &= \frac{1}{2} \quad (\text{d'après (1)}) \\ AD &= 2r\end{aligned}$$

2ème étape :

- Dans le triangle rectangle ABC , on a :

$$\begin{aligned}\tan(\widehat{ACB}) &= \frac{AB}{BC} \\ \tan(2\alpha) &= \frac{3}{4} \\ \frac{2 \tan(\alpha)}{1 - \tan^2(\alpha)} &= \frac{3}{4} \\ 3 \tan^2(\alpha) + 8 \tan(\alpha) - 3 &= 0 \quad (E') \\ (E') \Leftrightarrow 3t^2 + 8t - 3 &= 0 \quad (\text{On a posé } t = \tan(\alpha) \text{ dans } (E')) \\ \Delta &= 100\end{aligned}$$

alors $\tan(\alpha) = \frac{1}{3}$ (2) ou $\tan(\alpha) = -3 < 0$: à rejeter car α est aigu

CHAPITRE 18. DEUX CERCLES ISOMÉTRIQUES INSCRITS DANS UN TRIANGLE

- Dans le triangle rectangle $CO'D'$, on a :

$$\begin{aligned}\tan(\widehat{O'CD'}) &= \frac{O'D'}{CD'} \\ \tan(\alpha) &= \frac{r}{CD'} \\ \frac{r}{CD'} &= \frac{1}{3} \quad (\text{d'après (2)}) \\ CD' &= 3r\end{aligned}$$

3ème étape :

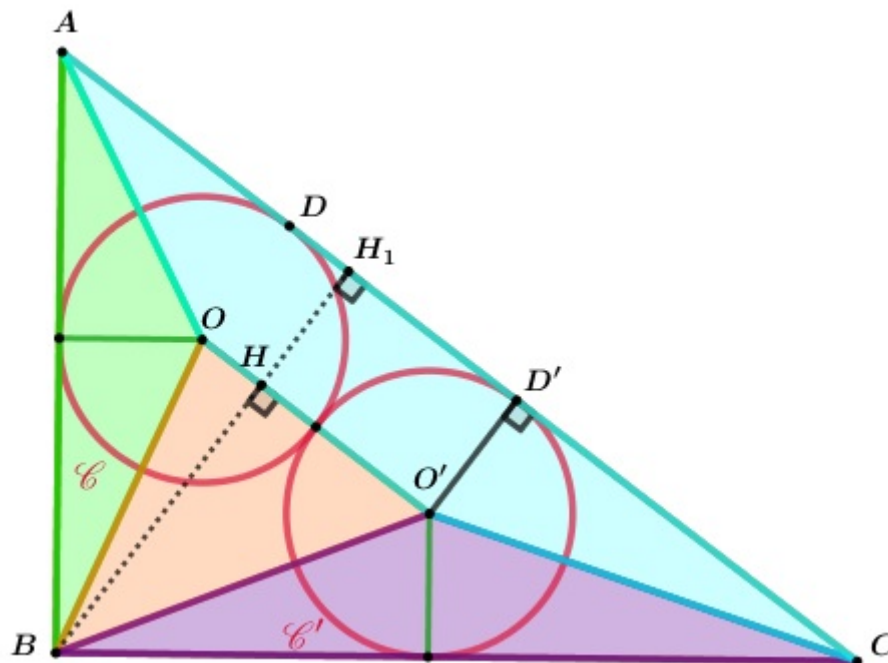
- On a : $[OD]$ et $[O'D']$ sont parallèles et isométriques
alors le quadrilatère $OO'D'D$ est un rectangle (parallélogramme qui a un angle droit)
par suite $DD' = OO' = 2r$ (\mathcal{C} et \mathcal{C}' sont tangents extérieurement)
- Dans le triangle rectangle ABC , on a :

$$\begin{aligned}AC^2 &= BA^2 + BC^2 \\ &= 3^2 + 4^2 \\ &= 25 \\ \implies AC &= 5\end{aligned}$$

- On a : $D, D' \in [AC]$ alors :

$$\begin{aligned}AC &= AD + DD' + D'C \\ 5 &= 2r + 2r + 3r \\ 5 &= 7r \\ \implies r &= \frac{5}{7}\end{aligned}$$

18.2.2 2ème méthode



Dans toute la suite, on désignera par :

- \mathcal{A}_{ABC} , l'aire du triangle ABC
- \mathcal{A}_{AOB} , l'aire du triangle AOB
- $\mathcal{A}_{BOO'}$, l'aire du triangle BOO'
- $\mathcal{A}_{BO'C}$, l'aire du triangle $BO'C$
- $\mathcal{A}_{AOO'C}$, l'aire du trapèze $AOO'C$

Il en découle et en tenant compte de certains résultats prouvés dans la sous-section : "1ère méthode" que :

- $\mathcal{A}_{ABC} = \frac{AB \times BC}{2} = \frac{3 \times 4}{2} = 6$
- $\mathcal{A}_{AOB} = \frac{AB \times r}{2} = \frac{3 \times r}{2}$
- $\mathcal{A}_{BOO'} = \frac{OO' \times BH}{2}$
- $\mathcal{A}_{BO'C} = \frac{BC \times r}{2} = \frac{4 \times r}{2} = 2.r$
- $\mathcal{A}_{AOO'C} = \frac{(AC + OO') \times O'D'}{2} = \frac{(5 + 2.r) \times r}{2} = r^2 + \frac{5 \times r}{2}$

CHAPITRE 18. DEUX CERCLES ISOMÉTRIQUES INSCRITS DANS UN TRIANGLE

- $\mathcal{A}_{BOO'}$?

Soit H et H_1 les projetés orthogonaux de B respectivement sur OO' et (AC)

$$\text{alors } BH = BH_1 - HH_1 = \frac{AB \times BC}{AC} - OO' = \frac{3 \times 4}{5} - r = \frac{12}{5} - r$$

$$\text{alors } \mathcal{A}_{BOO'} = \frac{OO' \times BH}{2} = \frac{2.r \times (\frac{12}{5} - r)}{2} = \frac{12}{5}.r - r^2$$

Et puisqu'on a :

$$\mathcal{A}_{AOB} + \mathcal{A}_{BOO'} + \mathcal{A}_{BO'C} + \mathcal{A}_{AOO'C} = \mathcal{A}_{ABC}$$

ainsi on aura :

$$\frac{3 \times r}{2} + \frac{12}{5}.r - r^2 + 2.r + r^2 + \frac{5 \times r}{2} = 6$$

$$\frac{42}{5}.r = 6$$

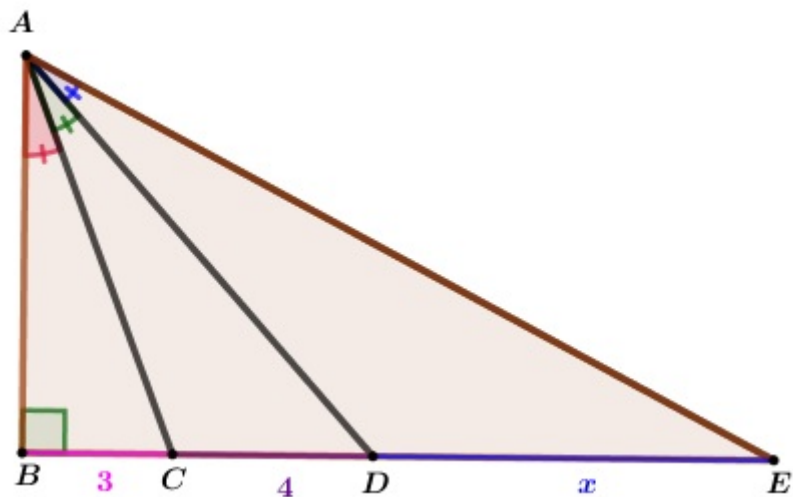
$$r = 6 \times \frac{5}{42}$$

$$r = \frac{5}{7}$$

Chapitre 19

Segments découpés par des angles égaux

19.1 Énoncés



Dans la figure ci-dessus :

- ABE est un triangle rectangle en B
- $\widehat{BAC} = \widehat{CAD} = \widehat{DAE}$
- $BC = 3$, $CD = 4$ et $DE = x$

1. Calculer la distance DE .
2. Proposer une méthode pour faire une figure où les données seront respectées.

19.2 Solution

19.2.1 Méthode 1 (Théorèmes de la bissectrice et de Pythagore)

- Dans le triangle rectangle ABD , $[AC)$ est la bissectrice de \widehat{BAD}

$$\implies \begin{cases} AD^2 = 7^2 + AB^2 \\ \frac{AD}{AB} = \frac{CD}{CB} \end{cases}$$

$$\implies \begin{cases} AD^2 = 7^2 + AB^2 \\ \frac{AD}{AB} = \frac{4}{3} \end{cases}$$

$$\implies \begin{cases} \frac{16}{9}AB^2 = 7^2 + AB^2 \\ AD = \frac{4}{3} \cdot AB \end{cases}$$

$$\implies \begin{cases} AB = 3 \cdot \sqrt{7} \\ AD = 4 \cdot \sqrt{7} \end{cases}$$

- Le triangle ABC est rectangle en B

$$\implies AC^2 = BC^2 + BA^2 = 9 \times 7 + 9 = 72$$

$$\implies AC = 6 \cdot \sqrt{2}$$

- Dans le triangle ACE , $[AD)$ est la bissectrice de \widehat{CAE}

$$\implies \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{DC}$$

$$\implies AE = \frac{3x\sqrt{2}}{2}$$

- Le triangle ABE est rectangle en B

$$\implies AE^2 = BE^2 + BA^2 = 63 + (7+x)^2$$

$$\implies \frac{9x^2}{2} = x^2 + 14x + 112$$

$$\implies x^2 - 4x - 32 = 0 \quad (x > 0)$$

$$\implies (x-2)^2 - 36 = 0 \quad (\text{Méthode qui ne fait pas appel aux équations du 2nd degré})$$

$$\implies \begin{cases} x - 2 = 6 \\ \text{ou} \\ x - 2 = -6 \end{cases}$$

$$\implies \begin{cases} x = 8 \\ \text{ou} \\ x = -4 < 0 : \text{ à rejeter} \end{cases}$$

$$\implies \boxed{x = 8}$$

19.2.2 Méthode 2 (Trigonométrie : rapports dans un triangle rectangle et formules d'addition)

Dans toute la suite, α désignera l'un quelconque des angles non nuls et non droits \widehat{BAC} , \widehat{CAD} , \widehat{DAE}

- – ABC est un triangle rectangle en B
 $\implies \tan(\alpha) = \frac{3}{AB}$
- ABD est un triangle rectangle en B

$$\begin{aligned} \implies \tan(2\alpha) &= \frac{7}{AB} = \frac{2 \times \frac{3}{AB}}{1 - \frac{9}{AB^2}} && \left(\tan(2\alpha) = \frac{2 \cdot \tan(\alpha)}{1 - \tan(\alpha)^2} \right) \\ &\implies \frac{7}{AB} = \frac{6 \cdot AB}{AB^2 - 9} \\ &\implies AB^2 = 63 \\ &\implies AB = 3\sqrt{7} \end{aligned}$$

- – ABE est un triangle rectangle en B
 $\implies \sin(3\alpha) = \frac{7+x}{AE} = \sin(2\alpha) \times \cos(\alpha) + \cos(2\alpha) \times \sin(\alpha)$
- D'autre part, $AE = \sqrt{(7+x)^2 + 63} = \sqrt{x^2 + 14x + 112}$
 $\implies \frac{7+x}{\sqrt{x^2 + 14x + 112}} = \sin(2\alpha) \times \cos(\alpha) + \cos(2\alpha) \times \sin(\alpha) \quad (1)$
- – ABC est un triangle rectangle en B

$$\implies \begin{cases} AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = 6\sqrt{2} \\ \cos(\alpha) = \frac{AB}{AC} = \frac{3\sqrt{7}}{6\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{14}}{4} & (2) \\ \sin(\alpha) = \frac{BC}{AC} = \frac{3}{6\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4} & (3) \end{cases}$$

- ABD est un triangle rectangle en B

$$\implies \begin{cases} AD = \sqrt{AB^2 + BD^2} = 4\sqrt{7} \\ \cos(2\alpha) = \frac{AB}{AD} = \frac{3\sqrt{7}}{4\sqrt{7}} = \frac{3}{4} & (4) \\ \sin(2\alpha) = \frac{BD}{AD} = \frac{7}{4\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{7}}{4} & (5) \end{cases}$$

- D'après les résultats : (2), (3), (4) et (5), l'équation(1) est équivalente à :

$$\begin{aligned} \frac{7+x}{\sqrt{x^2 + 14x + 112}} &= \frac{\sqrt{7}}{4} \times \frac{\sqrt{14}}{4} + \frac{3}{4} \times \frac{\sqrt{2}}{4} \\ &= \frac{5\sqrt{2}}{8} \end{aligned}$$

CHAPITRE 19. SEGMENTS DÉCOUPÉS PAR DES ANGLES ÉGAUX

$$\frac{(7+x)^2}{x^2+14x+112} = \frac{25}{32}$$

$$x^2+14x-176=0$$

$$\Delta' = 49 + 176 = 225 = 15^2$$

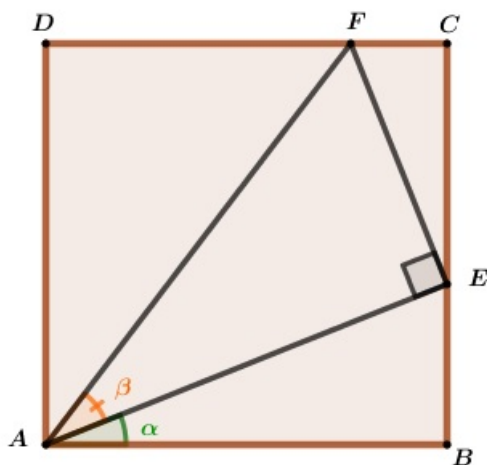
$$\Rightarrow \begin{cases} x = -7 + 15 = 8 \\ \text{ou} \\ x = -7 - 8 = 15 < 0 : \quad \text{à rejeter} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{x = 8}$$

Chapitre 20

Tangente de la somme de 2 angles

20.1 Énoncés

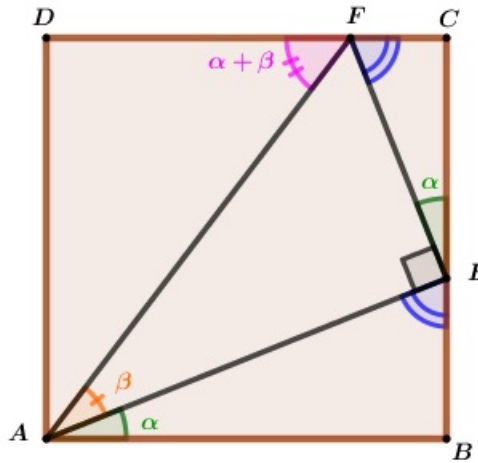


Dans la figure ci-dessus :

- $ABCD$ est un carré de côté 1
- E est un point de $[BC]$ distinct de B et C et α désignera la mesure de l'angle \widehat{BAE}
- F est le point de $[CD]$ tel que $(EF) \perp (EA)$ et β désignera la mesure de l'angle \widehat{EAF}

Utiliser ces données pour montrer la formule : $\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan(\alpha) + \tan(\beta)}{1 - \tan(\alpha) \times \tan(\beta)}$

20.2 Solution



- Dans le triangle rectangle ADF , on a :

$$\begin{aligned} \widehat{DAF} &= 90^\circ - (\alpha + \beta) \\ \implies \widehat{DFA} &= (\alpha + \beta) \\ \implies \tan(\alpha + \beta) &= \frac{AD}{DF} \end{aligned}$$

- Le triangle ABE est rectangle en B , alors :

$$\begin{aligned} - \tan(\alpha) &= \frac{BE}{AB} = BE \\ - AE^2 &= AB^2 + BE^2 = 1 + \tan^2(\alpha) \\ \implies AE^2 &= \frac{1}{\cos^2(\alpha)} \\ \implies AE &= \frac{1}{\cos(\alpha)} \quad (AE > 0) \end{aligned}$$

- $\widehat{BEC} = \widehat{BEA} + \widehat{AEF} + \widehat{FEC}$
 $\implies 180^\circ = \widehat{BEA} + 90^\circ + \widehat{FEC}$
 $\implies \widehat{BEA} + \widehat{FEC} = 90^\circ$

d'autre part, dans le triangle rectangle ABE , on a : $\widehat{BEA} + \alpha = 90^\circ$

$$\implies \widehat{FEC} = \alpha$$

alors son complémentaire \widehat{BEA} dans le triangle rectangle ABE est égal à son complémentaire \widehat{CFE} dans le triangle rectangle ECF

Résumé :

$$\implies \left\{ \begin{array}{l} \tan(\alpha + \beta) = \frac{AD}{DF} \quad (1) \\ BE = \tan(\alpha) \quad (2) \\ AE = \frac{1}{\cos(\alpha)} \quad (3) \\ \widehat{FEC} = \alpha \quad (4) \\ \widehat{BEA} = \widehat{CFE} = 90^\circ - \alpha \quad (5) \end{array} \right.$$

CHAPITRE 20. TANGENTE DE LA SOMME DE 2 ANGLES

- Le triangle AEF est rectangle en E , alors :

$$\tan(\beta) = \frac{FE}{AE} \implies FE = AE \cdot \tan(\beta) = \frac{\tan(\beta)}{\cos(\alpha)}$$

- Le triangle CEF est rectangle en C , alors :

$$- \cos(\alpha) = \frac{CE}{FE} \implies CE = FE \cos(\alpha) = \frac{\tan(\beta)}{\cos(\alpha)} \cdot \cos(\alpha) = \tan(\beta)$$

$$- \sin(\alpha) = \frac{FC}{FE} \implies FC = FE \sin(\alpha) = \frac{\tan(\beta)}{\cos(\alpha)} \cdot \sin(\alpha) = \tan(\beta) \cdot \tan(\alpha)$$

- $- DF = 1 - CF = 1 - \tan(\beta) \cdot \tan(\alpha) \quad (6)$

- $- AD = BC = BE + EC = \tan(\alpha) + \tan(\beta) \quad (7)$

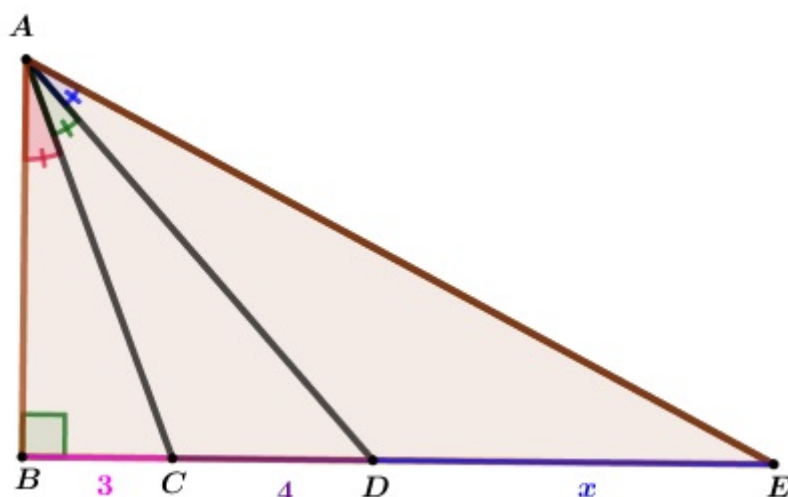
Conclusion : D'après les résultats (1), (6) et (7) ci-dessus, on déduit que :

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{AD}{DF} = \frac{\tan(\alpha) + \tan(\beta)}{1 - \tan(\beta) \cdot \tan(\alpha)}$$

Chapitre 21

Segments découpés par des angles égaux

21.1 Énoncés



Dans la figure ci-dessus :

- ABE est un triangle rectangle en B
- $\widehat{BAC} = \widehat{CAD} = \widehat{DAE}$
- $BC = 3$, $CD = 4$ et $DE = x$

1. Calculer la distance DE .
2. Proposer une méthode pour faire une figure où les données seront respectées.

21.2 Phase expérimentale

<http://mongeogebra.com/ggbg/2018/07/21/phaseexperi/>

21.3 Solution

21.3.1 Question 1

Méthode 1 (Théorèmes de la bissectrice et de Pythagore)

- Dans le triangle rectangle ABD , $[AC)$ est la bissectrice de \widehat{BAD}

$$\implies \begin{cases} AD^2 = 7^2 + AB^2 \\ \frac{AD}{AB} = \frac{CD}{CB} \end{cases}$$

$$\implies \begin{cases} AD^2 = 7^2 + AB^2 \\ \frac{AD}{AB} = \frac{4}{3} \end{cases}$$

$$\implies \begin{cases} \frac{16}{9}AB^2 = 7^2 + AB^2 \\ AD = \frac{4}{3}.AB \end{cases}$$

$$\implies \begin{cases} AB = 3.\sqrt{7} \\ AD = 4.\sqrt{7} \end{cases}$$

- Le triangle ABC est rectangle en B

$$\implies AC^2 = BC^2 + BA^2 = 9 \times 7 + 9 = 72$$

$$\implies AC = 6.\sqrt{2}$$

- Dans le triangle ACE , $[AD)$ est la bissectrice de \widehat{CAE}

$$\implies \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{DC}$$

$$\implies AE = \frac{3x\sqrt{2}}{2}$$

- Le triangle ABE est rectangle en B

$$\implies AE^2 = BE^2 + BA^2 = 63 + (7 + x)^2$$

$$\implies \frac{9x^2}{2} = x^2 + 14x + 112$$

$$\implies x^2 - 4x - 32 = 0 \quad (x > 0)$$

$$\implies (x-2)^2 - 36 = 0 \quad (\text{Méthode qui ne fait pas appel aux équations du 2nd degré})$$

$$\implies \begin{cases} x - 2 = 6 \\ \text{ou} \\ x - 2 = -6 \end{cases}$$

$$\implies \begin{cases} x = 8 \\ \text{ou} \\ x = -4 < 0 : \text{ à rejeter} \end{cases}$$

$$\implies \boxed{x = 8}$$

CHAPITRE 21. SEGMENTS DÉCOUPÉS PAR DES ANGLES ÉGAUX

Méthode 2 (Trigonométrie : rapports dans un triangle rectangle et formules d'addition)

Dans toute la suite, α désignera l'un quelconque des angles non nuls et non droits \widehat{BAC} , \widehat{CAD} , \widehat{DAE}

- – ABC est un triangle rectangle en B
 $\implies \tan(\alpha) = \frac{3}{AB}$
- ABD est un triangle rectangle en B

$$\implies \tan(2\alpha) = \frac{7}{AB} = \frac{2 \times \frac{3}{AB}}{1 - \frac{AB}{9}} \quad \left(\tan(2\alpha) = \frac{2 \cdot \tan(\alpha)}{1 - \tan(\alpha)^2} \right)$$

$$\begin{aligned} \implies \frac{7}{AB} &= \frac{6 \cdot AB}{AB^2 - 9} \\ \implies AB^2 &= 63 \\ \implies AB &= 3\sqrt{7} \end{aligned}$$

- – ABE est un triangle rectangle en B
 $\implies \sin(3\alpha) = \frac{7+x}{AE} = \sin(2\alpha) \times \cos(\alpha) + \cos(2\alpha) \times \sin(\alpha)$
- D'autre part, $AE = \sqrt{(7+x)^2 + 63} = \sqrt{x^2 + 14x + 112}$
 $\implies \frac{7+x}{\sqrt{x^2 + 14x + 112}} = \sin(2\alpha) \times \cos(\alpha) + \cos(2\alpha) \times \sin(\alpha) \quad (1)$
- – ABC est un triangle rectangle en B

$$\implies \begin{cases} AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = 6\sqrt{2} \\ \cos(\alpha) = \frac{AB}{AC} = \frac{3\sqrt{7}}{6\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{14}}{4} \quad (2) \\ \sin(\alpha) = \frac{BC}{AC} = \frac{3}{6\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4} \quad (3) \end{cases}$$

- ABD est un triangle rectangle en B

$$\implies \begin{cases} AD = \sqrt{AB^2 + BD^2} = 4\sqrt{7} \\ \cos(2\alpha) = \frac{AB}{AD} = \frac{3\sqrt{7}}{4\sqrt{7}} = \frac{3}{4} \quad (4) \\ \sin(2\alpha) = \frac{BD}{AD} = \frac{7}{4\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{7}}{4} \quad (5) \end{cases}$$

- D'après les résultats : (2), (3), (4) et (5), l'équation(1) est équivalente à :

$$\begin{aligned} \frac{7+x}{\sqrt{x^2 + 14x + 112}} &= \frac{\sqrt{7}}{4} \times \frac{\sqrt{14}}{4} + \frac{3}{4} \times \frac{\sqrt{2}}{4} \\ \frac{7+x}{\sqrt{x^2 + 14x + 112}} &= \frac{5\sqrt{2}}{8} \end{aligned}$$

$$\frac{(7+x)^2}{x^2 + 14x + 112} = \frac{25}{32}$$

$$x^2 + 14x - 176 = 0$$

$$\Delta' = 49 + 176 = 225 = 15^2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -7 + 15 = 8 \\ \text{ou} \\ x = -7 - 8 = -15 < 0 : \quad \text{à rejeter} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{x = 8}$$

21.3.2 Question 2

L'idée consiste à partir d'une figure d'étude qui nous permettra de déterminer la distance AB : chose qui était déjà faite à la question 1 et qui nous a conduit à avoir $AB = 3\sqrt{7}$

Pour l'exécution, on adoptera l'algorithme ci-dessous :

1. Étape 1 :

on construit un triangle EFG rectangle en E et tel que :

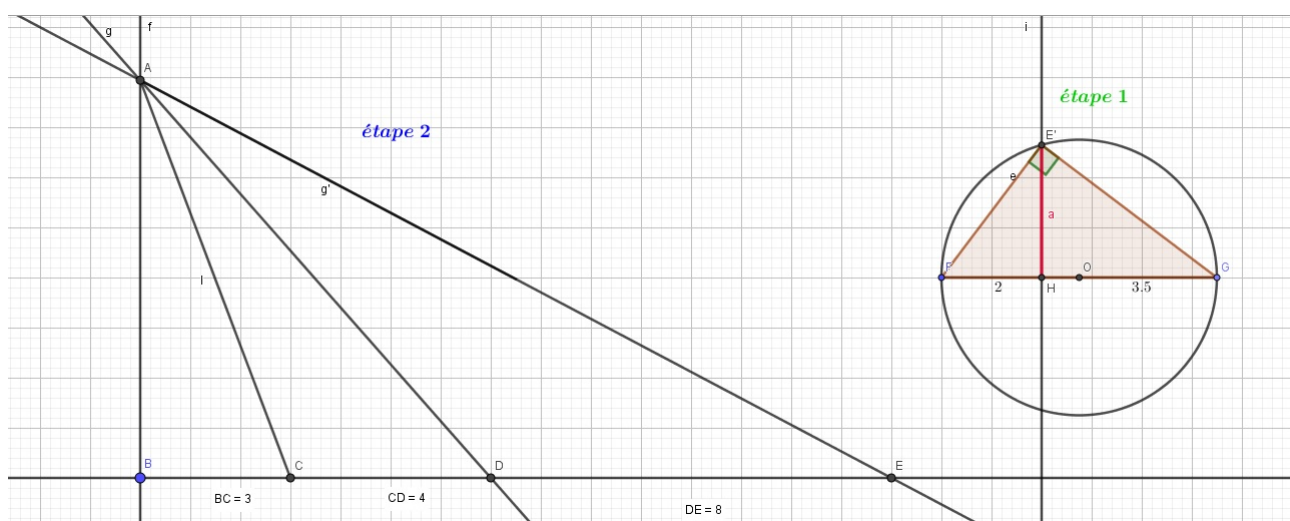
- $FG = 5.5$, $H \in [FG]$, $FH = 2$
- une demi-droite $[Hy)$ perpendiculaire à $[FG]$ en H
- Le cercle de diamètre $[FG]$ coupe Δ en E
 $\implies EH = \sqrt{FH \times GH} = \sqrt{2 \times 3.5} = \sqrt{7}$
- on pose $a = EH$

2. Étape 2 : On construit successivement :

- un triangle ABC rectangle en B et tel que $BC = 3 AB = 3a = 3\sqrt{7}$
- La symétrique g de $[AB)$ par rapport à (AC) coupe $[BC)$ en D
(vous pouvez vérifier que $CD = 4$)
- La symétrique g' de g par rapport à (AD) coupe $[BC)$ en E
(vous pouvez vérifier que $DE = 8$)

3. Exécution :

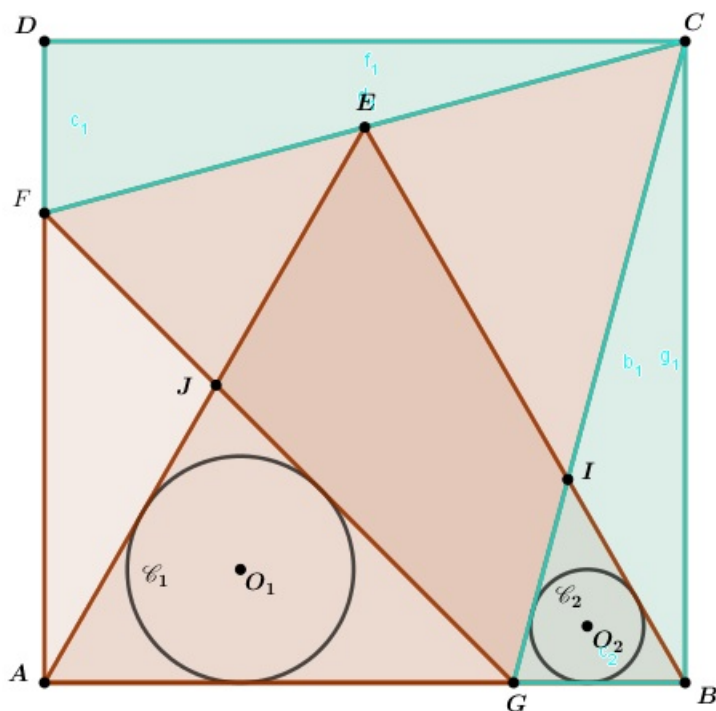
CHAPITRE 21. SEGMENTS DÉCOUPÉS PAR DES ANGLES ÉGAUX



Chapitre 22

Rapport des rayons de deux cercles inscrits

22.1 Énoncés



Dans la figure ci-dessus :

- $ABCD$ est un carré de côté 1
- ABE et CFG sont deux triangles équilatéraux
- \mathcal{C}_1 est le le cercle inscrit dans le triangle AGJ . On désignera par R_1 son rayon et par O_1 son centre
- \mathcal{C}_2 est le le cercle inscrit dans le triangle BGI . On désignera par R_2 son rayon et par O_2 son centre

Déterminer le rapport $\frac{R_1}{R_2}$

22.2 Phase expérimentale

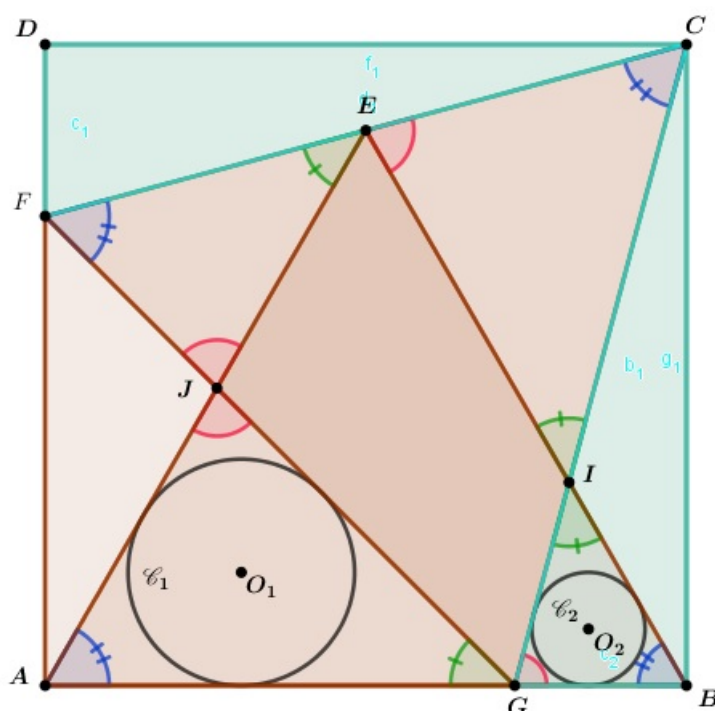
<http://mongeogebra.com/ggbg/2018/07/22/rapportrayons/>

22.3 Solution

22.3.1 Rappel

- $R_1 = \frac{S_1}{p_1}$ où S_1 et p_1 sont respectivement l'aire et le demi-périmètre du triangle AGJ
- $R_2 = \frac{S_2}{p_2}$ où S_2 et p_2 sont respectivement l'aire et le demi-périmètre du triangle BGI

22.3.2 Solution



Étape 1

- Dans les triangles AGJ et FJE on a :

$$\left. \begin{array}{l} \widehat{JAG} = \widehat{JFE} \\ \widehat{AJG} = \widehat{FJE} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{les triangles } AGJ \text{ et } FJE \text{ sont semblables} \quad (1)$$

- Dans les triangles BIG et CIE on a :

$$\left. \begin{array}{l} \widehat{IBG} = \widehat{ICE} \\ \widehat{BIG} = \widehat{CIE} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{les triangles } BIG \text{ et } CIE \text{ sont semblables} \quad (2)$$

**CHAPITRE 22. RAPPORT DES RAYONS DE DEUX
CERCLES INSCRITS**

• On a :

$$\begin{aligned} - \widehat{FEC} &= \widehat{FEJ} + \widehat{JEI} + \widehat{IEC} = 180^\circ \\ &\implies \widehat{FEJ} + 60^\circ + \widehat{IEC} = 180^\circ \\ &\implies \widehat{FEJ} + \widehat{IEC} = 120^\circ \quad (a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} - \text{Dans le triangle } EIC : \\ \widehat{IEC} + \widehat{CIE} + \widehat{ICE} &= 180^\circ \\ \implies \widehat{IEC} + \widehat{CIE} + 60^\circ &= 180^\circ \\ \implies \widehat{IEC} + \widehat{CIE} &= 120^\circ \quad (b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} - \text{D'après les résultats (a) et (b), on déduit : } \widehat{FEJ} + \widehat{IEC} &= \widehat{IEC} + \widehat{CIE} \\ \implies \widehat{FEJ} &= \widehat{CIE} \end{aligned}$$

Ainsi, dans les triangles FJE et CEI on a :

$$\left. \begin{aligned} \widehat{EFJ} &= \widehat{ICE} \\ \widehat{FJE} &= \widehat{CEI} \end{aligned} \right\} \implies \text{les triangles } FJE \text{ et } CEI \text{ sont semblables} \quad (3)$$

Conclusion : D'après les résultats (1), (2) et (3), on déduit que les deux triangles FJE et BGI sont semblables. A et B sont homologues, J et G sont homologues, G et I sont homologues.

$$\implies \frac{AJ}{BG} = \frac{AJ}{BG} = \frac{AJ}{BG} = k \quad k \text{ étant le rapport de la similitude}$$

Il en découle que :

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{\frac{S_1}{p_1}}{\frac{S_2}{p_2}} = \frac{S_1 \times p_2}{S_2 \times p_1} = \frac{k^2 S_2 \times p_2}{S_2 \times k \cdot p_2} = \frac{k^2}{k} = k$$

On retient alors qu'il suffit de déterminer la valeur de l'un des quotients :

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{AJ}{BG} = \frac{AJ}{BG} = \frac{AJ}{BG} = k$$

et c'est l'objet de la suite de notre démonstration

Étape 2

• Dans les deux triangles rectangles CBG et CDF on a :

$$\left. \begin{aligned} CB &= CD \\ CG &= CF \\ BG &= DF \quad (\text{D'après Pythagore}) \end{aligned} \right\} \implies \widehat{GCB} = \widehat{DCF} \quad (b)$$

$$\begin{aligned} \bullet \text{ on a : } \widehat{DCB} &= 90^\circ = \widehat{DCF} + \widehat{FCG} + \widehat{GCB} = 2 \cdot \widehat{DCF} + 60^\circ \\ \implies \widehat{GCB} &= \widehat{DCF} = 15^\circ \\ \implies \widehat{IGB} &= \widehat{CGB} = 75^\circ \\ \implies \widehat{GIB} &= 180^\circ - (\widehat{CGB} + \widehat{GBI}) = 180^\circ - (75^\circ + 60^\circ) = 45^\circ \end{aligned}$$

Étape 3

- Dans le triangle rectangle BCG , on a : $\widehat{C} = 15^\circ$
 et $\tan(15) = \frac{BG}{BC} \implies BG = BC \cdot \tan(15) = \tan(15) \quad (BC = 1)$

$$\implies BG = \frac{\sin(30)}{1 + \cos(30)} = \frac{\frac{1}{2}}{2 + \sqrt{3}} = 2 - \sqrt{3} \quad \left(\tan(x) = \frac{\sin(2x)}{1 + \cos(2x)} \right)$$

$$\implies AG = BC - BG = 1 - (2 - \sqrt{3}) = 1 - 2 + \sqrt{3} = \sqrt{3} - 1$$
- Dans le triangle AGJ et d'après la loi des sinus, on a : $\frac{AG}{\sin(75)} = \frac{AJ}{\sin(45)}$

$$\implies AJ = AG \times \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{2}{\sqrt{6} + \sqrt{2}}} = AG \times \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{6} + \sqrt{2}} \quad (\sin(75) = \sin(30 + 45))$$

$$\implies AJ = AG \times \frac{2\sqrt{2}(\sqrt{6} - \sqrt{2})}{4} = AG \times (\sqrt{3} - 1) = (\sqrt{3} - 1)^2 = 4 - 2\sqrt{3}$$

$$\implies \frac{AJ}{BG} = \frac{4 - 2\sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}} = 2 \frac{2 - \sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}} = 2$$

Conclusion :

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{AJ}{BG} = 2$$