République Tunisienne
Ministère de l'Education

Mathématiques

4ème année de l'enseignement secondaire

Section Sport

Auteurs

Khadija Kaâniche Ben Messaoud
Inspectrice Générale

Nabil Mziou
Inspecteur

Mourad El Arbi
Professeur Principal

Evaluateurs

Tahar Dorgâa
Inspecteur Principal

Ali Béji Hammas
Inspecteur Principal

Taoufik Charrada
Inspecteur Principal

Centre National Pédagogique

Remerciements

Les auteurs remercient toutes les personnes qui ont participé à l'élaboration de ce manuel et en particulier :

Messieurs Tahar Dorgâa, Ali Béji Hammas et Taoufik Charrada pour leurs critiques, leurs conseils pertinents et leurs modifications judicieuses.

Madame Héla Mziou pour sa contribution dans la rubrique « culture ».

Les membres de L'équipe d'édition du CNP pour leur contribution, leur grande compétence et leur patience.

Les auteurs

Préface

Ce manuel a été conçu pour répondre aux exigences du programme de la 4ème année secondaire, section Sport. Il vise à permettre à tous les élèves de développer des aptitudes.

Ils apprendront à :

- Pratiquer une démarche mathématique.
- Mobiliser des algorithmes et des procédures.
- Utiliser et appliquer les mathématiques pour résoudre des problèmes.
- Communiquer oralement ou par écrit dans un langage mathématique.
- Utiliser les technologies de l'information et de la communication.
- Organiser et exploiter l'information.
- Apprécier la contribution des mathématiques au développement de l'individu et de la société, ainsi qu'à la compréhension du monde et à son évolution.

Dans ce cadre, l'élève trouve dans ce manuel des activités rédigées dans un langage familier et qui permettent de dégager des idées essentielles, de construire de bonnes images mentales, de donner sens aux termes et objets mathématiques et de renseigner sur le champ d'application des nouvelles notions étudiées. Le plus souvent possible, les notions nouvelles sont introduites par l'étude de situations issues du domaine sportif et de l'environnement quotidien des élèves.

Enfin, on espère à travers ce produit que l'élève puisse trouver, à tout moment de son apprentissage, le langage qui convient dans le cadre du cours en classe et de son travail à la maison.

Carte du manuel

Le cours est présenté en sept chapitres. Chaque chapitre comprend les rubriques suivantes :

Aperçu historique

Cette rubrique vise à placer les notions abordées dans le contexte de leurs découvertes ou dans une chronologie.

Vérifier vos acquis

Cette rubrique vise à permettre aux élèves de mobiliser leurs acquis antérieurs.

Découvrir

Cette rubrique comprend des activités visant à permettre aux élèves de développer leur capacité à chercher, à conjecturer, à formuler, à modéliser et à raisonner.

Connaître

Cette rubrique contient les principaux résultats du cours afin que les élèves puissent s'y référer.

Culture

Vise à apprécier la contribution des mathématiques dans des contextes en rapport avec l'environnement du sportif.

Avec l'ordinateur

Cette rubrique contient des activités faisant appel à l'outil informatique.

Exercices et problèmes

Cette rubrique comporte :

- des exercices de type « vrai ou faux » et « QCM » visant à permettre à l'élève de faire sa propre évaluation.
- des exercices et problèmes classés suivant la progression du cours, visant à permettre à l'élève de mobiliser ses compétences de façon autonome.

Corrigé

Les exercices précédés d'une étoile sont corrigés à la fin du chapitre. La résolution proposée fait ressortir clairement le point méthode utilisé et explique la démarche suivie pour trouver une solution.

Sommaire

Chapitre 1

Exemples de fonctions polynômes et fonctions homographiques

Aperçu historique

Au XIVème siècle, les notions de quantités variables sont pour la première fois exprimées à la fois sous une forme géométrique et mécanique.

Chaque cas concret de dépendance entre deux quantités est défini par une description verbale ou par un graphe : (Nicole Oresme (1323-1382) propose une méthode graphique pour représenter les variations de la chaleur dans un corps : Il imagine une droite tracée dans ce corps. Il appelle longitudino la longueur qui sépare un point courant de la droite d'un point origine arbitrairement fixé. En chaque point de cette droite il élève une perpendiculaire dont la hauteur (latitudino) est proportionnelle à l'intensité de la chaleur au point correspondant du corps.Il obtient ainsi une figure géométrique dont l'examen rend plus aisé l'étude des variations de la chaleur.

Le mot «fonction» apparait pour la première fois dans un manuscrit de Leibniz en 1673.

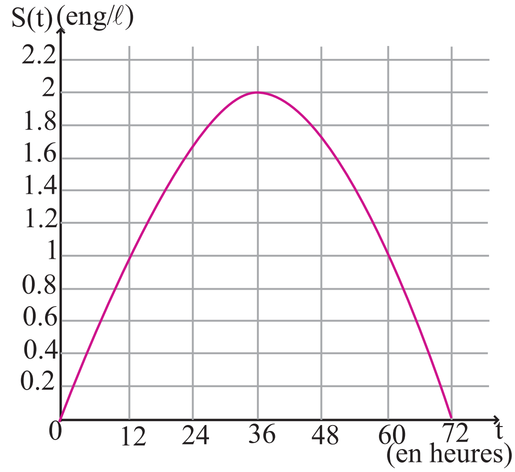
La première définition de la notion de fonction est élaborée par Jean Bernoulli, en 1718: « On appelle fonction d'une grandeur variable une quantité composée de quelque manière que ce soit de cette grandeur variable et de constantes ».

La plupart des fonctions introduites au XVIIème siècle ont été d'abord étudiées comme des courbes, celles-ci étant elles-mêmes considérées comme des trajectoires.

Activité 1

On injecte à un malade, par piqûre intraveineuse une substance, celle-ci passe dans le sang, ensuite elle sera éliminée.

Le graphique ci-contre montre les variations de la quantité de substance $S(t)$ (en gramme par litre) présente dans le sang à l'instant t (en heures) .



Utiliser le graphique pour répondre aux questions suivantes :

1. Déterminer la quantité de substance présente dans le sang aux instants $t = 12$, $t = 36$ et $t = 72$.
2. Déterminer l'instant où la quantité de substance injectée dans le sang est maximale et déterminer cette quantité.
3. A partir de quel moment commence l'élimination de la substance ?
4. Dresser le tableau de variation de la fonction $S : t \mapsto S(t)$.
5. a. Quel est le temps mis pour passer de 1 g/ℓ à 2 g/ℓ dans la phase d'absorption ?

   b. Quel est le temps mis pour passer de de 2 g/ℓ à 1 g/ℓ dans la phase d'élimination ?
6. Le graphique justifie-t-il les affirmations suivantes ?

   A_1 : « Le passage de toute la substance injectée dans le sang s'effectue rapidement dans la phase d'absorption que dans la phase d'élimination ».

   A_2 : « La substance est totalement éliminée au bout d'un certain temps ».

Activité 2

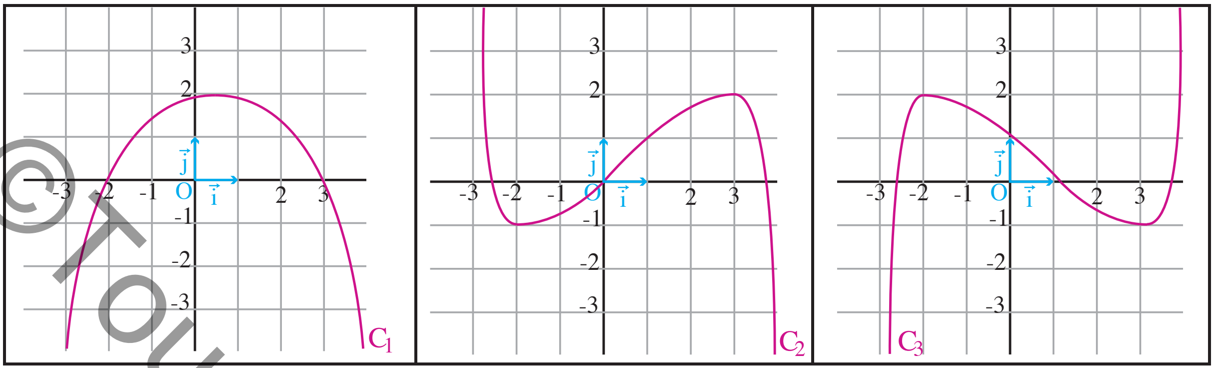
Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.

Le signe de sa fonction dérivée est donné par le tableau suivant :

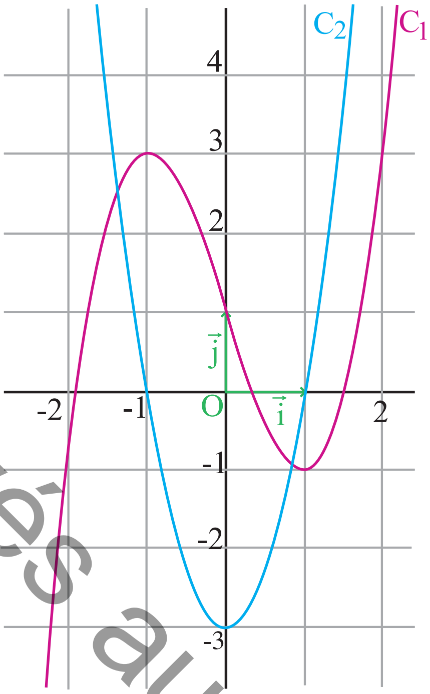
x	$-\infty$		-2		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

1. a. Comparer $f(1)$ et $f(2)$.

   b. Comparer $f(5)$ et $f(7)$.
2. L'une des courbes représentées ci-après est celle de f. Laquelle ?



Activité 3



Dans la figure ci-contre C_1 et C_2 sont les courbes représentatives de deux fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$.

C_1 et C_2 ont chacune deux branches paraboliques de direction $\left(O, \vec{j}\right)$.

1. Peut-on identifier les courbes C_1 et C_2 ?
2. On sait que g est la fonction dérivée de f.
   Justifier que C_1 est la courbe de f.
3. Dresser le tableau de variation de f et celui de g.

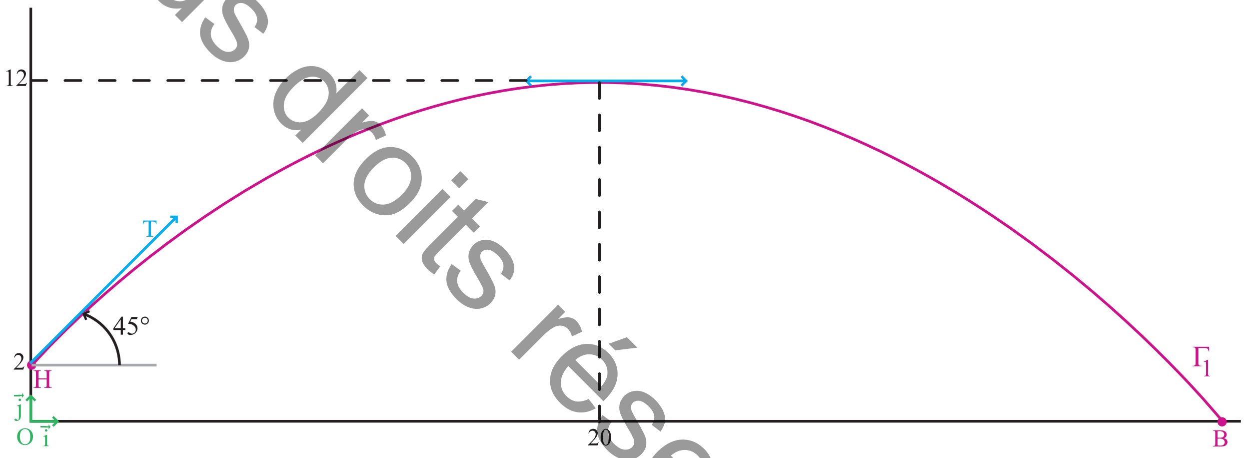
I. Exemples de fonctions polynômes de degré deux ou trois

Activité 1

On admet que la trajectoire d'un projectile lancé d'un point H (situé à une altitude égale à h) avec une vitesse initiale v, suivant l'angle d'inclinaison 45° par rapport à l'horizontale est une portion d'une parabole d'équation $y = \frac{-10}{v^2}x^2 + x + h$.

Dans la figure ci-dessous, on a représenté dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

La trajectoire Γ_1 d'un projectile lancé par un athlète A_1.



1. a. Déterminer, en utilisant le graphique, une équation de Γ_1.
   b. En déduire la performance $\left(\text{distance OB}\right)$ réalisée par l'athlète A_1.
2. Un deuxième athlète A_2 a lancé le projectile du point de coordonnées $\left(0, 2.2\right)$ avec une vitesse initiale $v_2 = 18 \text{ m/s}$.
   (L'angle d'inclinaison par rapport à l'horizontale est 45°).
   a. Ecrire une équation de la trajectoire Γ_2 réalisée au cours du lancement.
   b. Déterminer l'altitude maximale atteinte par le projectile lancé par l'athlète A_2.
   c. Lequel des deux athlètes a réalisé le meilleur résultat ?

Soit f une fonction définie sur un ensemble D.
* S'il existe un réel a appartenant à D tel que pour tout x de D, $f\left(x\right) \le f\left(a\right)$, on dit que la fonction f admet sur D un maximum en a ou encore que $f\left(a\right)$ est un maximum de f sur D.
* S'il existe un réel a appartenant à D tel que pour tout x de D, $f\left(x\right) \ge f\left(a\right)$, on dit que la fonction f admet sur D un minimum en a ou encore que $f\left(a\right)$ est un minimum de f sur D.

Activité 2

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1$.

Etudier f et tracer sa courbe représentative C_f dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Le plan est muni d'un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
Soit a un réel non nul, b et c deux réels.
La courbe représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ est une parabole de sommet le point $S\left(\frac{-b}{2a}, f\left(\frac{-b}{2a}\right)\right)$ et d'axe la droite d'équation $x = \frac{-b}{2a}$.

Activité 3

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2 + 2x + 1$. On désigne par C_f la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
   a. Ecrire une équation de la tangente T à C_f au point d'abscisse -2.
   b. Vérifier que T passe par le point de coordonnées $A(0, 5)$.
   c. Tracer C_f.
2. Soit a un réel donné.
   a. Montrer qu'une équation de la tangente T_a à C_f au point d'abscisse a est $y = (2 - 2a)x + a^2 + 1$.
   b. Déterminer a pour que T_a passe par le point A.
3. Un mobile M décrit la courbe C_f.
   Colorier la partie de C_f pour laquelle le mobile M est visible depuis A.

Le plan est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

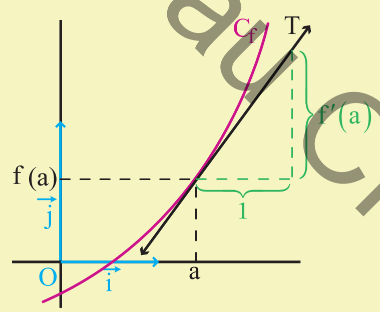
Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et a un réel de I.

f est dérivable en a s'il existe un réel, noté $f'(a)$ tel que $\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$.

La droite T de coefficient directeur $f'(a)$ et passant par le point $M(a, f(a))$ s'appelle tangente à la courbe représentative de f au point M.

Une équation de T est $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.

$\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ f'(a) \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de T.



Activité 4

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par
$f(x) = 2x^3 - 8x^2 + 10x - 4$.
On désigne par C_f la courbe représentative de f dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

La courbe représentative, dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$, d'une fonction polynôme de degré trois admet deux branches paraboliques de direction celle de l'axe des ordonnées.

1. Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$.
2. a. Dresser le tableau de variation de f.
   b. Ecrire une équation de la tangente à C_f au point d'abscisse 2.
3. Tracer C_f.

Activité 5

I/ Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{-1}{6}x^3 + x^2$.

On désigne par C_f la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Dresser le tableau de variation de f.
2. Déterminer l'intersection de la courbe avec l'axe des abscisses.
3. Tracer C_f.

II/ Un athlète parcourt un trajet rectiligne en 3minutes.
Entre les instants 0 minute et 3 minutes, sa loi horaire est donnée par la fonction définie sur $[0, 3]$ par $d(t) = f(t)$

La fonction d est appelée la restriction de f à $[0, 3]$

où t est le temps exprimé en minutes et $d(t)$ est la distance parcourue à l'instant t, exprimée en centaines de mètres.

1. a. Calculer la distance parcourue par cet athlète.
   b. Comparer la distance parcourue par cet athlète au cours de la première minute avec celle parcourue au cours de la dernière minute.
2. Calculer la vitesse instantanée de cet athlètes aux instants $t_0 = 0\,\text{min}$, $t_1 = 1$ min, $t_2 = 2\,\text{min}$ et $t_3 = 3\,\text{min}$.

La vitesse instantanée à l'instant a est le nombre dérivé en a de la fonction qui définie la loi horaire.

3. Calculer l'accélération instantanée de cet athlète aux instants $t_0 = 0\,\text{min}$, $t_1 = 1$ min et $t_3 = 3\,\text{min}$.

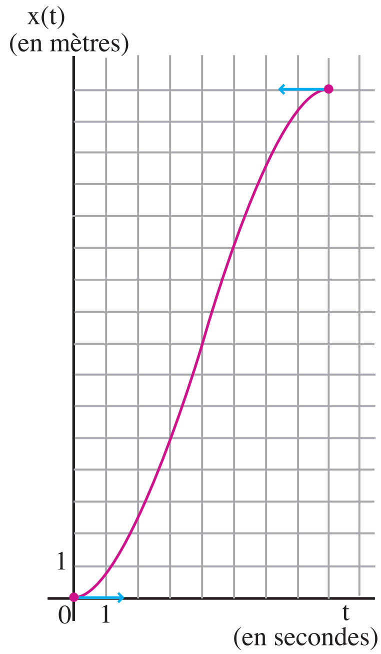
L'accélération instantanée à l'instant a est le nombre dérivé en a de la fonction qui définie la vitesse instantanée.

Activité 6

Un mobile M se déplace sur un axe.

Entre les instants 0 et 8, sa loi horaire $t \mapsto x(t)$ est donnée par la courbe ci-contre.

Les graduations représentent respectivement des secondes en abscisses et des mètres en ordonnées.



1. Utiliser le graphique pour déterminer :
   a. les distances (en mètres) parcourues par ce mobile aux instants 0 s, 4 s et 8 s.
   b. les vitesses instantanées (en m/s) de ce mobile aux instants 0 s et 8 s.
2. Calculer la vitesse moyenne de ce mobile entre les instants 0 s et 8 s.
3. On sait que $x(t) = at^3 + bt^2 + ct$ où a, b et c sont trois réels. En utilisant des renseignements fournis par le graphique ci-contre, montrer que $x(t) = \frac{3}{4}t^2 - \frac{1}{16}t^3$.
4. Calculer l'accélération de ce mobile aux instants 0 s , et 8 s.

Activité 7

Deux voitures de course parcourent un même circuit.

Le graphique de la figure (I) représente les variations de la vitesse instantanée de la voiture A.

Le graphique de la figure (II) représente les variations de la vitesse instantanée de la voiture B.

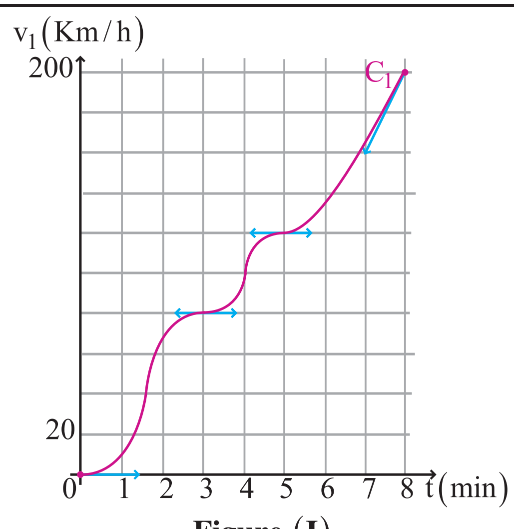


Figure (I)

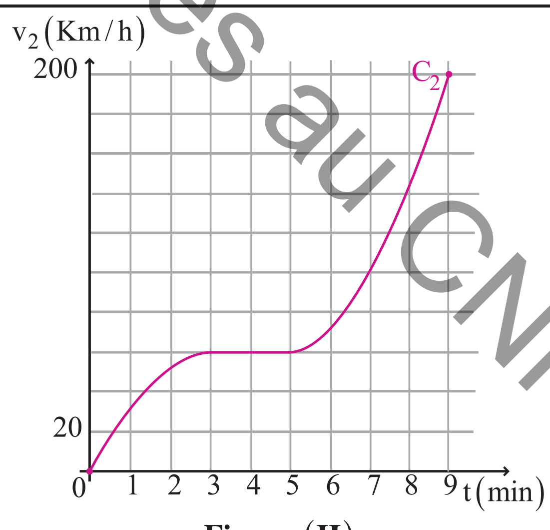


Figure (II)

1. La voiture B a roulé une période avec une vitesse constante. Préciser cette période.
2. Soit a et b deux réels de l'intervalle $[0, 8]$ tels que $a < b$.

   Comparer $v_1(a)$ et $v_1(b)$.
3. Soit a et b deux réels de l'intervalle $[0, 9]$ tels que $a < b$.

   Peut-on affirmer que $v_2(a) < v_2(b)$?
4. On admet que les fonctions v_1 et v_2 sont dérivables respectivement sur les intervalles $[0, 8]$ et $[0, 9]$.

   a. Déterminer les instants pour lesquels l'accélération de la voiture A est nulle.

   b. Déterminer les instants pour lesquels l'accélération de la voiture B est nulle.

Définitions

Une fonction f est strictement croissante sur un intervalle I, si pour tous réels a et b de I tels que $a < b$, $f(a) < f(b)$.

Une fonction f est strictement décroissante sur un intervalle I, si pour tous réels a et b de I tels que $a < b$, $f(a) > f(b)$.

Une fonction est strictement monotone sur un intervalle I, si elle est strictement croissante sur I ou strictement décroissante sur I.

Théorème

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

- Si la fonction f' est strictement positive sur I, sauf peut-être en un nombre fini de réels où elle s'annule, alors la fonction f est strictement croissante sur I.
- Si la fonction f' est strictement négative sur I, sauf peut-être en un nombre fini de réels où elle s'annule, alors la fonction f est strictement décroissante sur I.

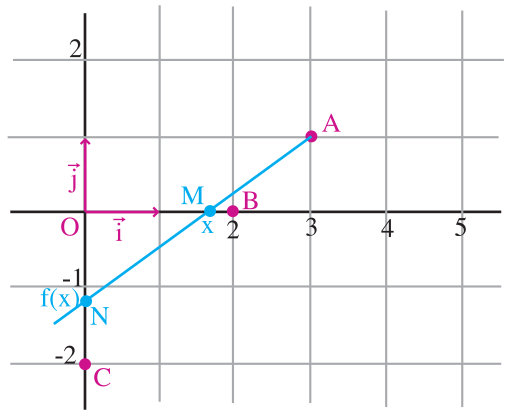
Activité 8

Dans chacun des cas suivants, montrer que la fonction f est strictement monotone sur l'intervalle I.

1. $f : x \mapsto x^3 - 3x^2 + 3x + 1$, $I = \mathbb{R}$.
2. $f : x \mapsto x^2 - 2x + 5$, $I =]-\infty, 1]$.
3. $f : x \mapsto x^3 - 3x + 4$, $I = [-1,1]$.

II. Exemples de fonctions homographiques

Activité 1

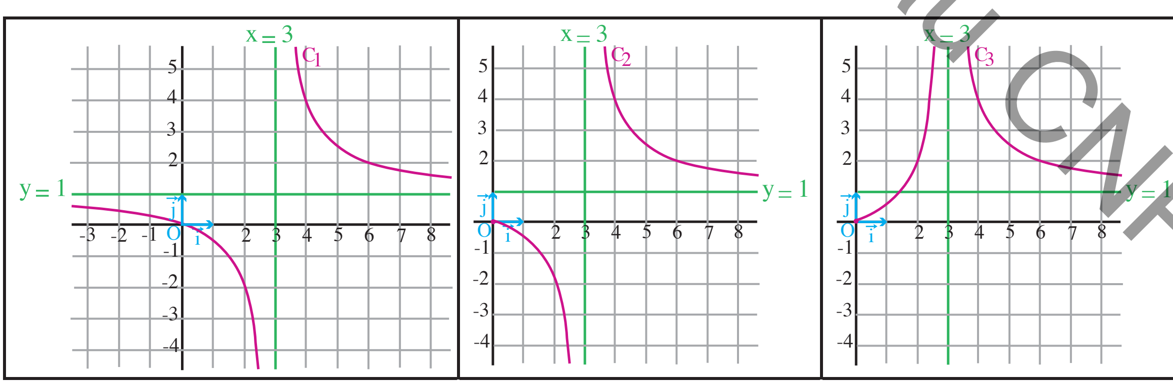


Dans la figure ci-contre, $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est un repère orthonormé. On considère les points $A(3, 1)$, $B(2, 0)$ et $C(0, -2)$.

A tout point M situé sur l'axe des abscisses, d'abscisse x positive, on associe le réel $f(x)$ ordonnée du point N (s'il existe) intersection de la droite (AM) avec l'axe des ordonnées.

1. Déterminer $f(0)$.
2. a. Justifier que les points A, B et C sont alignés.
   b. En déduire $f(2)$.
3. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction $f : x \mapsto f(x)$.
4. a. Que peut-on prévoir sur le sens de variation de f sur $[0, 3[$ et sur la limite de f à gauche en 3 ?
   b. Que peut-on prévoir sur le sens de variation de f sur $]3, +\infty[$, sur la limite de f à droite en 3 et sur la limite de f en $+\infty$?
5. Montrer que $f(x) = \dfrac{x}{x-3}$
6. L'une des courbes ci-dessous est la représentation graphique de la fonction f. Laquelle ?

Le plan est muni d'un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
Soit a, b, c et d quatre réels, avec $c \neq 0$.
La courbe représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ privé de $\dfrac{-d}{c}$ par $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ est une hyperbole de centre $I\left(\dfrac{-d}{c}, \dfrac{a}{c}\right)$ et d'asymptotes les droites d'équations $x = \dfrac{-d}{c}$ et $y = \dfrac{a}{c}$.



Activité 2

Soit f la fonction définie par $f(x)=\dfrac{x+2}{x-1}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)$.
3. Dresser le tableau de variation de f.
4. Soit Δ la droite d'équation $y=-3x+10$.

   a. Vérifier que pour tout x de $\mathbb{R}\setminus\{1\}$, $f(x)+3x-10=\dfrac{3(x-2)^2}{x-1}$.

   b. Etudier la position relative de C_f et Δ.

   c. Justifier que la droite Δ est la tangente à C_f au point d'abscisse 2.
5. Tracer C_f.

Activité 3

Un cycliste roule d'un lieu A à un lieu B à la vitesse moyenne de 20 km/h.

Au retour (de B vers A) sa vitesse moyenne est de x km/h.

On désigne par $v(x)$ la vitesse moyenne du cycliste sur le trajet aller-retour (en km/h) et par d la distance (en km) qui sépare A et B.

1. a. Montrer que le temps (en heures) mis par ce cycliste pour effectuer le trajet aller-retour est $\dfrac{d}{20}+\dfrac{d}{x}$.

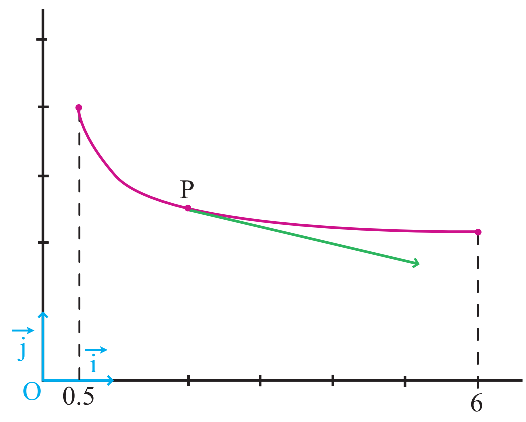
   b. En déduire que $v(x)=\dfrac{40x}{x+20}$.
2. a. Dresser le tableau de variation de la fonction $x\mapsto v(x)$ sur $]0,+\infty[$.

   b. Est-il possible que ce cycliste effectue le trajet aller-retour avec une vitesse moyenne égale à 40 km/h ?
3. Dans cette question on suppose que $d=25$ km et le cycliste est incapable d'effectuer cette distance à une vitesse supérieure à 30 km/h.

   Sa vitesse moyenne sur le trajet aller-retour peut-elle alors dépasser 25 km/h ?

Activité 4

La trajectoire d'un mobile M est portée par la courbe représentative, dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, de la fonction f définie sur $\left[\frac{1}{2}, 6\right]$ par $f(x) = \frac{2x+1}{x}$.



On admet que lorsque ce mobile quitte sa trajectoire en un point de P, il poursuit son mouvement en ligne droite sur la tangente en P à la trajectoire.

1. Dans cette question on suppose que le mobile quitte sa trajectoire au point d'abscisse $\frac{3}{4}$.

   Déterminer le point du contact du mobile avec l'axe des abscisses.
2. A quelle condition sur les coordonnées de P le mobile passera-t-il par le point $A(4, 0)$?

Activité 5

A/ Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = 50 - \frac{40}{x}$.

1. a. Etudier f et tracer sa courbe représentative C_f dans un repère orthogonal.

   b. Résoudre dans $\mathbb{R}_+^*$ l'équation $f(x) = 49$.

B/ Dans une usine, une étude a montré que le nombre moyen y d'objets qu'un ouvrier peut produire le $n^{\text{ème}}$ jour est donné par $y = a + \frac{b}{n}$ où a et b sont deux réels.

1. Sachant qu'en moyenne un ouvrier produit 30 objets le deuxième jour et 46 objets le dixième jour, déterminer a et b.
2. A partir de quel jour la production moyenne d'un ouvrier sera-t-elle maximale ?

Activité 6

Soit la fonction $f : x \mapsto \dfrac{7500 - 50x}{50 + x}$.

On désigne par C_f la courbe de f dans un repère orthogonal $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

A/ Etudier la fonction f et tracer C_f.

B/ Le président d'un club sportif décide d'agrandir la partie du terrain réservée à l'entraînement de son équipe. Cette partie a la forme d'un carré de 50 mètres de côté. Le responsable du projet propose d'allonger chacun de ses côtés pour lui donner la forme rectangulaire.

1. Exprimer en fonction de x et y l'aire de ce terrain après l'extension.
   (x et y étant les extensions prévues sur les côtés)
2. Le budget alloué à cette extension permet de rendre l'aire du nouveau terrain égale à $10000\ m^2$.
   a. Montrer alors que $y = f(x)$.
   b. Justifier que les valeurs de x et y ne peuvent pas dépasser les 150 mètres.
3. La valeur de y est limitée à 50 mètres par le bord d'une route.
   Quelle sont les valeurs possibles de x ?
4. Parmi les valeurs de x suivantes $x_1 = 50$ mètres et $x_2 = 100$ mètres.
   Laquelle donne le plus grand périmètre pour le nouveau terrain (après extension) ?

Maximum et minimum

Soit f une fonction définie sur un ensemble D.

* S'il existe un réel a appartenant à D tel que pour tout x de D, $f(x) \leq f(a)$, on dit que la fonction f admet sur D un maximum en a ou encore que $f(a)$ est un maximum de f sur D.
* S'il existe un réel a appartenant à D tel que pour tout x de D, $f(x) \geq f(a)$, on dit que la fonction f admet sur D un minimum en a ou encore que $f(a)$ est un minimum de f sur D.

Parabole

Le plan est muni d'un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Soit a un réel non nul, b et c deux réels.

La courbe représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ est une parabole de sommet le point $S\left(\frac{-b}{2a}, f\left(\frac{-b}{2a}\right)\right)$ et d'axe la droite d'équation $x = \frac{-b}{2a}$.

Tangente à une courbe

Le plan est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

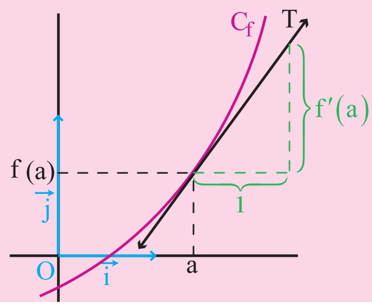
Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et a un réel de I.

f est dérivable en a s'il existe un réel, noté $f'(a)$ tel que $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$.

La droite T de coefficient directeur $f'(a)$ et passant par le point $M(a, f(a))$ s'appelle tangente à la courbe représentative de f au point M.

Une équation de T est $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.

$\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ f'(a) \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de T.



Fonction polynôme de degré 3

La courbe représentative, dans un repère orthogonal $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$, d'une fonction polynôme de degré trois admet deux branches paraboliques de direction celle de l'axe des ordonnées.

Fonction strictement monotone

Une fonction f est strictement croissante sur un intervalle I, si pour tous réels a et b de I tels que $a < b$, $f(a) < f(b)$.

Une fonction f est strictement décroissante sur un intervalle I, si pour tous réels a et b de I tels que $a < b$, $f(a) > f(b)$.

Une fonction est strictement monotone sur un intervalle I, si elle est strictement croissante sur I ou strictement décroissante sur I.

Dérivée et sens de variation

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

- Si la fonction f' est strictement positive sur I, sauf peut-être en un nombre fini de réels où elle s'annule, alors la fonction f est strictement croissante sur I.
- Si la fonction f' est strictement négative sur I, sauf peut-être en un nombre fini de réels où elle s'annule, alors la fonction f est strictement décroissante sur I.

Hyperbole

Le plan est muni d'un repère orthogonal $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$. Soit a, b, c et d quatre réels , avec $c \neq 0$.

La courbe représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ privé de $\frac{-d}{c}$ par $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ est une hyperbole de centre $I\left(\frac{-d}{c}, \frac{a}{c}\right)$ et d'asymptotes les droites d'équations $x = \frac{-d}{c}$ et $y = \frac{a}{c}$.

Activité

1. Tracer à l'aide d'un traceur de courbes (GéoGebra, Sine qua non, Graphe easy,…….)

   les représentations graphiques C_f et C_g des fonctions $f : x \mapsto x^3 - 3x + 1$ et

   $g : x \mapsto x^2 - 1$.

2. a. Justifier que l'équation $f(x) = g(x)$ admet trois solutions dans l'ordre croissant a, b et c.

   b. Vérifier que $c = 2$ et donner un encadrement d'amplitude 1 de a et de b.

3. On se propose d'utiliser l'Excel pour déterminer un encadrement de a d'amplitude 10^{-1}.

   a. Reproduire sur Excel la feuille de calcul suivante :

	A	B
1	-2	$= A1 + 0,1$
2	$= A1 \wedge 3 - 3 * A1 + 1$	
3	$= A1 \wedge 2 - 1$	

   b. Cliquer sur la cellule B1, une croix noire s'affiche au coin inférieur droit de cette cellule.

   Positionner le curseur sur cette croix et tirer vers la droite, jusqu'à atteindre la valeur -1.

   La ligne 1 affiche alors les valeurs prises par x.

   Procéder de la même façon avec A2 et A3.

   La ligne 2 affiche alors les valeurs prises par $f(x)$ et la ligne 3 affiche alors les valeurs prises par $g(x)$.

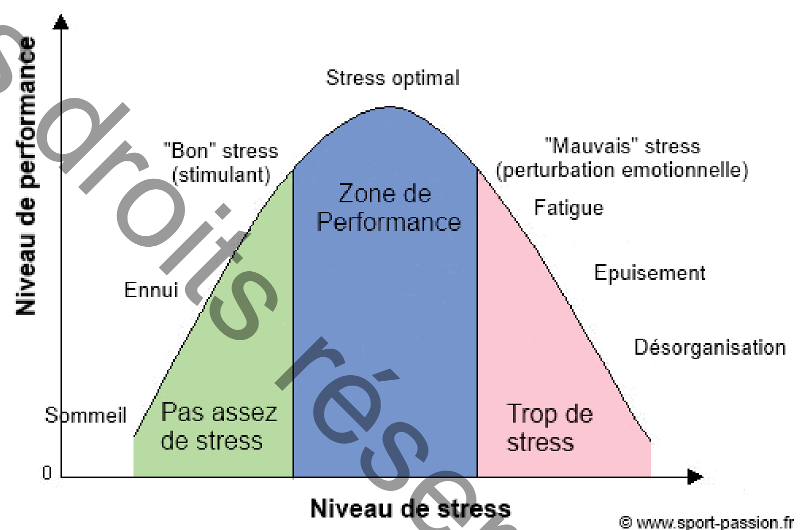
   c. Conclure.

4. Utiliser le même procédé pour déterminer un encadrement de b d'amplitude 10^{-2}.

Le stress positif et le stress négatif :

On peut parler de stress positif qui est un véritable moteur et de stress négatif qui correspond aux réactions inadaptées.

Pour le sportif qui désire améliorer ses performances sportives, il est intéressant de bien maitriser son stress positif ce qui contribue à mobiliser toutes les ressources de l'organisme et accroître son attention. Lorsque le stress positif est à son paroxysme (**maximum**), on va parler d' « état de grâce ».Il existe plusieurs hypothèses qui expliquent cet « état de grâce » chez un sportif. Nous allons présenter l'une des deux plus courantes : la théorie du U inversé.



Courbe en « U » inversé

La théorie du U inversé est une notion qui explique la zone optimale de performance. La performance se situe à un moment précis d'activation (zone du milieu en bleu), ni trop importante (excitation néfaste : zone rose), ni trop faible (endormissement : zone verte). Lorsque qu'on trouve son niveau d'activation, on est alors performant.

Ainsi, lors de l'entraînement, le sportif utilise ce phénomène pour améliorer ses performances. En soumettant son organisme à des contraintes d'activités physiques, soit en quantité, soit en intensité, il va déclencher des facultés d'adaptations et obtenir des changements dans sa morphologie, sa physiologie, sa technicité ... Si ces contraintes sont trop faibles, il n'y aura pas de modifications sensibles, et si elles sont trop fortes, il peut y avoir épuisement des ressources avec régression de son niveau. D'où l'importance d'un programme d'entraînement bien adapté à la personne et spécifique pour chaque sport. Chaque sportif devrait donc s'efforcer d'identifier sa propre zone optimale en identifiant avec quel niveau de stress il a réalisé les meilleures performances. Il lui faudra ensuite à l'aide de techniques de régulation du stress tenter d'atteindre cette zone optimale avant chaque compétition.

QCM

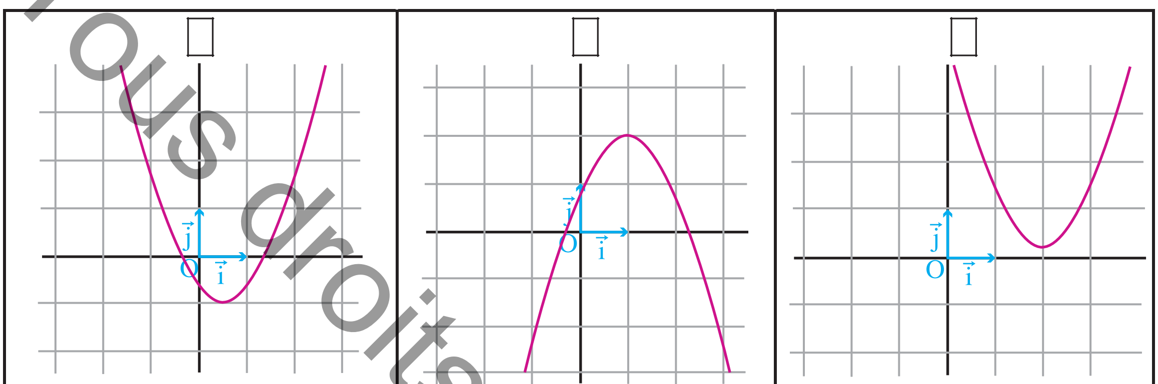
Cocher la réponse exacte.

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$.

   Si l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions et $a > 0$

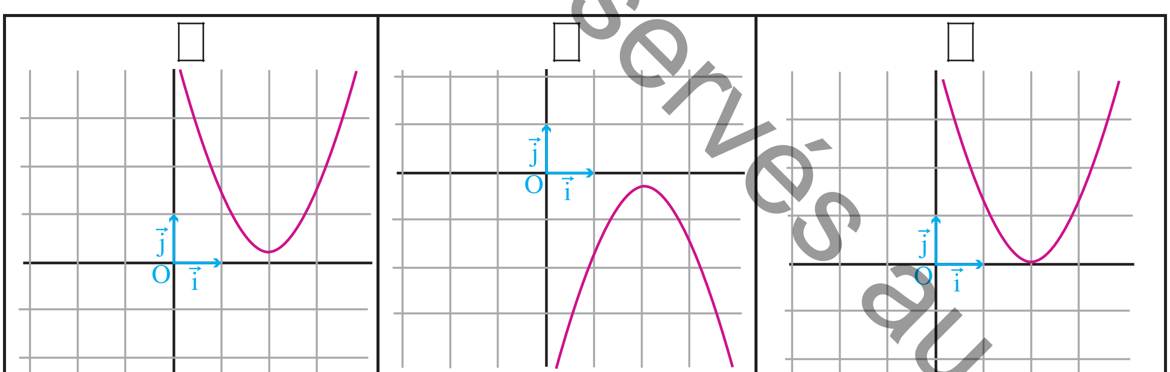
   alors la parabole représentant f a l'allure suivante :

☐ ☐ ☐



2. Si le discriminant Δ du trinôme $f(x)$ est strictement négatif et $a > 0$ alors la parabole représentant f a l'allure suivante.

☐ ☐ ☐



3. Le nombre dérivé en 0 de la fonction f définie par $f(x) = x^3 + x^2 + x$ est égal à

☐ 0 ☐ 1 ☐ 6

4. Soit f la fonction définie sur $]-\infty, 2[\cup]2, +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x}{x-2}$.

☐ $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = 0$ ☐ $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = -\infty$ ☐ $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = +\infty$

5. La tangente à la courbe représentative de la fonction $x \mapsto \frac{3x+1}{x}$ en son point d'abscisse 1 à pour équation

☐ $y=-x+5$ ☐ $y=-x+4$ ☐ $y=x-5$

6. La fonction $x \mapsto x^3+5x-6$ est

☐ strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

☐ strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

☐ n'est pas monotone sur $\mathbb{R}$.

Vrai-Faux

1. La représentation graphique de la fonction dérivée d'une fonction polynôme du second degré est une droite.

2. Soit f une fonction polynôme de degré 3. On note f' sa fonction dérivée. Si la courbe représentative de la fonction dérivée f' est située au dessus de l'axe des abscisses alors f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

3. Soit f la fonction définie par $f(x)=\frac{3-x}{x+3}$.

Si I est un intervalle contenu dans l'ensemble de définition de f alors f est strictement monotone sur I.

4. Dans la figure ci-contre, C_f est la courbe représentative de la fonction f définie par $f(x)=(x-1)(x-3)(x+2)$.

5. Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. La courbe représentative de la fonction f définie par $f(x)=\frac{3-2x}{2x+3}$ est une hyperbole de centre $I\left(\frac{-3}{2}, \frac{3}{2}\right)$.

1 Dresser le tableau de variation de la fonction f sur son ensemble de définition dans chacun des cas suivants :

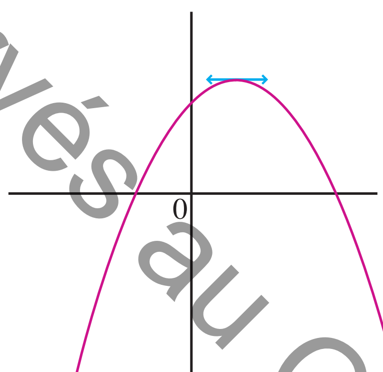
1. $f : x \mapsto 2x^2 - 7x + 1$.
2. $f : x \mapsto 4 - x - x^2$.
3. $f : x \mapsto \frac{4}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 3x + 1$.
4. $f : x \mapsto x^3 + x^2 + x - 3$.
5. $f : x \mapsto \frac{5x-1}{x+3}$.

2 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x + \frac{5}{2}$.

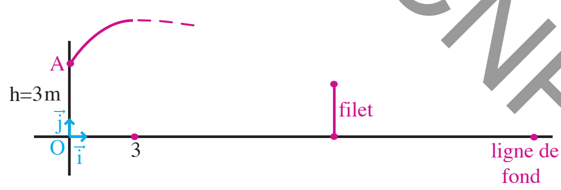
1. Dresser le tableau de variation de f.
2. Soit C_f la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
   a. Déterminer l'intersection de C_f avec l'axe des ordonnées.
   b. Montrer que C_f coupe l'axe des abscisses en deux points A et B que l'on déterminera.
   c. Ecrire une équation de la tangente à C_f en chacun des points A et B.
3. Construire C_f et les tangentes à C_f en A et B.

3 Dans la figure ci-contre, C_f est la courbe représentative dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ de la fonction f définie par $f(x) = \frac{-1}{2}x^2 + x + 2$.

Graduer les axes.



4 Dans cet exercice, nous allons étudier un service lors d'une partie de volley.
Dans tout l'exercice, on assimilera la balle à un point matériel.
La hauteur du filet est $H = 2.43$ m.



Le filet est au centre du terrain, les lignes de fond de chaque camp sont à 9 mètres du filet. Au volley-ball, le joueur qui effectue le service se place derrière la ligne de fond de son camp et frappe la balle à la hauteur h du sol.

Pour simplifier, on supposera que la trajectoire de la balle est située dans le plan de la figure et on négligera la résistance de l'air.

Pour que le service soit bon, il faut que la balle passe au-dessus du filet et, sans être interceptée, touche le sol dans le camp adverse entre le filet et la ligne de fond.

Ici, le joueur se place à 12 mètres du filet, saute verticalement et frappe la balle au point A pour lequel $h = 3$ mètres. Au départ, la trajectoire de la balle fait un angle α avec l'horizontale avec $\alpha = 10°$ vers le haut. La vitesse initiale v_0 de la balle est $v_0 = 18\ m/s$.

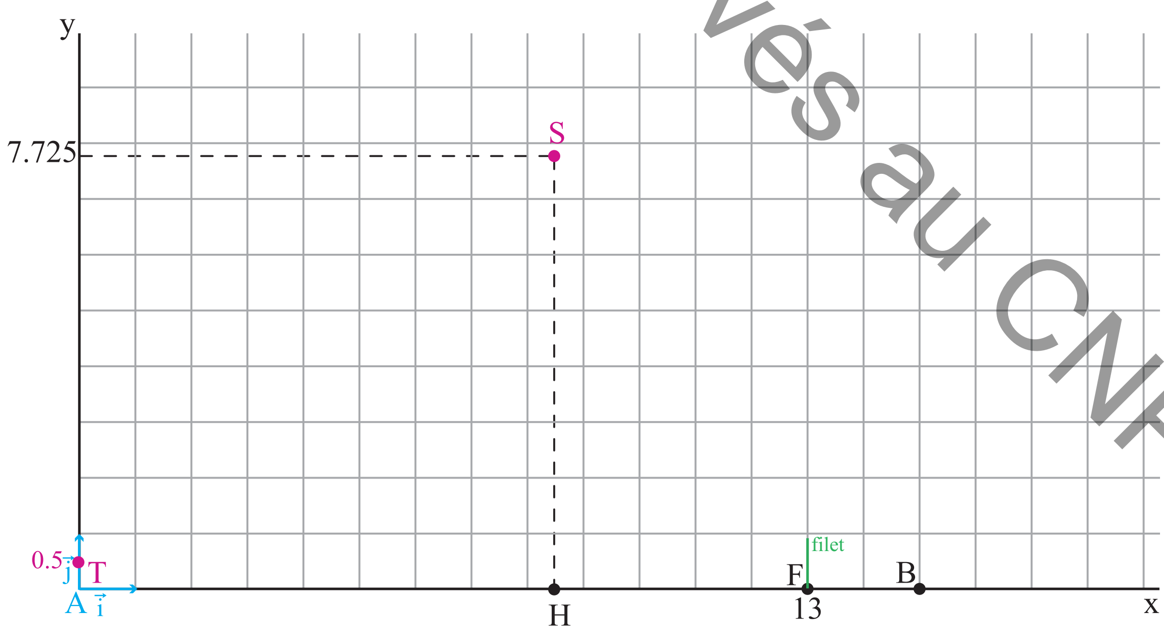
Dans le repère indiqué sur la figure, d'après les lois de la physique, la trajectoire de la balle est régie par l'équation $y = \left(\dfrac{-g}{2(v_0)^2(\cos\alpha)^2}\right)x^2 + \left(\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)x + h$, on prendra $g = 10\ m/s$.

1. La balle passe-t-elle au- dessus du filet ?
2. Si la balle n'est pas interceptée, le service est-il bon ?

***5** Un joueur de tennis A tente de lober son adversaire B, situé à distance $d = 2$ m derrière le filet.

Il frappe la balle en T à la distance $D = 13$ m du filet et à la hauteur $h = 0.5$ m.

L'altitude maximale $(SH = 7.725\ m)$ de la balle est atteinte à la distance $FH = 4.5\,m$ du filet.



La balle est assimilée à un point matériel et on suppose que le mouvement de la balle s'effectue dans le plan (SAB) qu'on le muni du repère orthonormé $(A, \vec{i}, \vec{j})$.

On admet qu'une équation de la trajectoire dans le repère $(A, \vec{i}, \vec{j})$ est de la forme $y = ax^2 + bx + c$ où a, b et c sont trois réels.

1. a. Déterminer les coordonnées des points T, H et S dans le repère $(A, \vec{i}, \vec{j})$.

   b. Montrer que $a = -0.1$, $b = 1.7$ et $c = 0.5$

2. Est-ce que l'adversaire peut intercepter la balle s'il tient sa raquette à bout de bras à une hauteur de 3 m (par rapport au sol).

3. La distance de la ligne de fond à la base de filet vaut $L = 11.885$ m.

   La balle retombe-t-elle sur la surface de jeu ?

6 Soit f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2 - x^2$ et $g(x) = x^3$.

On désigne par C_f et C_g les courbes représentatives respectives de f et g dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. a. Vérifier que pour tout réel x, $g(x) - f(x) = (x-1)(x^2 + 2x + 2)$.

   b. En déduire la position relative des courbes C_f et C_g.

2. a. Etudier les variations des fonctions f et g.

   b. Ecrire une équation de la tangente Δ à C_f au point d'abscisse 1 et une équation de la tangente D à C_g au point d'abscisse 1.

   c. Tracer Δ, D, C_f et C_g.

3. a. Résoudre graphiquement l'inéquation $x^3 + x^2 > 2$.

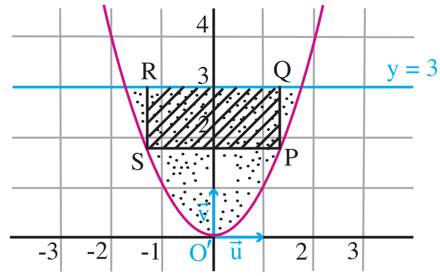
   b. Justifier que pour tout réel x de l'intervalle $[0, 1]$, $3x - 2 \leq x^3 \leq 2 - x^2 \leq 3 - 2x$.

***7** A/ Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 6x - 2x^3$.

On désigne par C_f la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Déterminer l'intersection de C_f avec l'axe des abscisses.
2. Dresser le tableau de variation de f.
3. Tracer C_f.

B/ Dans la portion du plan déterminée par la parabole d'équation $y = x^2$ et la droite d'équation $y = 3$, on veut inscrire, comme l'indique la figure, un rectangle PQRS dont l'aire soit la plus grande possible.



Soit x l'abscisse du point P.

1. a. Donner un encadrement de x.
   b. Déterminer les coordonnées des points P, Q, R et S en fonction de x.
2. Soit $A(x)$ l'aire du rectangle PQRS.
   a. Vérifier que $A(x) = f(x)$.
   b. Déterminer alors l'abscisse du point P pour que l'aire du rectangle PQRS soit maximale.

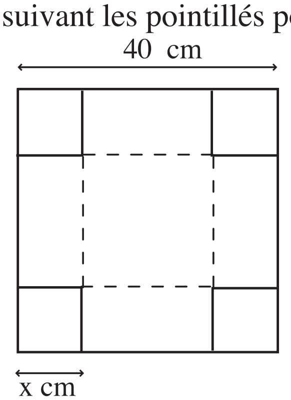
8 Soit f la fonction définie par $f(x) = ax^3 + bx + c$ où a, b et c sont des réels.

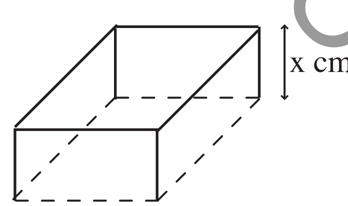
1. Calculer $f'(x)$ en fonction de a et b.
2. On donne ci-contre le tableau de variation de f.
   a. En utilisant le tableau de variation de f, donner $f(-1)$, $f(1)$, $f'(-1)$, $f'(1)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	↗	$\frac{-4}{3}$	↘	$\frac{-8}{3}$	↗	$+\infty$

   b. Montrer que $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x - 2$.
   c. Tracer la courbe C_f de f dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

9 On enlève des coins carrés, de côté x, à une feuille de carton carrée de côté 40 cm. On replie suivant les pointillés pour obtenir une boite (sans couvercle).





1. a. Justifier que $x \in]0, 20[$.

b. Exprimer le volume $V(x)$ de cette boite en fonction de x.

2. a. Etudier les variations de la fonction $V : x \mapsto V(x)$.

b. En déduire la valeur de x pour laquelle le volume de la boite est maximal et calculer ce volume.

10 Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{3x-2}{x-1}$ et C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Déterminer l'ensemble de définition D_f de f.

2. a. Montrer que C_f coupe la droite d'équation $y = 4$ en un seul point A que l'on précisera.

b. Ecrire une équation de la tangente Δ à C_f en A.

3. Etudier f et tracer C_f. (On précisera la tangente en A).

4. a. Déterminer, graphiquement, l'ensemble des réels x tels que $3 < f(x) < 4$.

b. Utiliser le graphique et la question précédente pour déterminer les entiers naturels n tels que $\frac{3n-2}{n-1} \in \mathbb{N}$.

11 1. Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{1}{x-1}$.

Etudier f et tracer sa courbe C_f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

2. Soit Δ la droite d'équation $y = \frac{1}{2}x$.

a. Déterminer les abscisses des points d'intersection de C_f et Δ.

b. Résoudre, en utilisant C_f et Δ, l'inéquation $\frac{2}{x-1} < x$.

3. Soit t un réel différent de 1 et M le point de C_f d'abscisse t.

On désigne par N le projeté orthogonal de M sur l'axe des abscisses et par B le point de coordonnées $(1, 0)$. Montrer que l'aire du triangle BMN est indépendante de t.

12 Soit f la fonction définie par $f(x)=\dfrac{2x}{x-1}$.

On désigne par C_f la courbe de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)$.
3. Dresser le tableau de variation de f.
4. Ecrire une équation de la tangente T à C_f au point O origine du repère.
5. Tracer C_f et T.
6. Soit α un réel distinct de 1 et Δ_α la tangente à C_f au point d'abscisse α.

   Justifier qu'une équation de Δ_α est $y=\dfrac{-2}{(\alpha-1)^2}(x-\alpha)+\dfrac{2\alpha}{\alpha-1}$.
7. a. Que représente le point $I(1, 2)$ pour la courbe C_f.

   b. Existe-t-il un point de C_f en lequel la tangente passe par le point I ?

13 A/ Soit la fonction $f : x \mapsto \dfrac{25x+10}{x+5}$.

Etudier f et tracer sa courbe dans un repère orthogonal.

B/ L'évolution de la population d'une citée au cours du temps est donnée par $N(t)=\dfrac{25t+10}{t+5}$ où t est le temps écoulé depuis 2000 (exprimé en années) et $N(t)$ est le nombre d'habitants (en milliers).

1. Calculer le nombre d'habitants de cette citée au début de 2000 et au début de 2015.
2. Le nombre d'habitants de cette citée dépassera-il 25 000 ?
3. Le rythme de croissance (exprimé en milliers d'habitants par an) en une année t_0 est donné par $\lim\limits_{t\to t_0}\dfrac{N(t)-N(t_0)}{t-t_0}$.

   a. Calculer le rythme de croissance en 2010 et en 2015.

   b. Déterminer à quel moment le rythme de croissance sera égal à 0.115 milliers (115 habitants de plus par an).

14 A/ Soit la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x}{x+1}$ et C_f la courbe de f dans un repère orthonormé.

1. a. Ecrire une équation de la tangente Δ à C_f au point d'abscisse 0.

   b. Etudier la position relative de C_f et Δ.

2. Tracer C_f et Δ.

B/ Un automobiliste a l'habitude d'acheter du carburant avec la somme 50 DT par semaine. Si le prix P d'un litre du carburant augmente t %, alors le volume du carburant acheté avec 50 DT va diminuer d'un taux de u %.

On note $x = \dfrac{t}{100}$ et $y = \dfrac{u}{100}$.

1. Calculer u lorsque $t = 20$.
2. Soit V_1 le volume de carburant obtenu avec 50 DT avant l'augmentation et V_2 le volume obtenu avec 50 DT après l'augmentation.

   a. Exprimer V_1 à l'aide de P et justifier que $V_2 = \dfrac{50}{(x+1).P}$

   b. En déduire que $y = \dfrac{x}{x+1}$.

   c. Utiliser la partie A/ pour justifier que $u \leq t$.

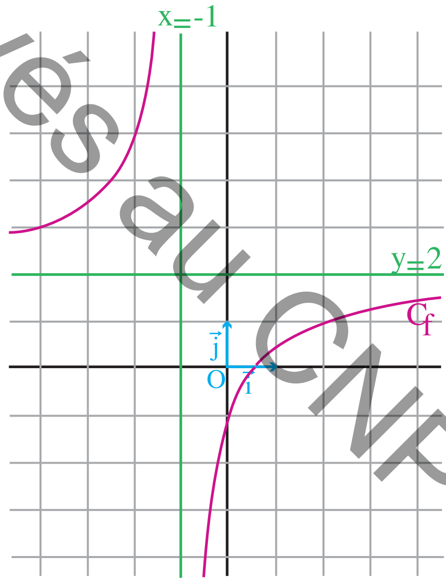
   d. A partir de quel taux d'augmentation obtient-on $V_2 < \dfrac{3}{4}V_1$?

15 Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{ax+b}{x+c}$

où a, b et c sont des réels.

Dans la figure ci-contre on a représenté C_f, la courbe de la fonction f, dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

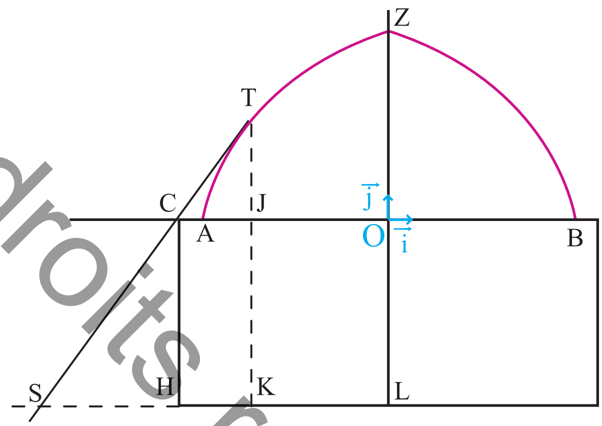
En utilisant des renseignements fournis par la courbe C_f, justifier que pour tout $x \in D_f$, $f(x) = \dfrac{2x-1}{x+1}$.



16 A/ Soit la fonction $f : x \mapsto \dfrac{ax+b}{x+12}$ où a et b sont deux réels.

Montrer que pour tout x de $]-\infty, -12[\cup]-12, +\infty[$, $f'(x) = \dfrac{12a-b}{(x+12)^2}$.

B/ La coupe d'un bâtiment annexe d'un ensemble architectural se présente comme sur la figure ci-dessous.
La coupe du dôme est constituée par deux arcs d'hyperbole parfaitement symétriques.



O est le milieu de $[AB]$.

Dans le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ indiqué sur la figure, l'arc d'hyperbole situé entre A et Z a une équation de la forme $y = \dfrac{ax+b}{x+12}$.

La droite (SC) est tangente à la courbe au point T.

On donne $AB = 16\,m$, $AC = 1\ m$, $CT = 5\ m$, $HC = 8\ m$ et $HS = 6\ m$.

1. Donner les coordonnées du point A. En déduire que $b = 8a$.
2. Donner les coordonnées des points S et C, en déduire que la pente de la droite (ST) est égale à $\dfrac{4}{3}$
3. a. Montrer que $CS = 10\ m$. On pourra utiliser le théorème de Pythagore.
   b. En déduire que $CK = 3\ m$ puis que $CJ = 3\ m$. On pourra utiliser le théorème de Thalès.
4. a. Déterminer l'abscisse du point J. En déduire que $12a - b = 48$.
   b. Déterminer alors les valeurs des réels a et b.
5. Calculer la hauteur totale LZ du bâtiment.
6. A quelle hauteur le dôme-a-t-il un diamètre égal à 8 m ?

Correction de l'exercice 5 :

1. a. • $T\left(0,\frac{1}{2}\right)$.

• Des hypothèses $AF=13$ et $FH=4.5$ on déduit que $H(8.5\,,0)$ et par la suite $S(8.5,\,7.725)$.

b. Posons $f(x)=ax^2+bx+c$, ainsi la trajectoire de la balle dans le repère $(A,\vec{i},\vec{j})$ est la représentation graphique d'une restriction de f.

De l'hypothèse, le joueur A frappe la balle en T, on déduit que $f(0)=\frac{1}{2}$, ce qui donne $c=\frac{1}{2}$.

On sait que la courbe représentative de f est une parabole de sommet le point de coordonnées $\left(\frac{-b}{2a},f\left(\frac{-b}{2a}\right)\right)$.

Or $S(8.5\,,7.725)$ et l'altitude maximale de la balle est atteinte en S.

Alors $\begin{cases}\frac{-b}{2a}=8.5 & ① \\ f(8.5)=7.725 & ②\end{cases}$

L'égalité ① donne $b=-17a$. L'égalité ② s'écrit $(8.5)^2a+(8.5)b+0.5=7.725$

On remplace b par $(-17a)$, on trouve $-72.25\,a=7.225$. Par suite $a=-0.1$

Comme $b=-17a$ alors $b=1.7$

Conclusion : $f(x)=-0.1x^2+1.7x+0.5$

2. Le joueur B est situé à une distance de 2 m derrière le filet.

Par la suite l'abscisse du point B dans le repère $(A,\vec{i},\vec{j})$ est 15.

Au niveau du joueur B la balle a une altitude égale à $f(15)$. Or $f(15)=3.5$ et $3.5>3$.

Ainsi le joueur B ne peut pas intercepter la balle s'il tient sa raquette à bout de bras à une hauteur de 3 m par rapport au sol.

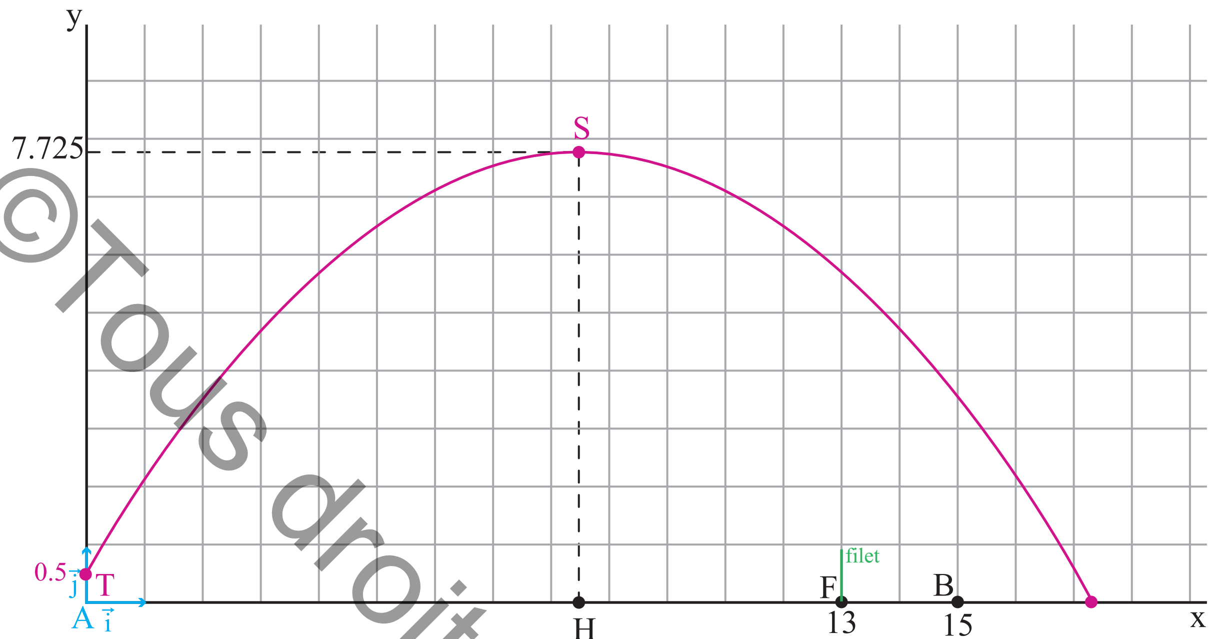
3. Il suffit de trouver l'abscisse positive du point d'intersection de la trajectoire avec l'axe des abscisses.

$f(x)=0$ équivaut à $-0.1x^2+1.7x+0.5=0$ équivaut à $x^2-17x-5=0$.

$\Delta=309$. $x_1=\frac{17-\sqrt{309}}{2}<0$ et $x_2=\frac{17+\sqrt{309}}{2}>0$.

Une valeur approchée de x_2 est 17.29

Or $AF+11.885=24.885$ et $17.29<24.885$. Alors la balle retombe sur la surface de jeu.



Correction de l'exercice 7 :

A/ 1. Il suffit de résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x)=0$.

$$f(x)=6x-2x^3=2x\left(3-x^2\right)=2x\left(\sqrt{3}-x\right)\left(\sqrt{3}+x\right).$$

Ainsi $C_f \cap (x'x)=\left\{A_1\left(-\sqrt{3}\,,0\right), O\,, A_2\left(\sqrt{3}\,,0\right)\right\}.$

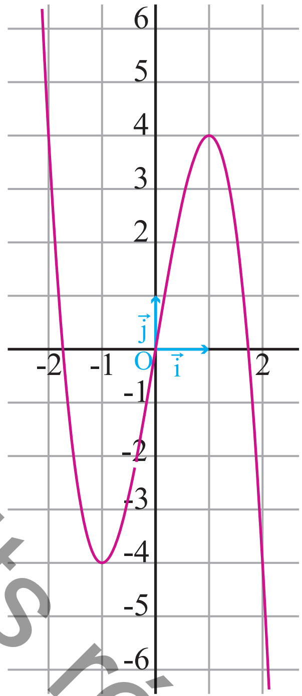
2. • $D_f=\mathbb{R}$.

• $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$.

• La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x , $f'(x)=6-6x^2=6\left(1-x^2\right)$.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
f	$+\infty$	$\searrow$	-4	$\nearrow$	4	$\searrow$	$-\infty$

3. C_f admet deux branches paraboliques de direction celle de l'axe des abscisses.



B/ 1. a. La droite d'équation $y = 3$ coupe la parabole (P) aux points d'abscisses $-\sqrt{3}$ et $\sqrt{3}$.
Comme P est un point de (P) situé au dessous de la droite d'équation $y = 3$ et d'abscisse positive alors $x \in \left]0, \sqrt{3}\right[$.

b. $P\left(x, x^2\right)$, $Q(x, 3)$, $R(-x, 3)$ et $S\left(-x, x^2\right)$.

2. a. $A(x) = PS \times PQ$.

$$PS = \sqrt{(-x-x)^2 + \left(x^2 - x^2\right)^2} = \sqrt{(2x)^2} = |\,2x\,| = 2x.$$

$$PQ = \sqrt{(-x-x)^2 + \left(3 - x^2\right)^2} = \sqrt{\left(3-x^2\right)^2} = \left|3 - x^2\right| = 3 - x^2 \ \left(\text{car } x^2 < 3\right).$$

Par suite $A(x) = 2x\left(3 - x^2\right) = 6x - 2x^3 = f(x)$.

b. La fonction f admet un maximum sur l'intervalle $\left]0, \sqrt{3}\right[$ égal à 4 (attient en 1).
Par suite l'aire $A(x)$ est maximale lorsque P est le point de la parabole d'abscisse 1.
C'est à dire de coordonnées $(1, 1)$.

Chapitre 2

Solution(s) d'une équation du type $f(x)=k$

Aperçu historique

Le théorème des valeurs intermédiaires était connu de Alexis Clairaut Claude mathématicien , astronome et géophysicien français (1713 - 1765) .

le texte ci-après extrait de ses éléments d'Algèbre, en est un témoignage. Mais la démonstration intuitive avancée n'est pas rigoureuse comme le dénoncera Bolzano en 1817, puis Dedekind (1831-1916).

« … à savoir que toute ligne continue à courbure simple dont les ordonnées sont d'abord positives, puis négatives, doit nécessairement couper l'axe des abscisses en un point situé entre ces deux ordonnées.»

Activité 1

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=(2x-3)^3$.

1. Montrer que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

2. a. Montrer que pour tout réel x, $f(x)-8=(2x-5)(4x^2-8x+7)$.

b. En déduire l'ensemble de solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation $f(x)=8$.

Activité 2

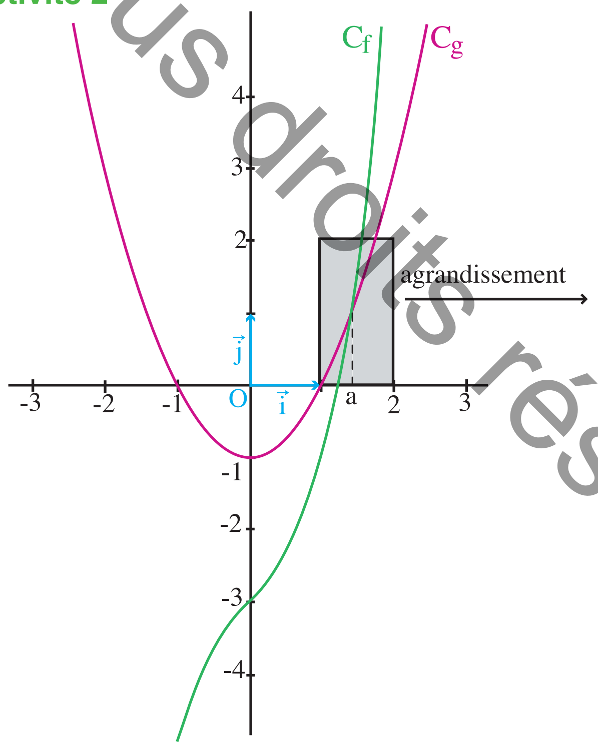


Figure 1

Figure 2

Dans la figure 1 on a représenté les courbes C_f et C_g des deux fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^3+x-3$ et $g(x)=x^2-1$.

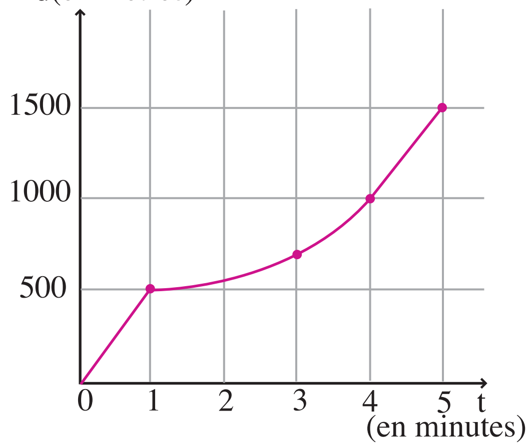
Le réel a désigne l'abscisse du point d'intersection des deux courbes C_f et C_g .

1. Utiliser les graphiques précédents pour donner un encadrement de a d'amplitude 0.1

2. Justifier que le réel a est une solution dans $\mathbb{R}$ de l'équation $x^3-x^2+x=2$.

I. Image d'un intervalle par une fonction continue

Activité 1



Un coureur effectue un trajet de 1500 mètres en 5 minutes.

La fonction f exprimant la distance parcourue en fonction du temps est représentée ci-contre.

1. Déterminer la distance parcourue au bout de la première minute.
2. Déterminer la distance parcourue pendant la dernière minute.
3. Déterminer la distance parcourue entre la première et la quatrième minute.

Activité 2

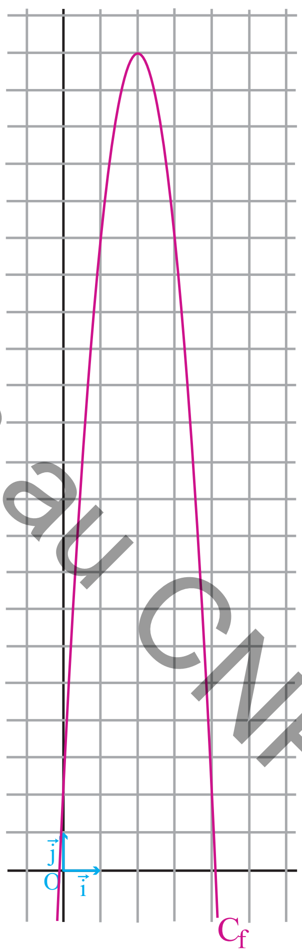
Dans la figure ci-contre on a représenté la fonction

$f : x \mapsto -5x^2 + 20x + 2.05$

Un tireur à l'arc lance une flèche avec une vitesse initiale de 20 mètres par seconde.

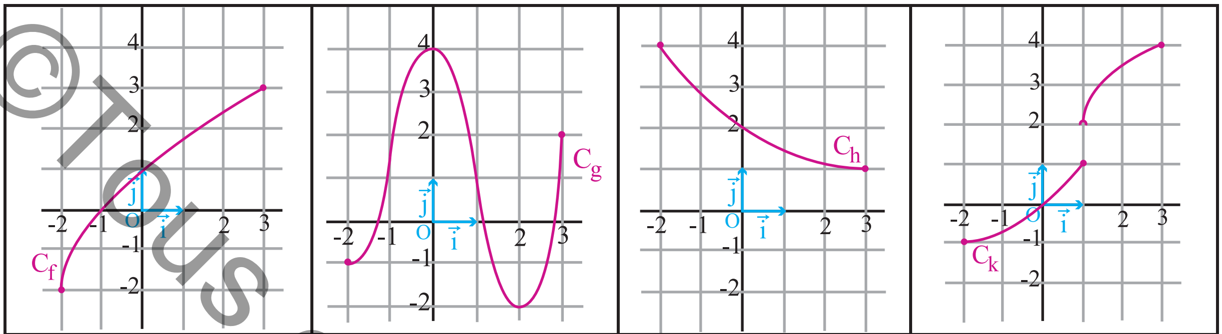
Pendant le mouvement, l'altitude h en mètres de la flèche à l'instant t (en seconde) est donnée par $h(t) = f(t)$.

1. a. Déterminer l'altitude de la flèche à l'instant du lancement.
   b. A quel instant la flèche sera à une altitude égale à celle du point de départ ?
2. a. Vérifier que $h(t) = -5(t-4.1)(t+0.1)$
   b. Déterminer l'instant où la flèche frappe le sol.
3. Quelle est l'altitude maximale atteinte par la flèche ?
4. Déterminer un encadrement de l'altitude de cette flèche à un instant compris entre $t = 0$ seconde et $t = 3$ secondes.



Activité 3

Dans les graphiques ci-dessous C_f , C_g , C_h et C_k sont les courbes représentatives de quatre fonctions f, g, h et k définies sur l'intervalle $[-2, 3]$.



1. Indiquer les fonctions continues sur $[-2, 3]$.
2. Déterminer l'image de l'intervalle $[-2, 3]$ par chacune des fonctions f, g, h et k.

Définition

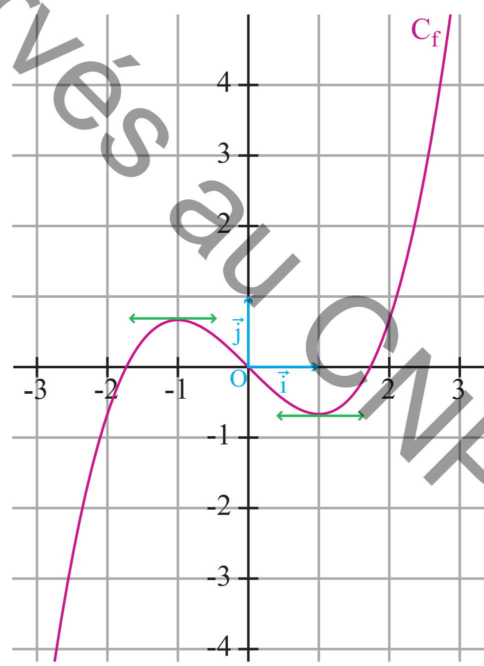
Soit f une fonction définie sur un intervalle I.
On appelle image de l'intervalle I par la fonction f l'ensemble des réels $f(x)$ tels que x appartient à I, que l'on note $f(I)$.

Théorème admis

L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.

Activité 4

Dans la figure ci-contre, on a représenté dans un repère orthonormé la courbe représentative de la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{3}x^3 - x$



1. a. Déterminer les coordonnées des points d'intersection de C_f avec l'axe des abscisses.
   b. Déterminer $f\left(\left[-\sqrt{3}, \sqrt{3}\right]\right)$.
2. Préciser les images des intervalles $]-\infty, -1]$, $[-1,1]$ et $[1, +\infty[$ par la fonction f et les comparer respectivement aux intervalles $\left]\lim_{x \to -\infty} f(x), f(-1)\right]$, $[f(1), f(-1)]$ et $\left[f(1), \lim_{x \to +\infty} f(x)\right[$.

Intervalle I	Si f est continue et strictement croissante sur I	Si f est continue et strictement décroissante sur I
$I=[a,b]$	$f(I)=[f(a),f(b)]$	$f(I)=[f(b),f(a)]$
$I=[a,b[\ (a\in\mathbb{R},\ b\in\mathbb{R})$	$f(I)=[f(a),\lim\limits_{b^-}f[$	$f(I)=]\lim\limits_{b^-}f,f(a)]$
$I=]a,b[\ (a\in\mathbb{R},\ b\in\mathbb{R})$	$f(I)=]\lim\limits_{a^+}f,\lim\limits_{b^-}f[$	$f(I)=]\lim\limits_{b^-}f,\lim\limits_{a^+}f[$
$I=[a,+\infty[\ (a\in\mathbb{R})$	$f(I)=[f(a),\lim\limits_{+\infty}f[$	$f(I)=]\lim\limits_{+\infty}f,f(a)]$
$I=]-\infty,a]\ (a\in\mathbb{R})$	$f(I)=\left]\lim\limits_{-\infty}f,\ f(a)\right]$	$f(I)=\left[f(a),\ \lim\limits_{-\infty}f\right[$
$I=]a,+\infty[\ (a\in\mathbb{R})$	$f(I)=\left]\lim\limits_{a^+}f,\ \lim\limits_{+\infty}f\right[$	$f(I)=\left]\lim\limits_{+\infty}f,\lim\limits_{a^+}f\right[$
$I=]-\infty,\ a[\ (a\in\mathbb{R})$	$f(I)=\left]\lim\limits_{-\infty}f,\lim\limits_{a^-}f\right[$	$f(I)=\left]\lim\limits_{a^-}f,\ \lim\limits_{-\infty}f\right[$

Activité 5

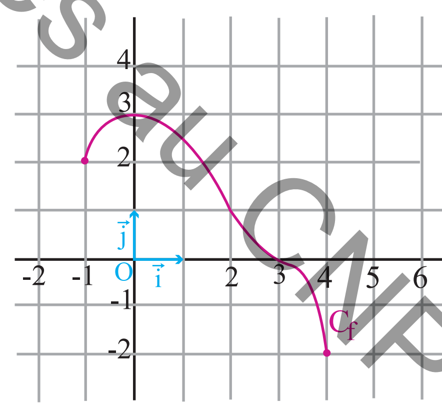
Déterminer, dans chaque cas, l'image de l'intervalle I par la fonction f .

1. $f: x \mapsto -x^2+3x+1$, $\quad I=[0,\ 1]$.
2. $f: x \mapsto x^3+3x^2+3x-2$, $\quad I=[-2,\ +\infty[$.
3. $f: x \mapsto \dfrac{4x-1}{x-1}$, $\quad I=]-\infty,\ 0]$.

II. Théorème des valeurs intermédiaires

Activité 1

Dans la figure ci-contre C_f est la représentation graphique d'une fonction f définie sur l'intervalle $[-1,\ 4]$.



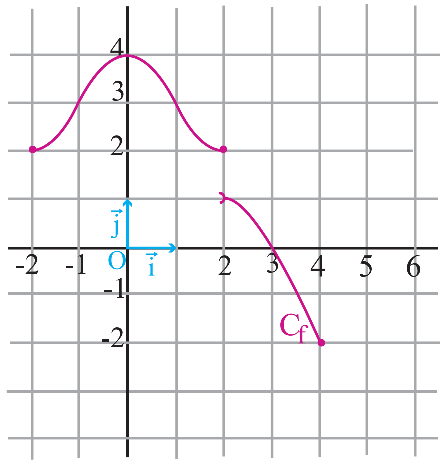
1. f est-elle continue sur $[-1,\ 4]$?
2. Donner la solution de l'équation $f(x)=0$.
3. a. Donner $f(0)$ et $f(2)$.

   b. Soit k un réel de l'intervalle $[1,\ 3]$.

   Discuter suivant les valeurs de k le nombre de solutions de l'équation $f(x)=k$.

Activité 2

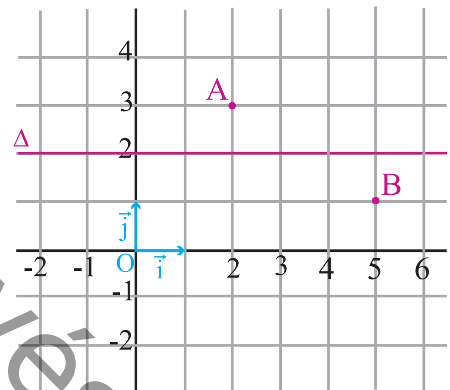
Dans la figure ci-contre C_f est la représentation graphique d'une fonction f définie sur l'intervalle $[-2, 4]$.



1. f est-elle continue sur $[-2, 4]$?
2. Résoudre graphiquement les équations :
   a. $f(x) = 0$.
   b. $f(x) = 3$.
3. a. Donner $f(0)$ et $f(3)$.
   b. Soit k un réel de l'intervalle $[0, 4]$.
   Discuter suivant les valeurs de k le nombre de solutions de l'équation $f(x) = k$.

Activité 3

Dans la figure ci-contre, A et B sont les points de coordonnées respectives $(2, 3)$ et $(5, 1)$.



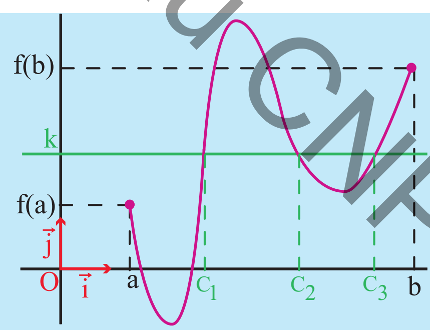
1. Tracer la courbe d'une fonction définie sur $[0, 6]$ qui passe par les points A et B sans couper la droite Δ.
2. Peut-on tracer la courbe d'une fonction continue sur l'intervalle $[0, 6]$ qui passe par les points A et B sans couper Δ ?

Théorème admis

Soit f une fonction continue sur un intervalle I.

Soit a et b deux réels de I tels que $a < b$.

Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$ l'équation $f(x) = k$ possède au moins une solution dans l'intervalle $[a, b]$.



Activité 4

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x + 1$.

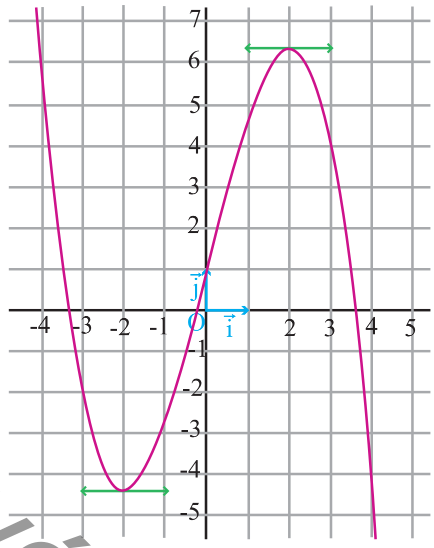
1. a. Calculer $f(2)$ et $f(3)$.

b. Montrer que l'équation $f(x) = 10$ admet au moins une solution dans l'intervalle $]2, 3[$.

2. Montrer que l'équation $x^3 - 3x + 1 = 0$ admet au moins une solution dans l'intervalle $]-2, -1[$.

Activité 5

Dans la figure ci-contre on a représenté la fonction f définie par $f(x) = \frac{-1}{3}x^3 + 4x + 1$.



1. Déterminer le nombre de solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation $f(x) = 2$.

2. a. Déterminer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 2$ sur chacun des intervalles $[-4, -2]$, $[-2, 2]$ et $[2, 4]$.

b. Déterminer le sens de variation de f sur chacun des intervalles $]-\infty, -2]$, $[-2, 2]$ et $[2, +\infty[$.

Théorème

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I.

Soit a et b deux réels de I tels que $a < b$. Alors pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$ l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution dans $[a, b]$.

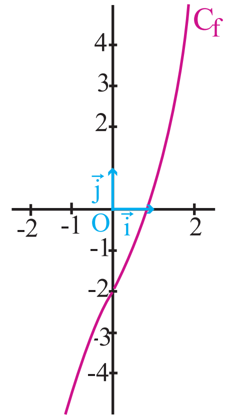
Activité 6

Montrer que l'équation $x^3 + x - 1 = 0$ admet une solution unique dans l'intervalle $[0, 1]$.

Activité 7

La courbe représentée ci-contre est celle de la fonction

$f : x \mapsto \frac{1}{2}x^3 + 2x - 2$.

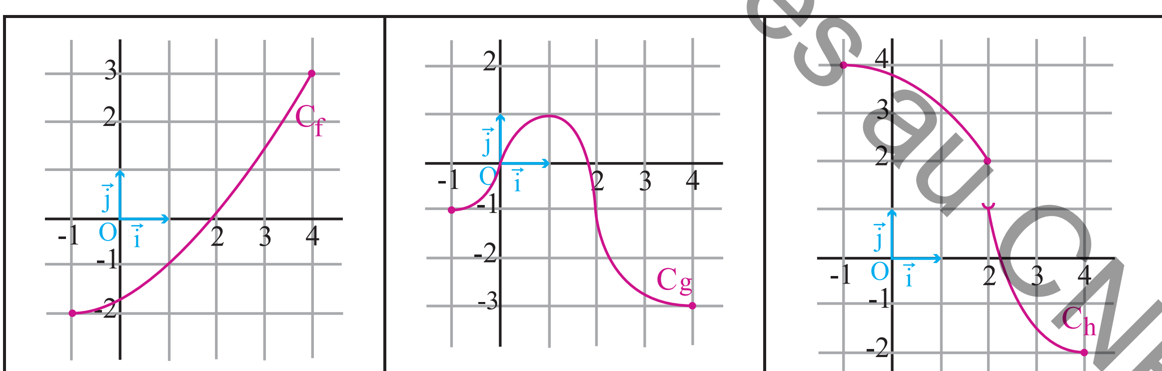


1. Justifier la continuité de f sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $[0,1]$.
3. On se propose de trouver un encadrement de plus en plus précis de α, en divisant à chaque fois l'intervalle contenant α en deux intervalles de même amplitude.
   (Ce procédé est appelé « méthode de dichotomie »).
   a. Calculer $f\left(\frac{1}{2}\right)$ et en déduire que α appartient à l'intervalle $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$.
   b. Calculer $f\left(\frac{3}{4}\right)$ et en déduire que α appartient à l'intervalle $\left[\frac{3}{4}, 1\right]$.
   c. Poursuivre le procédé pour déduire un encadrement de α d'amplitude 10^{-1}.
   d. Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.

III. Fonction réciproque

Activité 1

Dans les figures ci-dessous C_f, C_g et C_h sont les courbes respectives de trois fonctions f, g et h définies sur l'intervalle $[-1, 4]$.



1. a. Déterminer $f([-1, 4])$.
   b. Déterminer le nombre de solutions de chacune des équations suivantes :
   $f(x) = 0$, $f(x) = \frac{-1}{2}$, $f(x) = 2$ et $f(x) = 3$.

2. a. Déterminer $g([-1, 4])$.

   b. Soit k un réel de l'intervalle $[-3, 1]$.

   Déterminer, suivant les valeurs de k, le nombre de solutions de l'équation $g(x)=k$.

3. a. Déterminer $h([-1, 4])$.

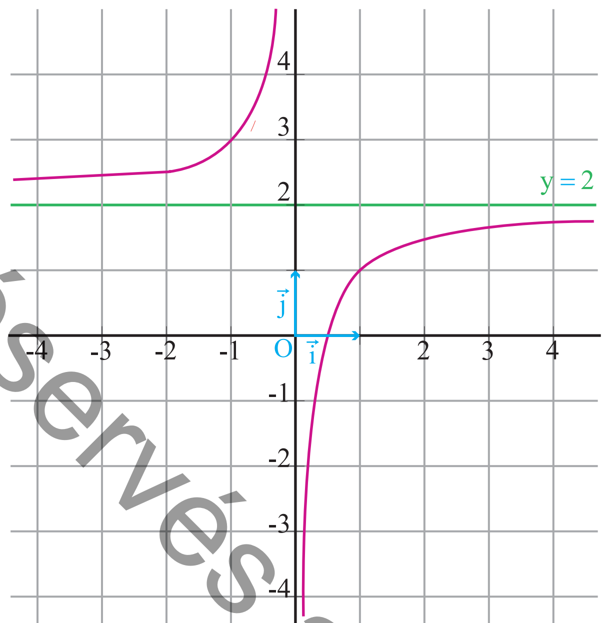
   b. Déterminer le nombre de solutions de l'équation $h(x)=\frac{3}{2}$.

   c. Soit k un réel de l'ensemble $[-2, 1[\cup[2, 4]$.

   Déterminer, suivant les valeurs de k, le nombre de solutions de l'équation $h(x)=k$.

Activité 2

Dans la figure ci-contre on a représenté la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x)=\frac{2x-1}{x}$.



1. Déterminer $f(]-\infty, 0[)$ et $f(]0, +\infty[)$.
2. Déterminer le nombre de solutions de l'équation $f(x)=k$ dans chacun des cas suivants :

   a. $k>2$.

   b. $k<2$.

Définition

Soit f une fonction strictement monotone sur un intervalle I.
Alors pour tout réel k de l'ensemble $f(I)$, l'équation $f(x)=k$ admet une unique solution dans I.
Dans ce cas on dit que la fonction f réalise une bijection de l'intervalle I sur l'ensemble $f(I)$.

Activité 3

Soit f la fonction définie sur $]-1, +\infty[$ par $f(x)=\frac{4x-1}{x+1}$.

Montrer que f réalise une bijection de $]-1, +\infty[$ sur $]-\infty, 4[$.

Activité 4

Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{4}x^2 + 1$.

1. a. Déterminer $f([0, +\infty[)$.

   b. Résoudre dans $[0, +\infty[$ l'équation $f(x) = 5$.

2. Montrer que pour tout réel k de l'intervalle $[1, +\infty[$, l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution x dans l'intervalle $[0, +\infty[$ et que $x = 2\sqrt{k-1}$.

3. Soit g la fonction définie sur $[1, +\infty[$ par $g(x) = 2\sqrt{x-1}$.

   a. Que représente le réel $g(5)$ pour l'équation $f(x) = 5$?

   b. Déterminer la solution dans $[0, +\infty[$ de chacune des équations suivantes :

   • $f(x) = 4$ • $f(x) = 2$ • $f(x) = 11$

4. Calculer $f(g(2))$, $f(g(11))$, $g(f(4))$.

Définition

Soit f une bijection d'un intervalle I sur $f(I)$. On appelle fonction réciproque de f et on note f^{-1} la fonction définie sur $f(I)$ qui à tout k de $f(I)$ associe l'unique solution dans I de l'équation $f(x) = k$.

Conséquence

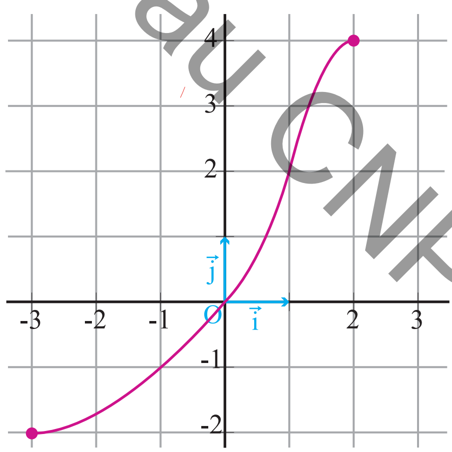
Soit f une bijection d'un intervalle I sur $f(I)$ et f^{-1} sa fonction réciproque.

Pour tout x de I et tout k de $f(I)$, $f(x) = k$, si et seulement si, $f^{-1}(k) = x$.

$f^{-1}(f(x)) = x$, pour tout x de I et $f(f^{-1}(k)) = k$, pour tout k de $f(I)$.

Activité 5

Dans la figure ci-contre on a représenté, la courbe représentative d'une fonction f définie sur $[-3, 2]$.



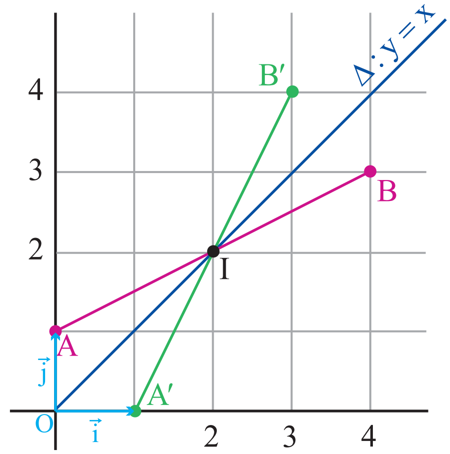
1. Justifier que f réalise une bijection de l'intervalle $[-3, 2]$ sur un intervalle J que l'on précisera.

2. Déterminer les images des réels $-2, -1, 0, 2$ et 4 par f^{-1}.

Activité 6

Dans la figure ci-contre :

- Le segment $[AB]$ est la représentation graphique, dans un repère orthonormé de la fonction f définie sur $[0, 4]$ par $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$.
- Δ est la droite d'équation $y = x$.
- Le segment $[A'B']$ est le symétrique du segment $[AB]$ par rapport à Δ.



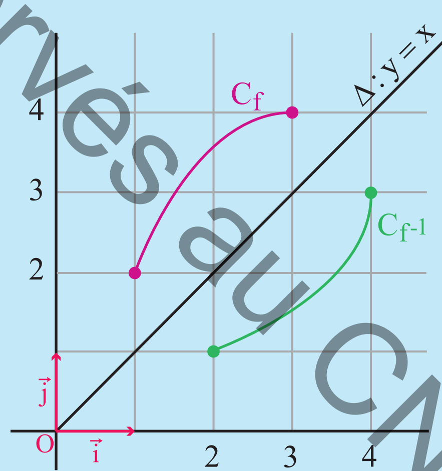
1. Déterminer les coordonnées des points A, A', B, B' et I.
2. a. Montrer que f réalise une bijection de l'intervalle $[0, 4]$ sur l'intervalle $[1, 3]$.

   b. Soit f^{-1} la fonction réciproque de f.
   Montrer que pour tout $x \in [1, 3]$, $f^{-1}(x) = 2x - 2$.

   c. Justifier que la représentation graphique de f^{-1} est le segment $[AA']$.
3. Dresser le tableau de variation de chacune des fonctions f et f^{-1}.

Théorème

Les courbes respectives d'une bijection f et de sa réciproque f^{-1} dans un repère orthonormé sont symétriques par rapport à la droite $\Delta : y = x$.



Conséquence

Si f est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I alors sa réciproque f^{-1} est continue et strictement monotone sur l'intervalle $f(I)$ et varie dans le même sens que f.

IV Réciproques des fonctions usuelles

Activité 1

On considère les fonctions suivantes : $f_1 : x \mapsto x$, $f_2 : x \mapsto x^2$, $f_3 : x \mapsto x^3$.

On note C_1, C_2 et C_3 leurs courbes représentatives respectives dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Tracer C_1, C_2 et C_3.
2. Montrer que la fonction f_1 réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.
3. Déterminer $f_1^{-1}(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.
4. Soit g_2 la restriction de f_2 à l'intervalle $[0, +\infty[$.
   a. Montrer que la fonction g_2 réalise une bijection de $[0, +\infty[$ sur $[0, +\infty[$.
   b. Déterminer $g_2^{-1}(x)$ pour $x \in [0, +\infty[$.
5. a. Montrer que la fonction f_3 réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.
   b. Utiliser le théorème des valeurs intermédiaire pour trouver un encadrement d'amplitude 0.1 de chacun des nombres suivants : $f_3^{-1}(2)$, $f_3^{-1}(6)$ et $f_3^{-1}(-2)$.
6. Tracer dans le même repère les courbes représentatives des fonctions f_1^{-1}, g_2^{-1} et f_3^{-1}.

- La fonction racine carrée $(x \mapsto \sqrt{x})$ est définie sur l'intervalle $[0, +\infty[$.
  Dans les calculatrices, on trouve la touche $\sqrt{\ }$ qui est réservée pour les réels positifs.
- La solution de l'équation $x^3 = a$, $a \geq 0$ se note $\sqrt[3]{a}$ et s'obtient à l'aide d'une calculatrice par la touche $\sqrt[3]{\ }$ appelée racine cubique ou racine troisième.
  Cette touche est aussi réservée pour les réels positifs .

Activité 2

On considère la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{x}$.

On note C sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Tracer C.
2. a. Montrer que la fonction f réalise une bijection de $]0, +\infty[$ sur $]0, +\infty[$.
   b. Vérifier que pour tout $x \in]0, +\infty[$, $f^{-1}(x) = \frac{1}{x}$.
   c. Que représente la droite Δ d'équation $y = x$ pour la courbe C ?

Image d'un intervalle

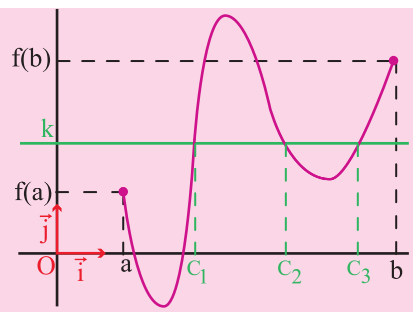
Soit f une fonction définie sur un intervalle I.
On appelle image de l'intervalle I par la fonction f l'ensemble des réels $f(x)$ tels que x appartient à I, que l'on note $f(I)$.

Théorème des valeurs intermédiaires

Soit f une fonction continue sur un intervalle I.

Soit a et b deux réels de I tels que $a < b$.

Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$ l'équation $f(x) = k$ possède au moins une solution dans l'intervalle $[a,b]$.



Solution d'une équation du type $f(x) = k$

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I.

Soit a et b deux réels de I tels que $a < b$. Alors pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$ l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution dans $[a,b]$.

Bijection

Soit f une fonction strictement monotone sur un intervalle I.
Alors pour tout réel k de l'ensemble $f(I)$, l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution dans I.
Dans ce cas on dit que la fonction f réalise une bijection de l'intervalle I sur l'ensemble $f(I)$.

Fonction réciproque

Soit f une bijection d'un intervalle I sur $f(I)$. On appelle fonction réciproque de f et on note f^{-1} la fonction définie sur $f(I)$ qui à tout k de $f(I)$ associe l'unique solution dans I de l'équation $f(x) = k$.

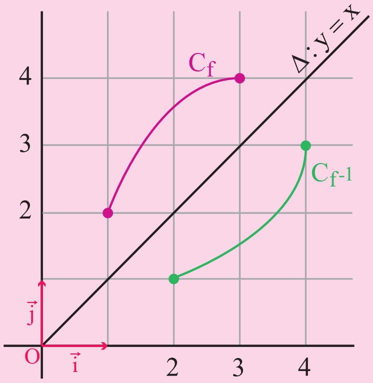
Soit f une bijection d'un intervalle I sur $f(I)$ et f^{-1} sa fonction réciproque.

Pour tout x de I et tout k de $f(I)$, $f(x) = k$, si et seulement si, $f^{-1}(k) = x$.

$f^{-1}(f(x)) = x$, pour tout x de I et $f\left(f^{-1}(k)\right) = k$, pour tout k de $f(I)$.

Courbe de la fonction réciproque

Les courbes respectives d'une bijection f et de sa réciproque f^{-1} dans un repère orthonormé sont symétriques par rapport à la droite $\Delta : y = x$.



Continuité et sens de variation d'une fonction réciproque

Si f est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I alors sa réciproque f^{-1} est continue et strictement monotone sur l'intervalle $f(I)$ et varie dans le même sens que f.

Activité

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^3 - x - 3$.

On désigne par C_f la courbe représentative de f dans un repère orthonormé .

1. Tracer C_f à l'aide d'un traceur de courbes (GéoGebra, Sine qua non, Graphe easy,..).

2. Justifier que l'équation $f(x) = 0$ admet une seule solution α et donner un encadrement de α d'amplitude 1.

3. On se propose de déterminer un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.

   a. Reproduire sur Excel la feuille de calcul suivante :

	A	B
1	1	= A1+0,01
2	= 2*A1^3−A1−3	

   b. Cliquer sur la cellule B1, une croix noire s'affiche au coin inférieur droit de cette cellule.

   Cliquer sur la cellule A2, une croix noire s'affiche au coin inférieur droit de cette cellule.

   Positionner le curseur sur chaque croix et tirer vers la droite jusqu'à atteindre dans la ligne 2 deux images de signes contraires.

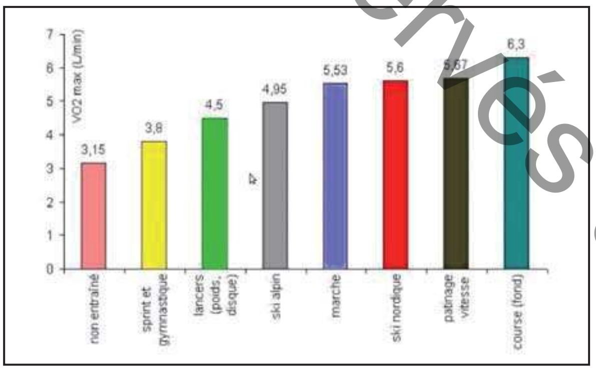
   c. Conclure.

La consommation maximale d'oxygène – La vitesse maximale aérobie :

La consommation d'oxygène varie en fonction de l'intensité de l'effort. En raison de nombreux facteurs, cette consommation ne peut pas augmenter à l'infini. Pour chaque individu, il existe une intensité au delà de laquelle la consommation ne progresse plus. L'individu atteint alors sa consommation maximale d'O2 (VO2max).

En course à pied, cette VO2 max peut être associée à une vitesse de course appelée la vitesse maximale aérobie (VMA). La VMA est donc la vitesse de course à laquelle le coureur atteint sa consommation maximale d'O2. Par l'entraînement, la VO2 max du sédentaire peut être améliorée de 15% à 25 %.
Plus la VMA est élevée, plus le coureur est capable de courir à des vitesses élevées avant d'atteindre sa VO2 max. Pour améliorer cette VMA, le coureur cherche, lors de certaines séances, à solliciter le système aérobie à son niveau maximal. Les efforts se font à des allures de courses encadrant la VMA, et la FC (fréquence cardiaque) est proche de son maximal (FCM)
La VMA sert de base pour le calcul des vitesses de courses à l'entraînement. Ces vitesses sont exprimées en % de VMA. La VMA est une vitesse de course pouvant, en moyenne, être soutenue pendant 6 à 7 min. La Vo_2 max varie avec :

- Le type d'exercice

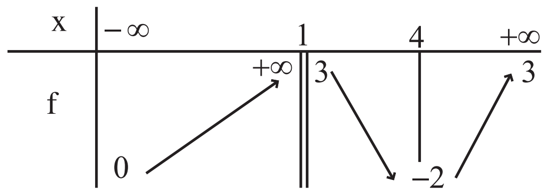


- L'âge : à partir de 22 ans la VO2max décline de 0.9 ml O_2/Kg/min par an chez les sujets sédentaires jusqu'au 2/3à 60ans. Les sujets sportifs ont un déclin plus faible.
- L'activité physique : la VO2 max chute de 20 à 25% après 3 semaines d'alitement.
- Le sexe : La VO2max est plus faible chez la femme.

QCM

Cocher la réponse exacte.

A/ Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ et continue en tout réel de $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ dont le tableau de variation est le suivant :



1. L'équation $f(x) = 0$ admet dans $\mathbb{R}\setminus\{1\}$,

☐ exactement deux solutions.

☐ exactement trois solutions.

☐ exactement une seule solution.

2. L'équation $f(x) = 4$ admet,

☐ une seule solution dans l'intervalle $]-\infty, 1[$.

☐ une seule solution dans l'intervalle $]1, 4[$.

☐ une seule solution dans l'intervalle $[4, +\infty[$.

3. La restriction de la fonction f à l'intervalle $]1, 4]$ réalise une bijection de $]1, 4]$ sur

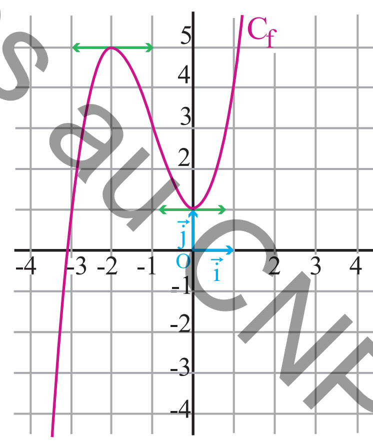
☐ $[-2, 3]$. ☐ $[-2, 3[$. ☐ $]-2, 3]$.

B/ 1. Dans la figure ci-contre on a représenté dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ la courbe d'une fonction polynôme de degré 3.

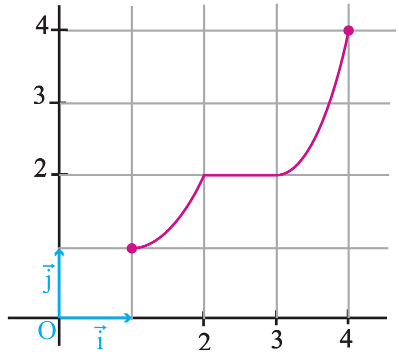
☐ La fonction f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

☐ La fonction f réalise une bijection de $[-2, 0]$ sur $[1, 5]$.

☐ La fonction f réalise une bijection de $[-2, 0]$ sur $[0, 5]$.



2. Soit f une fonction dont la représentation graphique est ci-contre. f réalise une bijection de



□ $[1, 4]$ sur $[1, 4]$.

□ $[1, 2]$ sur $[1, 2]$.

□ $[2, 3]$ sur $[2, 3]$.

3. La fonction $f : x \mapsto x^2$ réalise une bijection de

□ $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. □ $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+$. □ $\mathbb{R}_+$ sur $\mathbb{R}_+$.

4. La fonction $f : x \mapsto \dfrac{2x-1}{x}$ réalise une bijection de $]0, +\infty[$ sur $]-\infty, 2[$,

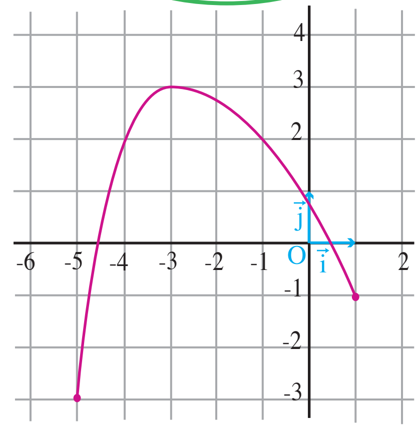
sa fonction réciproque est définie par

□ $f^{-1}(x) = \dfrac{x}{2x-1}$. □ $f^{-1}(x) = \dfrac{2x-1}{x}$. □ $f^{-1}(x) = \dfrac{1}{2-x}$.

Vrai-Faux

1. Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$.
Si $f(1) = -1$ et $f(-1) = 1$ alors l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans $\mathbb{R}$.
2. Soit la fonction $f : x \mapsto \dfrac{2x-1}{x-1}$.
Pour tout réel k, l'équation $f(x) = k$ admet au moins une solution dans $\mathbb{R}\setminus\{1\}$.
3. L'image de l'intervalle $[-3, 2]$ par la fonction $f : x \mapsto x^2$ est l'intervalle $[4, 9]$.
4. Soit f une fonction strictement décroissante sur $[1, 3]$. Alors $f([1, 3]) = [f(3), f(1)]$.
5. La fonction $f : x \mapsto x^3$ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.
6. La fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{x} + 1$ réalise une bijection de l'intervalle $]-\infty, 0[$ sur $]-\infty, 0[$.
7. La fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{2}{x}$ réalise une bijection de $]0, +\infty[$ sur $]0, +\infty[$ et pour tout x de $]0, +\infty[$, $f^{-1}(x) = f(x)$.
8. Soit f une bijection de l'intervalle $[0, 1]$ sur l'intervalle $[2, 4]$.
L'unique solution dans $[0, 1]$ de l'équation $f(x) = 3$ est égale à $f^{-1}(3)$.

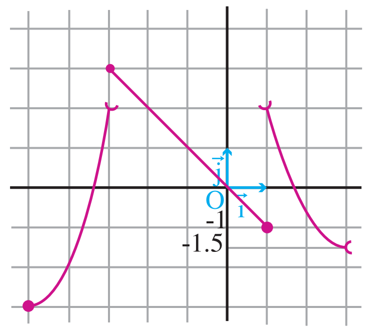
1 Le graphique ci-contre représente la courbe d'une fonction f définie sur l'intervalle $[-5,1]$.



Déterminer :

- $f([-5,-3])$
- $f([-3,1])$
- $f([-5,1])$

2 La figure ci-contre représente une fonction f définie sur $[-5, 3]$.



1. Déterminer les intervalles sur lesquels f est continue.
2. Déterminer $f([-5,-3[)$, $f([-2,-1])$ et $f([0,3])$.
3. Résoudre graphiquement l'équation $f(x)=2$.

***3** 1. Soit f la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{40x+300}{100x+1000}$.

a. Montrer que f est strictement croissante sur $[0,+\infty[$.

b. Dresser le tableau de variation de f.

c. Résoudre dans $[0,+\infty[$ l'équation $f(x)=0.35$.

2. Dans un stade, à 14 heures, il ya 300 supporters adverses et 700 supporters locaux, chaque minute, il entre 100 nouveaux supporters dont 40 sont adverses.
Calculer le pourcentage des supporters adverses dans ce stade, à 14 heures.

3. Soit n le nombre de minutes comptées à partir de 14 heures.

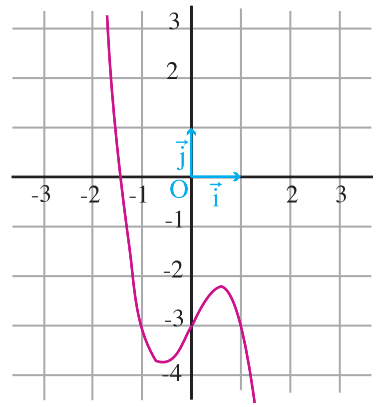
a. Montrer qu'à l'instant 14 h n min la proportion de supporters adverses est égale à $f(n)$.

b. Le pourcentage des supporters adverses peut-il toucher les 40% ?

c. A partir de quelle heure le pourcentage des supporters adverses dépassera-t-il 35% ?

***4** La courbe représentée ci-contre est celle de la fonction

$f : x \mapsto -2x^3 + 2x - 3$.



1\. a. Déterminer, graphiquement, le nombre de solutions de chacune des équations, $f(x) = 0$ et $f(x) = -2$.

b. Peut-on utiliser ce graphique pour déterminer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = -2.2$?

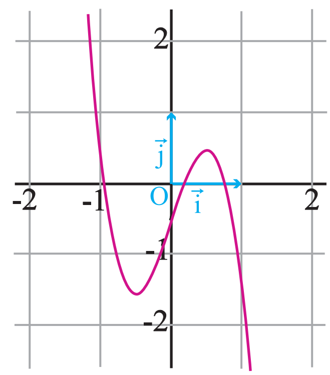
2\. a. Calculer $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

b. Dresser le tableau de variation de f.

c. Déterminer alors le nombre de solutions de l'équation $f(x) = -2.2$

5 Dans la figure ci-contre on a représenté la fonction

$f : x \mapsto -4x^3 + 3x - \frac{1}{2}$.



1\. Déterminer le nombre de solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation $f(x) = 0$.

2\. Soit α la solution négative de l'équation $f(x) = 0$.

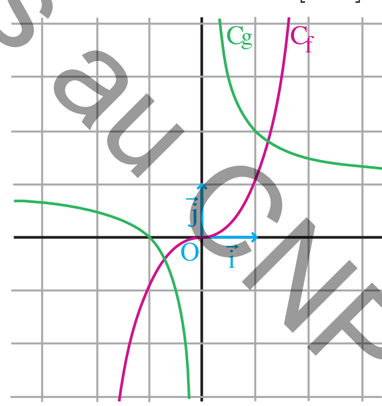
a. Utiliser le graphique pour encadrer α par deux entiers consécutifs.

b. Donner une valeur approchée de α à 10^{-1} près.

6 Pour chacun des cas suivants, montrer que l'équation $f(x) = k$ admet une solution unique dans l'intervalle I.

1\. $f(x) = x^3 + x$, $k = 11$, $I = [2, 4]$. 2. $f(x) = x^3 - x^2 - x$, $k = 1$, $I = [1, 2]$.

7 Dans la figure ci-contre on a représenté dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$ et la fonction g définie sur $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ par $g(x) = \frac{x+1}{x}$.



1\. Ecrire $f(x) - g(x)$ sous la forme d'un seul quotient.

2\. En déduire que l'équation $x^4 - x = 1$ admet dans $\mathbb{R}$ deux solutions α et β. On notera α la solution négative.

3\. Utiliser le graphique pour encadrer chacune de ces solutions par deux entiers relatifs consécutifs.

4\. Donner une valeur approchée à 10^{-1} près de chacun des réels α et β.

8 1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x - 1$.

a. Dresser le tableau de variation de f.

b. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet dans $\mathbb{R}$ une unique solution α et que $2.1 < \alpha < 2.2$.

2. Soit g et h les fonctions définies respectivement sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^*$ par $g(x) = \frac{1}{3}x^2 - 1$ et $h(x) = \frac{1}{x}$.

On note C_g et C_h leurs courbes représentatives dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

a. Montrer que C_g et C_h se coupent en un seul point dont l'abscisse est α.

b. Construire C_g et C_h.

9 Le plan est muni d'un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

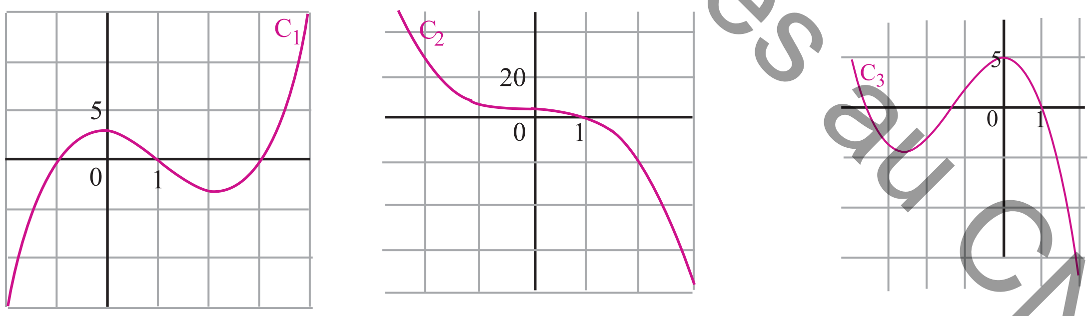
On a représenté les fonctions f , g et h définies sur $\mathbb{R}$ par :

$f(x) = -3x^3 + 3$.

$g(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3$.

$h(x) = -x^3 - 4x^2 + 5$.

1. Associer à chaque fonction sa courbe représentative.



2. Résoudre graphiquement :

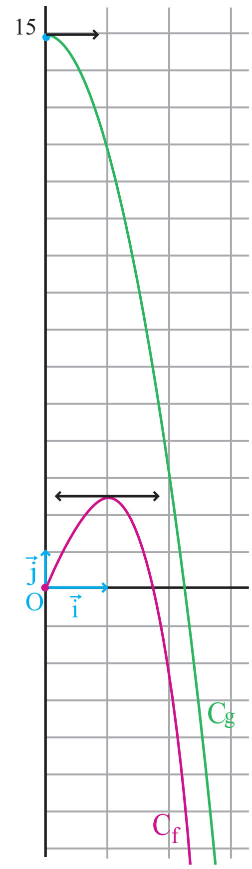
a. $f(x) = 0$, b. $g(x) = 0$, c. $h(x) = 0$.

3. a. Montrer que pour tout réel x, $h(x) = (1 - x)(x^2 + 5x + 5)$.

b. En déduire les valeurs exactes des solutions de l'équation $h(x) = 0$.

10 A/ Dans la figure ci-contre on a représenté, dans un repère orthogonal $(O,\vec{i},\vec{j})$, les courbes représentatives C_f et C_g des fonctions f et g définies sur $[0,+\infty[$ par

$f(x)=-\frac{5}{4}x^3+\frac{15}{4}x$ et $g(x)=15-3x^2$.



1. Déterminer la valeur maximale de la fonction f sur $[0,+\infty[$.
2. a. Justifier que pour tout réel k de l'intervalle $]0,\ 2.5[$ l'équation $f(x)=k$ admet dans $]0,+\infty[$ deux solutions α et β avec $\alpha \le 1 \le \beta$.
   b. Comparer $g(\alpha)$ et $g(\beta)$.

B/ Une cabine de douche de forme parallélépipédique à base carrée est fabriquée à partir de 2 matériaux différents :

Le sol (carré) revient à 40 DT par m^2 les cinq autres parois coûtent 10 DT par m^2.

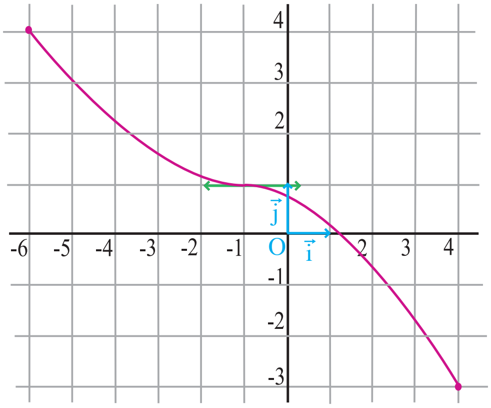
Dans cette partie on s'intéresse aux cabines dont le coût total des matériaux vaut 150 DT.

1. Le but de cette question est de déterminer les dimensions de la Cabine, si l'on veut que son volume soit le plus grand possible.
   a. A l'aide de l'information concernant le prix des différentes parois, montrer que la hauteur h (en mètres) de la cabine peut s'exprimer en fonction de x (côté du carré en mètres) par la relation $h=\frac{15-5x^2}{4x}$.
   b. Montrer que le volume de la cabine en fonction de x est égal à $v(x)=-\frac{5}{4}x^3+\frac{15}{4}x$.
   c. Conclure .
2. a. Résoudre dans $[0,+\infty[$ l'équation $\frac{15-5x^2}{4x}=2$.
   b. Donner la dimension de la base (arrondie au cm) pour que la hauteur de la cabine soit 2 m. En déduire une valeur approchée du volume de la cabine correspondante.
   c. Montrer qu'on peut fabriquer deux cabines à volume égal à celui trouvé en b). On note C_1 la cabine dont l'aire de la base est inférieure à 1 m^2 et C_2 l'autre.
3. On note $S(x)$ l'aire totale en m^2 de matériaux utilisés dans la construction de la cabine.
   a. Justifier que pour tout réel x, $S(x)=g(x)$, $x>0$.
   b. Préciser parmi les cabines C_1 et C_2 celle d'aire minimale.

11 Déterminer dans chacun des cas suivants l'image de l'intervalle I par la fonction f.

1. $f : x \mapsto \dfrac{2-4x}{x+1}$, $\qquad I = [1, +\infty[$.
2. $f : x \mapsto 5x^2 - 3x - 9$, $\qquad I =]-3, 0]$.
3. $f : x \mapsto x^2 + 2x - 2$, $\qquad I =]-\infty, -1[$.
4. $f : x \mapsto -(x-2)^3$, $\qquad I = [3, +\infty[$.
5. $f : x \mapsto 2x^3 + 3x^2 - 12x + 3$, $\qquad I = [-1, 0[$.

12 Le graphique ci-contre représente la courbe d'une fonction f définie sur l'intervalle $[-6, 4]$.



1. Justifier que f réalise une bijection de l'intervalle I sur un intervalle J que l'on précisera.
2. Soit f^{-1} la fonction réciproque de f.
   Trouver $f^{-1}(-3)$, $f^{-1}(3)$, $f^{-1}(1)$ et $f^{-1}(4)$.

***13** 1. Tracer, dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, la courbe de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 2x$.

2. Soit g la restriction de la fonction f à l'intervalle $[-1, +\infty[$.
   a. Montrer que g réalise une bijection de l'intervalle $[-1, +\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera.
   b. Vérifier que pour tout réel x, $f(x) = (x+1)^2 - 1$. En déduire que pour tout réel x de J, $g^{-1}(x) = -1 + \sqrt{1+x}$.
   c. Tracer, dans le même repère, la courbe représentative de la fonction g^{-1}.

14 Montrer, dans chacun des cas suivants, que la fonction f réalise une bijection de l'intervalle I sur un intervalle J que l'on précisera. Déterminer $f^{-1}(x)$ pour $x \in J$.

1. $f : x \mapsto -3x + 1$, $\qquad I = [-2, 5]$.
2. $f : x \mapsto (x-1)^2$, $\qquad I =]-\infty, 1]$.
3. $f : x \mapsto x^2 - 4x$, $\qquad I = [2, +\infty[$.
4. $f : x \mapsto \dfrac{-x}{x+1}$, $\qquad I =]-1, +\infty[$.

15 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\frac{1}{3}x^3+2x-2$ et C_f la courbe de la fonction f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Montrer que le point $I(0,-2)$ est un centre de symétrie de C_f.
2. a. Dresser le tableau de variation de f.
   b. Ecrire une équation de la tangente T à C_f au point I.
   c. Etudier la position relative de C_f et T.
   d. Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet dans $\mathbb{R}$ une unique solution α et que $0.8<\alpha<0.9$.
   e. Tracer T et C_f.
3. a. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.
   On note f^{-1} sa fonction réciproque.
   b. Donner une valeur approchée, à 10^{-1} près, de $f^{-1}(0)$.
   c. Tracer $C_{f^{-1}}$ dans le même repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

16 Soit la fonction $f : x \mapsto \frac{-2x+1}{x-1}$ et C_f sa courbe dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Etudier les variations de f.
2. Déterminer les asymptotes de C_f.
3. a. Déterminer l'intersection de C_f avec les axes du repère et avec la droite d'équation $y=x$.
   b. Tracer C_f.
4. Soit g la restriction de f à l'intervalle $]-\infty, 1[$ sur un intervalle J que l'on précisera.
   a. Montrer que g réalise une bijection de l'intervalle $]-\infty, 1[$ sur un intervalle J que l'on précisera.
   On note g^{-1} la fonction réciproque de g.
   b. Expliciter $g^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$.
   c. Tracer, dans le même repère, la courbe représentative de la fonction g^{-1}.

Correction de l'exercice 3 :

1. a. $f'(x) = \dfrac{10000}{(100x+1000)^2}$, $x \geq 0$. $f'(x) > 0$ pour tout réel $x \geq 0$.

Alors f est strictement croissante sur $[0\,,+\infty[$.

b. $f(0) = \dfrac{300}{1000} = 0.3$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \dfrac{40}{100} = 0.4$

x	0	10	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
f	0.3 ↗	0.35	↗ 0.4

c. $f(x) = 0.35$ équivaut à $\dfrac{40x+300}{100x+1000} = \dfrac{35}{100}$

équivaut à $\dfrac{40x+300}{x+10} = 35$

équivaut à $40x+300 = 35x+350$

équivaut à $5x = 50$

équivaut à $x = 10$.

$S_{[0\,,+\infty[} = \{10\}$.

2. Le pourcentage des supporters dans ce stade à 14 heures est $\left(\dfrac{300}{300+700}\right) \times 100\%$ soit 30%.

3. a. A 14 h n min le nombre des supporters adverses est $300+40n$ et le nombre des supporters locaux est $700+60n$.

Par suite la proportion des supporters adverses dans ce stade à 14 h n min est égale à

$$\frac{(300+40n)}{(300+40n)+(700+60n)} = \frac{300+40n}{1000+100n} = f(n).$$

b. D'après la question 1.b. on sait que $f([0\,,+\infty[) = [0.3\,,0.4[$,

ainsi $f(n) < 0.4$ pour tout $n \geq 0$.

Or le pourcentage des supporters adverses vaut $f(x) \times 100\%$.

Par suite ce pourcentage ne peut pas toucher 40%.

c. De la question 1.c. on déduit qu'à 14 h 10 min le pourcentage des supporters adverses vaut 35% , comme la fonction f est strictement croissante, alors le pourcentage des supporters adverses dépasse 35% après 14 h 10 min.

Correction de l'exercice 4 :

1. a. • La droite d'équation $y = 0$ coupe la courbe de f en un seul point.

Par suite l'équation $f(x) = 0$ admet dans $\mathbb{R}$ une unique solution .

• De même l'équation $f(x) = -2$ admet dans $\mathbb{R}$ une unique solution.

b. D'après ce graphique , on sait que f admet un maximum sur l'intervalle $[0, +\infty[$ et que la valeur de ce maximum est un réel inférieur à -2 et supérieur à -2.5

Ainsi le nombre de solutions de l'équation $f(x) = -2.2$ dépend de la valeur exacte de ce maximum.

2. a. $f'(x) = -6x^2 + 2$.

b. $f'(x) = 2(1 - 3x^2)$.

c. Il suffit de comparer $\frac{4}{3\sqrt{3}} - 3$ avec -2.2

x	$-\infty$		$-\frac{\sqrt{3}}{3}$		$\frac{\sqrt{3}}{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
f	$+\infty$	↘	$\frac{-4}{3\sqrt{3}} - 3$	↗	$\frac{4}{3\sqrt{3}} - 3$	↘	$-\infty$

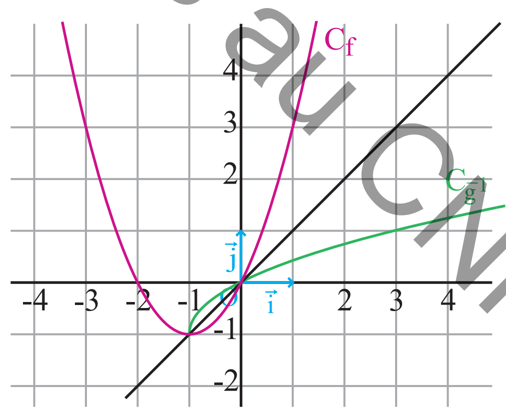
$\left(\frac{4}{3\sqrt{3}} - 3\right) - (-2.2) \simeq -0.03 < 0$. Alors $\frac{4}{3\sqrt{3}} - 3 < -2.2$

Par suite l'équation $f(x) = -2.2$ admet dans $\mathbb{R}$ une seule solution.

Correction de l'exercice 13 :

1. Tableau de variation de f :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	↘	-1	↗	$+\infty$



2. a. Pour tout $x \geq 1$, $g(x) = f(x)$.

g est une fonction strictement croissante sur $[-1, +\infty[$.

Alors elle réalise une bijection de $[-1, +\infty[$ sur $g([-1, +\infty[)$.

De plus g est continue sur $[-1, +\infty[$ alors $g([-1, +\infty[) = \left[g(-1), \lim\limits_{x \to +\infty} g(x)\right[= [-1, +\infty[$.

b. • Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = (x^2 + 2x + 1) - 1 = (x+1)^2 - 1$.

• Soit x un réel de $[-1, +\infty[$ et k un réel de $[-1, +\infty[$.

$g(x) = k$ équivaut à $(x+1)^2 - 1 = k$

équivaut à $(x+1)^2 = 1 + k$

équivaut à $x + 1 = \sqrt{1+k}$ $\quad (x + 1 \geq 0$ puisque $x \geq -1)$

équivaut à $x = -1 + \sqrt{1+k}$

Conclusion : Pour tout $x \in [-1, +\infty[$, $g^{-1}(x) = -1 + \sqrt{1+x}$.

c. La courbe de la fonction g^{-1} est la symétrique de la courbe de g par rapport à la droite $\Delta : y = x$ (voir figure).

Chapitre 3

Calcul d'aires planes

Aperçu historique

Le calcul d'aire de figures géométriques simples sont décrits dans les plus anciens documents mathématiques connus. La première réelle avancée au-delà de ce niveau élémentaire a été faite par Archimède, le génial savant grec. Grâce à la technique d'Archimède, on pouvait calculer des aires bornées par des paraboles et des spirales.

Au début du 18ème siècle, plusieurs mathématiciens ont cherché à calculer de telles aires de manière plus simple à l'aide de limites. Cependant, ces méthodes manquaient de généralité.

La découverte majeure de la résolution générale du problème d'aire fut faite indépendamment par Newton et Leibniz lorsqu'ils s'aperçurent que l'aire sous une courbe pouvait être obtenue en inversant le processus de différentiation.

Cette découverte, qui marqua le vrai début de l'analyse, fut répandue par Newton en 1669.

Indépendamment, Leibniz découvrit le même résultat aux environs de 1673 .

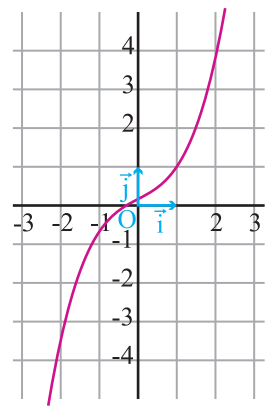
Activité 1

Dans chacun des cas suivants, déterminer la fonction dérivée f' de la fonction f :

1. $f : x \mapsto x^2 - x + 1$.
2. $f : x \mapsto -5x - x^2$.
3. $f : x \mapsto x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 3x + 11$.
4. $f : x \mapsto \frac{5x-1}{x+3}$.

Activité 2

Dans La figure ci-contre on représenté dans un repère orthogonal la courbe représentative d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$.

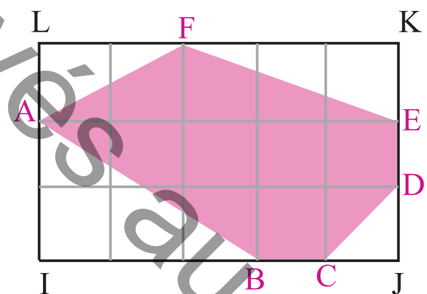


1. En utilisant le graphique, déterminer $f(1)$ et estimer la valeur de $f(0)$.
2. Déterminer la valeur exacte de $f(0)$, sachant que $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x + a$ où a est un réel.

Activité 3

L'unité de mesure est le centimètre.

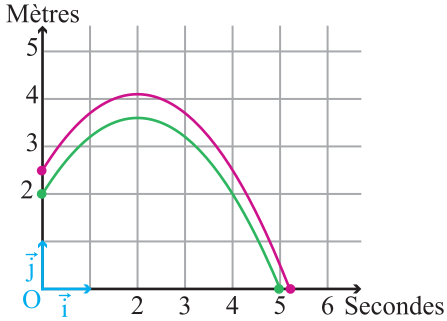
Dans la figure ci-contre, IJKL est un rectangle de dimensions 3 et 5.



Calculer en cm^2 l'aire de la partie colorée en rouge.

I. Primitives

Activité 1



Deux projectiles sont lancés de deux hauteurs différentes.
Dans la figure ci-contre on a représenté les courbes des fonctions h_1 et h_2 qui modélisent respectivement les altitudes en mètres des deux projectiles P_1 et P_2 à l'instant t en secondes telles que

$h_1(t)=(-0.4)t^2+(1.6)t+2.5$ et $h_2(t)=(-0.4)t^2+(1.6)t+2$.

1. Comparer les vitesses instantanées de ces deux projectiles aux instants suivants : $t=0s$, $t=2s$, $t=3s$ et $t=5s$.
2. Déterminer les instants auxquels les deux projectiles ont la même vitesse instantanée.

Activité 2

Soit les fonctions f et F définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^2-4x+5$ et $F(x)=\frac{1}{3}x^3-2x^2+5x+10$.

1. Vérifier que F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que pour tout réel x, $F'(x)=f(x)$.
2. Déterminer une fonction G dérivable sur $\mathbb{R}$ et distincte de F telle que pour tout réel x, $G'(x)=f(x)$.

Définition

Soit f et F deux fonctions définies sur un même intervalle I.
On dit que F est une primitive de f sur l'intervalle I, lorsque F est dérivable sur I et pour tout réel x de I, $F'(x)=f(x)$.

Activité 3

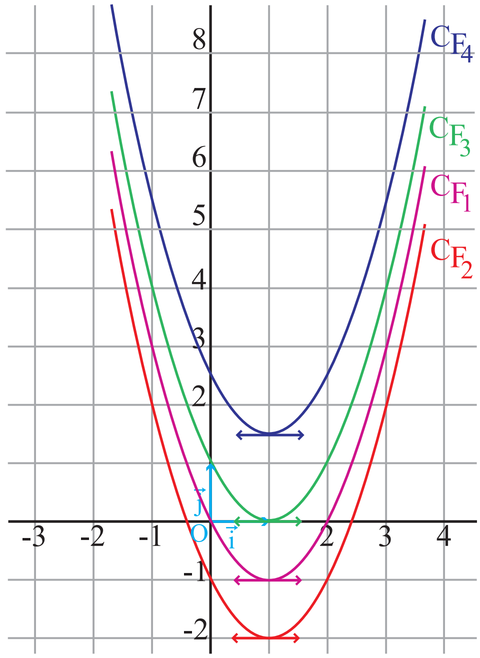
Vérifier, dans chacun des cas suivants, que F est une primitive de f sur l'intervalle I.

1. $F(x)=3x^3-2x$, $f(x)=9x^2-2$, $I=\mathbb{R}$.
2. $F(x)=\frac{2}{x}$, $f(x)=\frac{-2}{x^2}$, $I=]0,+\infty[$.
3. $F(x)=\frac{2}{x}+4$, $f(x)=\frac{-2}{x^2}$, $I=]0,+\infty[$.
4. $F(x)=x^2-3x+4$, $f(x)=2x-3$, $I=\mathbb{R}$.

Théorème

Toute fonction continue sur un intervalle I admet des primitives sur l'intervalle I.

Activité 4



Dans la figure ci-contre on a représenté, dans un repère orthogonal, les courbes représentatives des fonctions F_1, F_2, F_3 et F_4 définies sur $\mathbb{R}$ par :

$F_1(x) = x^2 - 2x$

$F_2(x) = x^2 - 2x - 1$

$F_3(x) = x^2 - 2x + 1$

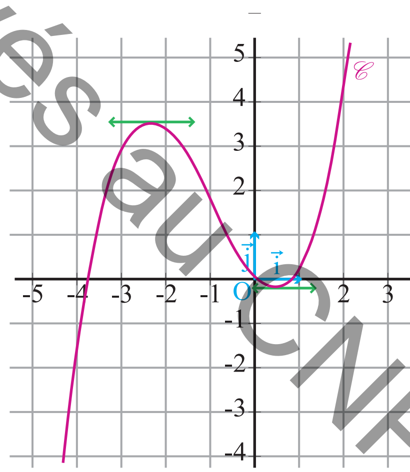
$F_4(x) = x^2 - 2x + \frac{5}{2}$

1. Montrer que les fonctions F_1, F_2, F_3 et F_4 sont des primitives sur $\mathbb{R}$ d'une même fonction f que l'on déterminera.
2. Trouver d'autres primitives de f sur $\mathbb{R}$.

Théorème

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et F une primitive de f sur I.
Toute primitive de f sur I est de la forme $x \mapsto F(x) + k$, $k \in \mathbb{R}$.

Activité 5



Dans la figure ci-contre la courbe $\mathscr{C}$ est la représentation graphique de la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par

$F(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - x$.

1. On considère la fonction $f : x \mapsto x^2 + 2x - 1$.
   a. Vérifier que F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.
   b. Déterminer alors toutes les primitives de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
   c. Montrer que F est l'unique primitive de f sur $\mathbb{R}$ dont la représentation graphique passe par l'origine du repère.
2. Montrer qu'il existe une unique primitive de f sur $\mathbb{R}$ dont la représentation graphique passe par le point $A(1, 2)$.

Théorème

Soit f une fonction continue sur un intervalle I.

Soit x_0 un réel de I et y_0 un réel.

Alors il existe une seule primitive F de f sur I telle que $F(x_0) = y_0$.

Activité 6

Soit f et F les fonctions définies sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = 2x - \frac{1}{x^2} + 1$ et $F(x) = x^2 + \frac{1}{x} + x + 1$.

1. Montrer que F est une primitive de f sur $]0, +\infty[$.
2. Déterminer la primitive G de f sur $]0, +\infty[$ vérifiant $G(1) = 0$.

Primitives des fonctions usuelles

Dans le tableau ci-dessous, F désigne une primitive de la fonction f sur l'intervalle I, a et c deux réels.

f	I	F
$x \mapsto a$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto ax + c$
$x \mapsto x^n,\ n \in \mathbb{N}^*$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$
$x \mapsto (ax+b)^n$, $n \in \{1,2,3\}$ et $a \neq 0$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \frac{1}{(n+1)a}(ax+b)^{n+1}$
$x \mapsto \frac{1}{x^2}$	$]0, +\infty[$ (ou $]-\infty, 0[$)	$x \mapsto \frac{-1}{x} + c$

Théorème

Soit F et G deux primitives respectives de deux fonctions f et g sur un intervalle I.
- La fonction $F + G$ est une primitive sur I de $f + g$.
- Soit λ un réel. La fonction λF est une primitive sur I de λf.

Activité 7

Dans chacun des cas suivants, déterminer une primitive de f sur I.

1. $f : x \mapsto -3x$, $I = \mathbb{R}$.
2. $f : x \mapsto x^2 - x + 4$, $I = \mathbb{R}$.
3. $f : x \mapsto \frac{1}{x^2} + x^2$, $I =]-\infty, 0[$.
4. $f : x \mapsto x^3 - 2x^2 + 3x + 2$, $I = \mathbb{R}$.
5. $f : x \mapsto (2x+3)^3$, $I = \mathbb{R}$.

Activité 8

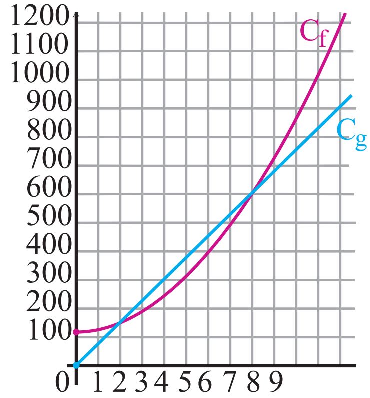
Un conducteur d'automobile annonce que la vitesse de son véhicule passe de 0 à 30 m/s en 10 secondes. On note $v(t)$ la vitesse instantanée de ce véhicule exprimée en m/s et on désigne par $d(t)$ la distance parcourue en mètres à l'instant t exprimé en secondes.

On admet qu'il existe un réel a tel que $v(t) = at$.

1. Montrer que $a = 3$.
2. En déduire que $d(t) = \frac{3}{2}t^2$, $t \geq 0$.
3. Calculer alors la distance parcourue par ce véhicule en 14 secondes.

Activité 9

I/ Dans la figure ci-contre on a représenté, dans un repère orthogonal, les courbes représentatives C_f et C_g définies sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = \frac{15}{2}x^2 + 120$ et $g(x) = 75x$.

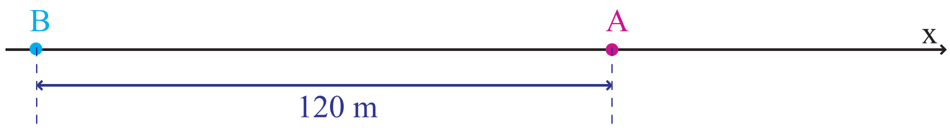


1. Déterminer les coordonnées des points d'intersection des courbes C_f et C_g.
2. Dresser le tableau de signe de $f(x) - g(x)$.

II/ Après avoir réglé une panne technique, une voiture A de course (qui s'était arrêtée sur une route horizontale rectiligne) démarre à l'instant $t = 0$ avec une accélération constante $a = 15 m/s^2$. Elle roule avec cette accélération pendant 5 secondes puis elle termine la course avec une vitesse constante (la vitesse atteinte à l'instant $t = 5s$).

Au même moment une voiture B roulant à une vitesse constante $v_2 = 75\ m/s$ se trouve à une distance $d_2 = 120\ m$ de la voiture A.

On considère que les voitures A et B sont assimilées à des points matériels.



On choisit comme origine des abscisses la position de la voiture B à l'instant $t = 0$ (instant de démarrage de la voiture A après la panne).

1. On note $v_1(t)$ la vitesse instantanée (en m/s) de la voiture A à l'instant t, $t \geq 0$.

   Exprimer $v_1(t)$ en fonction de t. (on distinguera deux cas : $t \in [0,5]$ et $t \geq 5$)

2. On note $x_A(t)$ la distance (en mètres) parcourue par la voiture A à l'instant t, $t \geq 0$.

   On note $x_B(t)$ la distance (en mètres) parcourue par la voiture B à l'instant t, $t \geq 0$.

   a. Montrer que pour tout $t \geq 0$, $x_B(t) = g(t)$.

   b. Montrer que $\begin{cases} x_A(t) = f(t) & \text{si } t \in [0,5] \\ x_A(t) = 75t - 67.5 & \text{si } t \geq 5 \end{cases}$

   c. La voiture B pourrait-elle dépasser la voiture A ? Si oui déterminer l'instant de dépassement et la position des voitures A et B à cet instant.

   d. Sachant que la ligne d'arrivée est distante de 1 Km du lieu de la panne de la voiture A, déterminer laquelle des deux voitures A et B est gagnante.

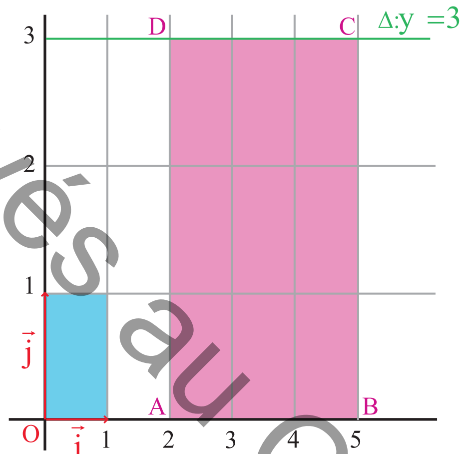
II. Calcul d'aires planes

Activité 1

Dans la figure ci-contre, le plan est muni d'un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

La droite Δ a pour équation $y = 3$.

Les droites (AD) et (BC) ont pour équations respectives $x = 2$ et $x = 5$.



1. Donner, en unité d'aire, l'aire $\mathcal{A}$ du rectangle ABCD.
2. On note f la fonction constante définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3$.

   a. Déterminer une primitive F de f sur $\mathbb{R}$.

   b. Vérifier que $\mathcal{A} = F(5) - F(2)$.

Définition

Le plan est muni d'un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

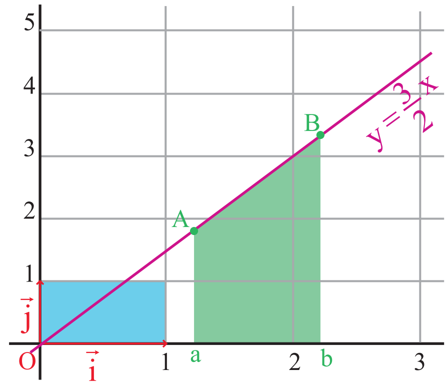
L'unité d'aire, noté $(u.a)$, est l'aire du rectangle de dimensions $\|\vec{i}\|$ et $\|\vec{j}\|$.

Activité 2

Dans la figure ci-contre, le plan est muni d'un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

La droite D est la représentation graphique de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{3}{2}x$.

A et B sont deux points de D d'abscisses respectives a et b tels que $0 < a < b$.



On désigne par P la partie du plan limitée par l'axe des abscisses, la droite D et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.

1. Calculer, à l'aide de a et b, l'aire $\mathcal{A}$ (en u.a) de la partie P.

Aire du trapèze $= \frac{(\text{Petite base} + \text{Grande base}) \times \text{Hauteur}}{2}$

2. a. Donner deux primitives F et G de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

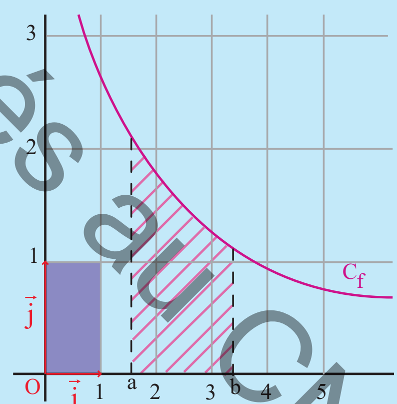
   b. Vérifier que $\mathcal{A} = F(b) - F(a) = G(b) - G(a)$.

Définition

Le plan est muni d'un repère orthogonal.
Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a, b]$ et F est une primitive de f sur l'intervalle $[a, b]$.

L'aire (en u.a) de la partie du plan limitée par la courbe de f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est le réel $F(b) - F(a)$.

Le réel $F(b) - F(a)$ est appelé l'intégrale de f entre les réels a et b et noté $\int_a^b f(x)\,dx$.

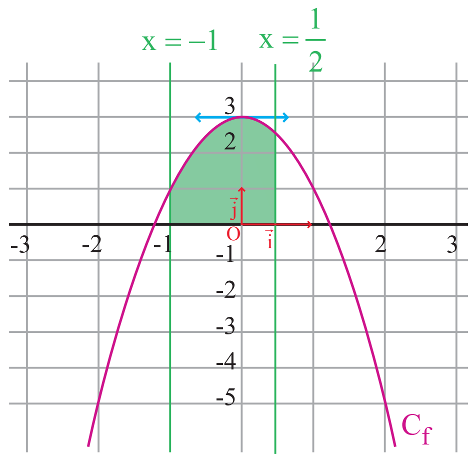


Notation

Pour toute primitive F de f, on écrit $\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$.

Activité 3

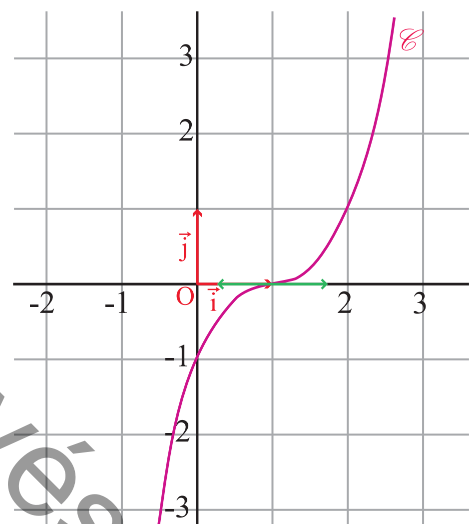
Dans la figure ci-contre, on a représenté la courbe de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -2x^2 + 3$ dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ tel que $\|\vec{i}\| = 2\text{cm}$ et $\|\vec{j}\| = 1\text{cm}$.



1. Donner une primitive de f sur $\mathbb{R}$.
2. Calculer, en cm^2, l'aire de la partie colorée en vert.

Activité 4

Dans la figure ci-contre, on a représenté dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ la courbe $\mathscr{C}$ de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$



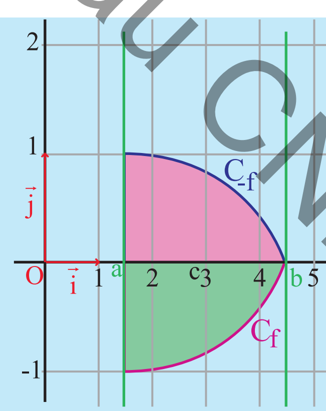
1. Hachurer la partie P_1 du plan limitée par $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.
2. Tracer $\mathscr{C}'$, la courbe représentative de la fonction $-f$.
3. a. Hachurer la partie P_2 du plan limitée par $\mathscr{C}'$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.
   b. Calculer l'aire de la partie P_2.
   c. En déduire l'aire de la partie P_1.

Théorème

Le plan est muni d'un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Soit f une fonction continue et négative sur $[a, b]$.

L'aire (en u.a) de la partie du plan limitée par l'axe des abscisses, la courbe de f, les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est le réel $\int_a^b -f(x)\,dx$.



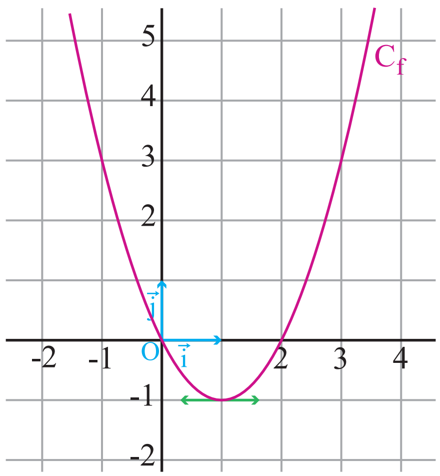
Activité 5

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Calculer dans chaque cas, l'aire de la partie du plan limitée par la courbe de f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.

1. $f : x \mapsto x^2 - 5x + 4$, $a = 1$ et $b = 4$.
2. $f : x \mapsto x^3 - 4x^2$, $a = 2$ et $b = 3$.

Activité 6



Dans la figure ci-contre, on a représenté dans un repère orthonormé la courbe C_f de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 2x$.

On se propose de calculer l'aire $\mathcal{A}$ de la partie (P) du plan limitée par la courbe C_f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = -1$ et $x = 2$.

On note $\mathcal{A}_1$ l'aire de la partie de (P) limitée par C_f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = -1$ et $x = 0$

On note $\mathcal{A}_2$ l'aire de la partie de (P) limitée par C_f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 2$.

1. Calculer $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$.
2. En déduire $\mathcal{A}$.

Retenons : point de méthode

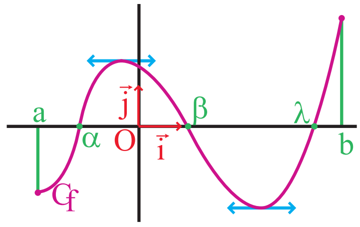
Soit f une fonction continue qui change de signe sur un intervalle $[a, b]$ et $\mathscr{C}$ sa courbe dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Pour calculer l'aire $\mathcal{A}$ de la partie (P) du plan limitée par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$, on partage (P) en deux sous parties (P_+) et (P_-).

- (P_+) est la (ou les) partie(s) de (P) située(s) au dessus de l'axe des abscisses d'aire $\mathcal{A}_+$.
- (P_-) est la (ou les) partie(s) de (P) située(s) au dessous de l'axe des abscisses d'aire $\mathcal{A}_-$.

$$\mathcal{A}_+ = \int_\alpha^\beta f(x)dx + \int_\lambda^b f(x)dx.$$

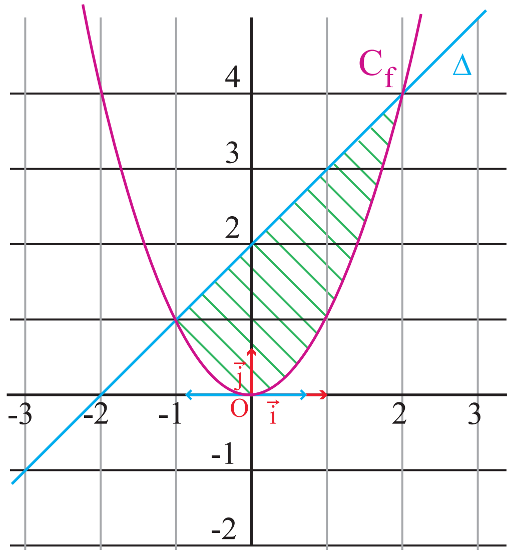
$$\mathcal{A}_- = \int_a^\alpha -f(x)dx + \int_\beta^\lambda -f(x)dx.$$

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_+ + \mathcal{A}_-.$$



Activité 7

Dans le graphique ci-contre, on a représenté les courbes C_f et Δ des fonctions respectives $f : x \mapsto x^2$ et $g : x \mapsto x + 2$.



On se propose de calculer l'aire $\mathcal{A}$ de la partie du plan hachurée.

Soit $\mathcal{A}_1$ l'aire de la partie P_1 du plan limitée par la courbe C_f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = -1$ et $x = 2$.

Soit $\mathcal{A}_2$ l'aire de la partie P_2 du plan limitée par la droite Δ, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = -1$ et $x = 2$.

1. Colorier P_1 et P_2 avec deux couleurs différentes.
2. a. Calculer $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$.
   b. Comparer $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$.
3. Déterminer la valeur de $\mathcal{A}$.
4. Comparer $\mathcal{A}$ avec l'intégrale $\int_{-1}^{2} \left((x+2) - f(x) \right) dx$.

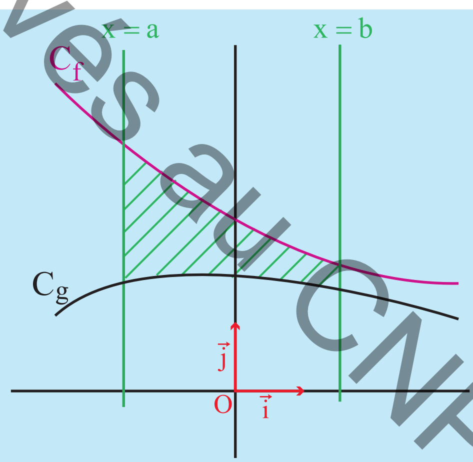
Théorème

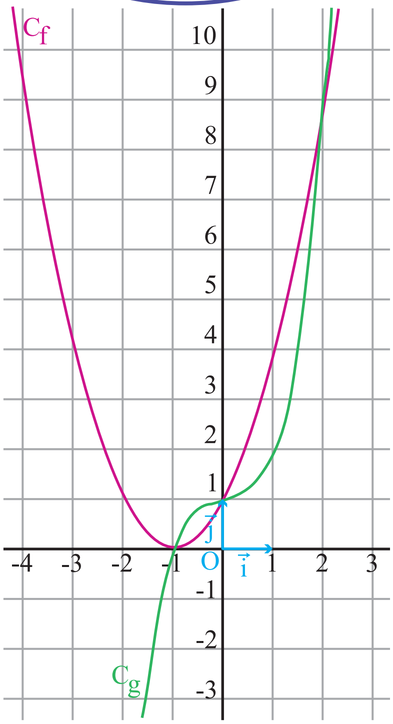
Le plan est muni d'un repère orthogonal.

Soit f et g deux fonctions continues sur $[a, b]$.

Si pour tout réel x de $[a, b]$, $f(x) \geq g(x)$ alors l'aire (en u.a) de la partie du plan limitée par la courbe de f, la courbe de g et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est le réel

$$\int_a^b \left[f(x) - g(x) \right] dx .$$





Activité 8

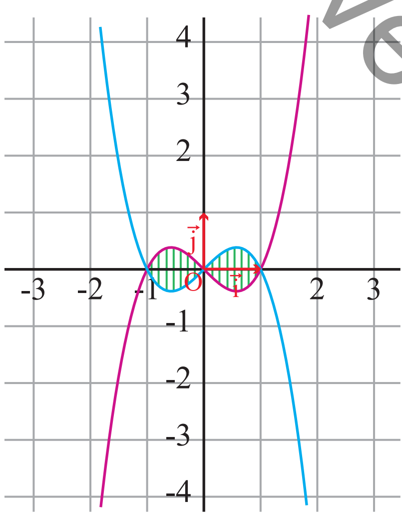
Dans le graphique ci-contre, on a représenté, dans un repère orthonormé, les courbes des fonctions f et g définies respectivement par $f(x)=x^2+2x+1$ et $g(x)=x^3+1$.

1. Calculer, en (u.a), l'aire $\mathcal{A}_1$ de la partie du plan limitée par C_f, C_g et les droites d'équations $x=-1$ et $x=0$.
2. Calculer, en (u.a), l'aire $\mathcal{A}_2$ de la partie du plan limitée par C_f, C_g et les droites d'équations $x=0$ et $x=1$.
3. En déduire l'aire $\mathcal{A}$ de la partie du plan limitée par C_f, C_g et les droites d'équations $x=-1$ et $x=1$.

Activité 9

On considère la fonction $f : x \mapsto x^3 - x$;

Dans le graphique ci-contre on a représenté, dans un repère orthonormé, les courbes représentatives des fonctions f et $(-f)$.



1. Associer à chaque fonction sa courbe.
2. Calculer l'aire $\mathcal{A}$ de la partie du plan hachurée.

Primitives d'une fonction sur un intervalle

Soit f et F deux fonctions définies sur un même intervalle I.

On dit que F est une primitive de f sur l'intervalle I, lorsque F est dérivable sur I et pour tout réel x de I, $F'(x) = f(x)$.

Toute fonction continue sur un intervalle I admet des primitives sur l'intervalle I.

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et F une primitive de f sur I.

Toute primitive de f sur I est de la forme $x \mapsto F(x) + k$, $k \in \mathbb{R}$.

Soit f une fonction continue sur un intervalle I.

Soit x_0 un réel de I et y_0 un réel.

Alors il existe une seule primitive F de f sur I telle que $F(x_0) = y_0$.

Soit F et G deux primitives respectives de deux fonctions f et g sur un intervalle I.

- La fonction $F+G$ est une primitive sur I de $f+g$.
- Soit λ un réel. La fonction λF est une primitive sur I de λF.

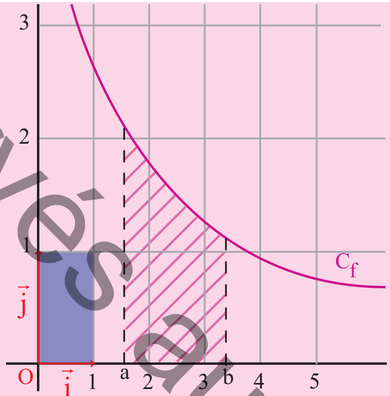
Aires planes

Le plan est muni d'un repère orthogonal.

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a,b]$ et F est une primitive de f sur l'intervalle $[a,b]$.

L'aire (en u.a) de la partie du plan limitée par la courbe de f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est le réel $F(b) - F(a)$.

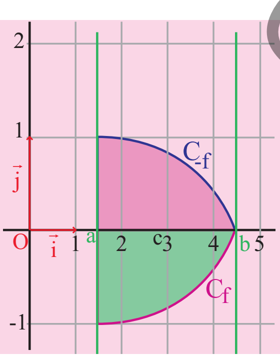
Le réel $F(b) - F(a)$ est appelé l'intégrale de f entre les réels a et b et noté $\int_a^b f(x)\,dx$.



Le plan est muni d'un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Soit f une fonction continue et négative sur $[a,b]$.

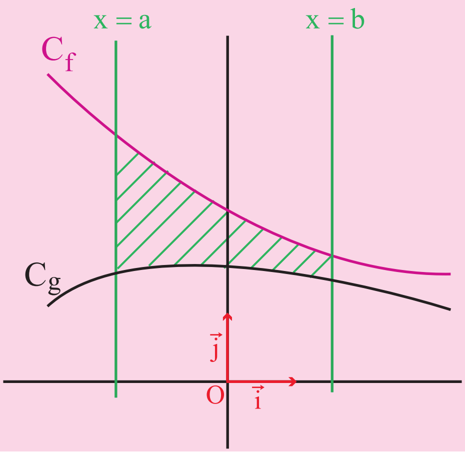
L'aire (en u.a) de la partie du plan limitée par l'axe des abscisses, la courbe de f, les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est le réel $\int_a^b -f(x)\,dx$.



Le plan est muni d'un repère orthogonal.

Soit f et g deux fonctions continues sur $[a,b]$.

Si pour tout réel x de $[a,b]$, $f(x) \geq g(x)$ alors l'aire (en u.a) de la partie du plan limitée par la courbe de f, la courbe de g et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est le réel $\int_a^b [f(x) - g(x)]dx$.



Activité

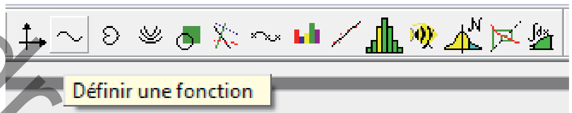
Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{x}$.

On désigne par C_f la courbe représentative de f dans un repère orthogonal.

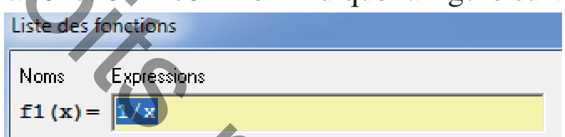
On se propose de déterminer une valeur approchée de l'aire de la partie du plan limitée par C_f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0.5$ et $x = 2$.

« Sine qua non » est un logiciel qui permet de tracer la courbe représentative d'une fonction et de déterminer l'aire d'une surface plane.

1. Ouvrir une feuille de travail.
2. Cliquer sur la touche définir une fonction comme l'indique la figure suivante :

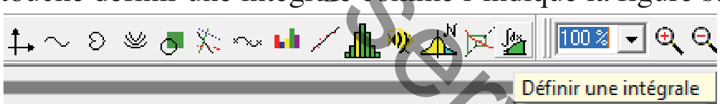


3. Ecrire l'expression de la fonction f comme l'indique la figure suivante puis cliquer sur ok.

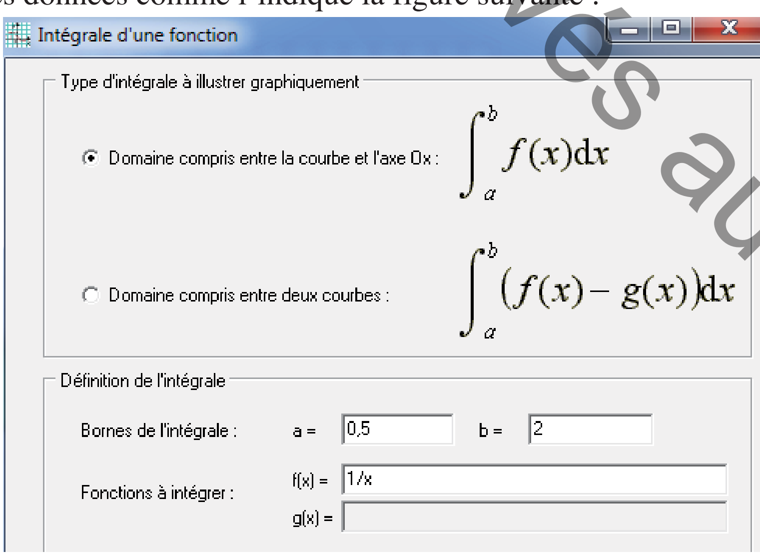


La courbe C_f s'affiche.

4. a. Cliquer sur la touche définir une intégrale comme l'indique la figure suivante :



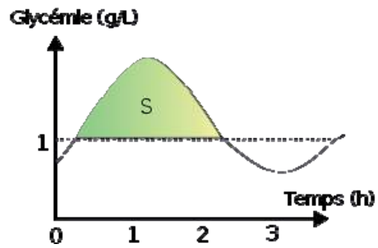
b. Introduire les données comme l'indique la figure suivante :



c. Cliquer sur OK puis conclure.

L'INDEX GLYCEMIQUE DES ALIMENTS

L'index glycémique mesure la capacité d'un glucide donné à élever la glycémie après le repas par rapport à un standard de référence qui est le glucose pur. Pour un même contenu en glucide pur, chaque aliment glucidique entraîne une élévation différente de la glycémie. Il est donc nécessaire de mesurer le pouvoir hyperglycémiant de chaque glucide pour les comparer ensuite entre eux.



S : la surface sous la courbe

Le calcul de l'index glycémique (IG) est réalisé en considérant la courbe de glycémie durant les deux heures qui suivent l'absorption de l'aliment analysé et en réalisant le calcul de la surface sous cette courbe, appelée **« intégrale sous la courbe».**
Cette surface sera comparée à celle obtenue lors de l'absorption de glucose pur, qui représente la référence avec un IG égal à 100.

$$IG = \frac{S_{\text{aliment}}}{S_{\text{référence}}} \times 100$$

IG : indice glycémique de l'aliment considéré.

S_{aliment} : surface sous la courbe glycémie/temps de l'aliment considéré.

$S_{\text{référence}}$: surface sous la courbe glycémie/temps de la référence.

Un aliment qui possède un index glycémique équivalent à 50 a une intégrale sous la courbe deux fois moins importante que celle du glucose. L'index glycémique est d'autant plus élevé que l'hyperglycémie induite par le glucide testé est forte.

Ingérer des aliments à IG élevé entraîne une sensation de faim causée par une production d'insuline elle même causée par l'élévation de la glycémie. En d'autres termes, consommer des aliments à fort index glycémique peut entraîner des problèmes de surpoids et d'obésité.

QCM

Cocher la réponse exacte.

1. Une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto x(x+1)$ est la fonction

☐ $x \mapsto \frac{1}{2}x^2\left(\frac{1}{2}x^2+x\right)$. ☐ $x \mapsto \frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+4$. ☐ $x \mapsto \frac{1}{2}(x+1)^2$.

2. Toute primitive sur $\mathbb{R}$ d'une fonction polynôme de degré 2 est une fonction polynôme

☐ de degré 1. ☐ de degré 2. ☐ de degré 3.

3. La primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto 6x^2+1$ qui s'annule en 0 est la fonction

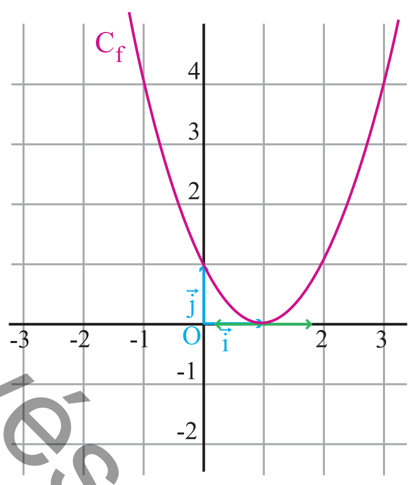
☐ $x \mapsto 2x^3+x$. ☐ $x \mapsto 6x^3+x$. ☐ $x \mapsto 2x^3+x+1$.

4. Dans la figure ci-contre, on a représenté, dans un repère orthonormé, une fonction polynôme f de degré 2. Si F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$ alors

☐ F est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

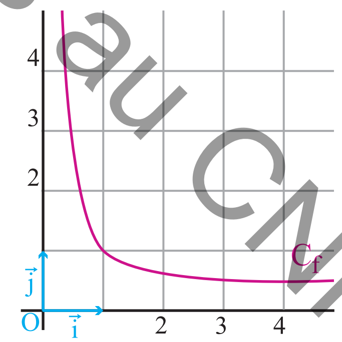
☐ F est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

☐ F n'est pas monotone sur $\mathbb{R}$.



5. Dans la figure ci-contre, on a représenté, dans un repère orthonormé, la courbe de la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x)=\frac{1}{x}$.

☐ $\int_1^2 \frac{dx}{x} < 1$ ☐ $\int_1^2 \frac{dx}{x} > 1$ ☐ $\int_1^2 \frac{dx}{x} = 1$



VRAI - FAUX

Répondre par vrai ou faux en justifiant la réponse.

1. Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[-1, 3]$.

   Si C_f est la courbe de f, dans un repère orthonormé , alors l'aire de la partie du plan limitée par C_f , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = -1$ et $x = 3$ est égale à $\int_{-1}^{3} f(x)\, dx$.

2. On donne le tableau de variation d'une fonction f continue sur $\mathbb{R}$ et on note C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

x	$-\infty$		0		1		3		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	2	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

   a. L'aire de la partie du plan limitée par C_f , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 3$ est égale à $\int_{1}^{3} f(x)\, dx$

   b. L'aire de la partie du plan limitée par C_f , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = -2$ et $x = 3$ est égale à $\int_{-2}^{1} f(x)\, dx + \int_{1}^{3} -f(x)\, dx$

3. Soit $\mathscr{C}$ la courbe représentative, dans un repère orthonormé, de la fonction $x \mapsto x^3$.
   L'aire de la partie du plan limitée par $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites $x = -1$ et $x = 1$ est égale à 1.

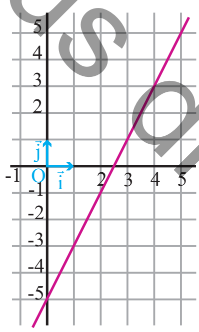
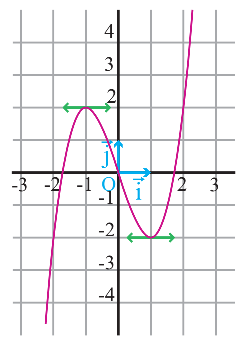
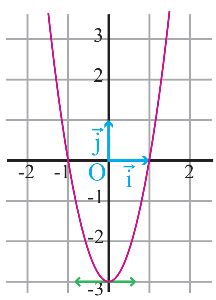
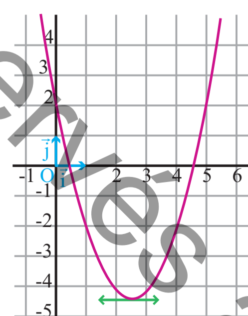
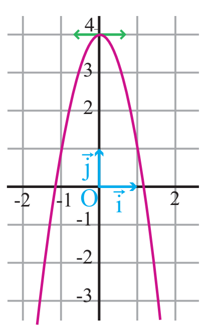
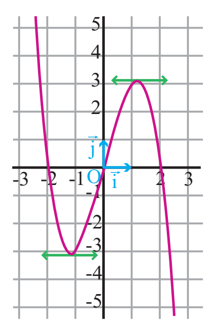
1 1. Déterminer deux primitives sur $\mathbb{R}$ de chacune des fonctions suivantes :

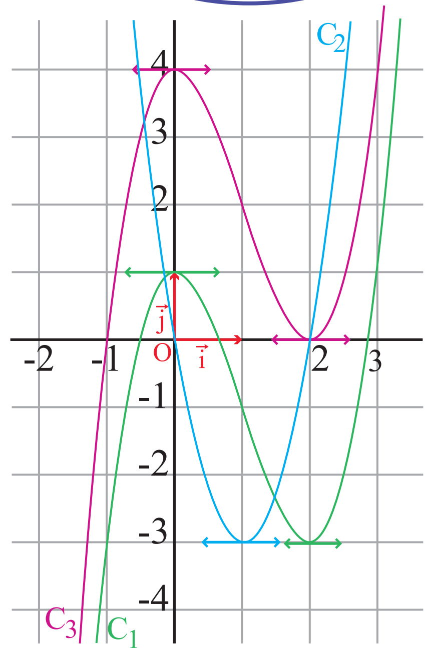
a. $f : x \mapsto \frac{1}{2}x + 4$. b. $g : x \mapsto 3x^2 - 2x + 4$. c. $h : x \mapsto 8x^3 + 12x^2 - x - 2$

2. Déterminer trois primitives sur $]0, +\infty[$ de chacune des fonctions suivantes :

a. $f : x \mapsto x^3 - \frac{1}{x}$. b. $g : x \mapsto \frac{1}{x} + 3x^2$.

2 Associer la courbe de la fonction avec la courbe d'une de ses primitives.

Courbe de la fonction	Courbe d'une primitive
 ①	 (A)
 ②	 (B)
 ③	 (C)



3 Les courbes C_1, C_2 et C_3 du graphique ci-contre représentent trois fonctions f, g et h définies sur $\mathbb{R}$.

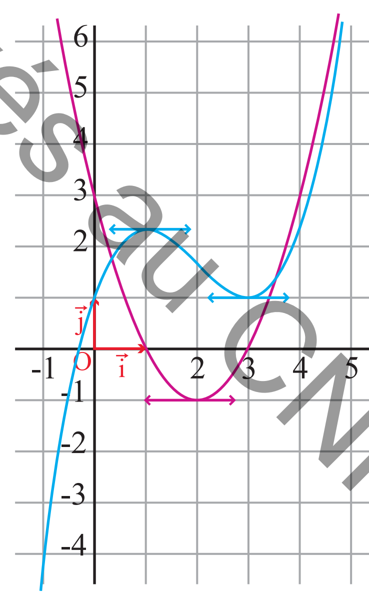
On sait que les fonctions g et h sont des primitives sur $\mathbb{R}$ de la fonction f.

1. Préciser la courbe de f. Justifier votre réponse.
2. Identifier la courbe de la primitive de f sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 2.

4 Dans chacun des cas suivants, justifier que la fonction f possède des primitives sur l'intervalle I et déterminer sa primitive F vérifiant $F(x_0) = y_0$.

1. $f : x \mapsto 4x^2 - 1$, $I = \mathbb{R}$, $F(0) = 0.$
2. $f : x \mapsto \dfrac{4}{x^2} + x$, $I =]-\infty, 0[$, $F(-1) = 2.$
3. $f : x \mapsto x^3 - 6x + 4$, $I = \mathbb{R}$, $F(1) = 0.$

5 Dans la figure ci-contre on a représenté dans un repère orthonormé la courbe représentative d'une fonction polynôme F de degré 3 et la courbe de sa dérivée f.

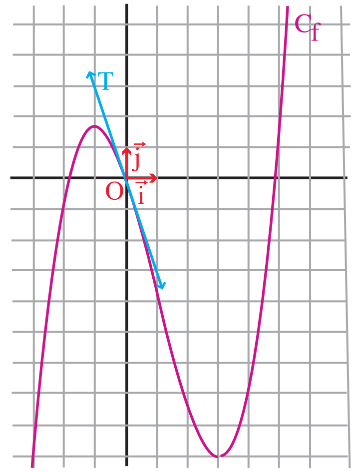


1. Utiliser le graphique pour montrer que

   pour tout réel x, $f(x) = x^2 - 4x + 3$.

2. Déterminer alors $F(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

***6** Dans la figure ci-contre on a représenté la courbe C_f d'une fonction polynôme de degré 3, ainsi que la tangente T au point d'abscisse 0.

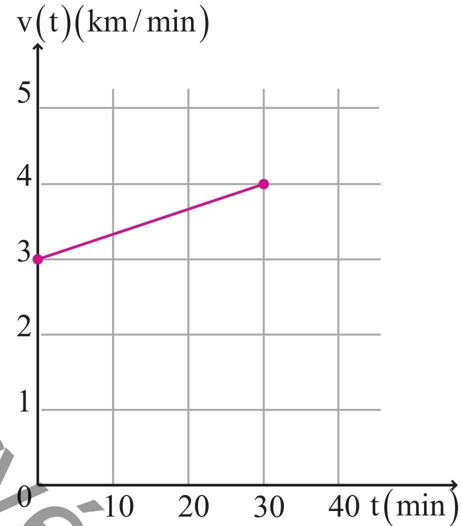


1. a. Déterminer $f(0)$ et $f'(0)$.

   b. Déterminer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

2. En déduire $f(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

***7** Une voiture de course prend 30 minutes pour parcourir les 105 km qui séparent deux villes A et B (de A vers B).



1. Quelle est sa vitesse moyenne pendant cette période de la course ?
2. Le graphique ci-contre représente, dans un repère orthogonal, la vitesse instantanée $v(t)$ exprimée en km/min de cette voiture, $t \in [0, 30]$.

   a. Déterminer $v(0)$ et $v(30)$.

   b. Justifier que $v(t) = \frac{1}{30}t + 3$.

   c. Quelle est la distance parcourue par cette voiture entre $t = 3$ min et $t = 5$ min ?

8 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - x - 2$.

On désigne par $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. a. Dresser le tableau de variation de la fonction f.

   b. Tracer $\mathscr{C}$ en précisant l'intersection avec l'axe des abscisses.

2. Calculer l'aire de la partie du plan limitée par $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = -1$ et $x = 2$.

9 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\frac{1}{3}x^3+x$.

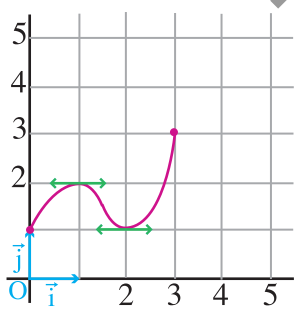
On désigne par $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. a. Dresser le tableau de variation de la fonction f.

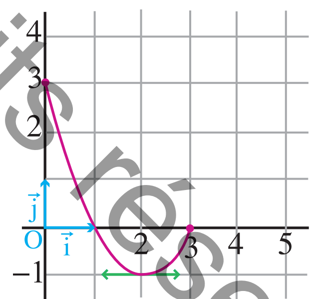
   b. Tracer $\mathscr{C}$, en précisant son intersection avec l'axe des abscisses.

2. Calculer l'aire de la partie du plan limitée par $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=-1$ et $x=\sqrt{3}$.

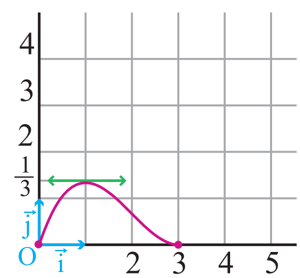
10 1. Pour chacune des fonctions F_i, $i \in \{1,2,3\}$ représentées ci-après, dresser le tableau de variation correspondant sur l'intervalle $[0, 3]$.



(I)



(II)



(III)

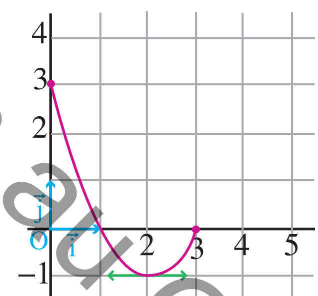
2. Dans la figure ci-contre on a représenté la courbe d'une fonction f dérivable sur $[0, 3]$.

   a. On sait que l'une des fonctions F_i, $i \in \{1,2,3\}$ est une primitive de f sur $[0, 3]$. Laquelle ?

   On note F cette primitive.

   b. Montrer que l'aire $\mathcal{A}$ de la partie du plan limitée par la courbe de f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=0$ et $x=3$ est égale à $2F(1)$.

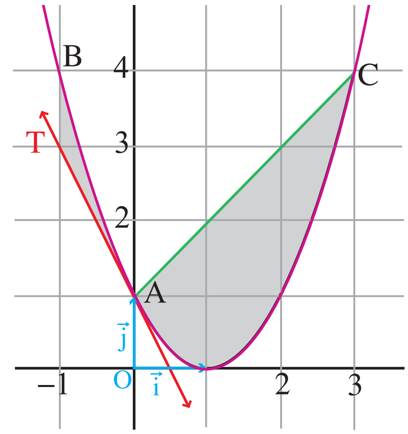
   c. En déduire la valeur de $\mathcal{A}$.



11 Soit les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\frac{1}{2}x^3$ et $g(x)=x^2-\frac{1}{2}x$. On désigne par $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ leurs courbes représentatives respectives dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1. a. Dresser le tableau de variation de la fonction f.
   b. Dresser le tableau de variation de la fonction g.
   c. Vérifier que pour tout réel x, $f(x)-g(x)=\frac{1}{2}x(x-1)^2$.
   En déduire la position relative des courbes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$
   d. Tracer $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$.
2. Calculer l'aire de la partie du plan limitée par $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ et les droites d'équations $x=-1$ et $x=1$.

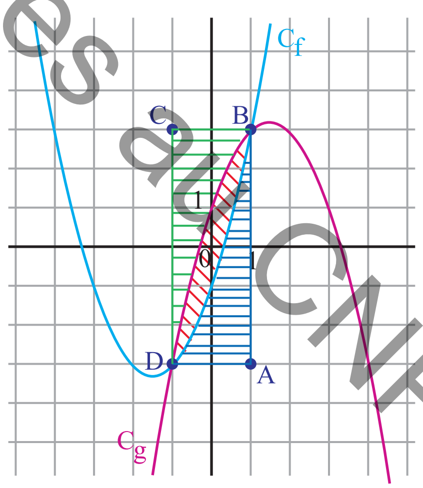
***12** Dans le graphique ci-contre, la courbe qui passe par les points A, B et C est une portion de la parabole $\mathscr{P}$ d'équation $y=(x-1)^2$.



1. Ecrire une équation de la tangente T à $\mathscr{P}$ au point A.
2. Donner une équation de la droite (AC).
3. Calculer, en unité d'aire, l'aire de la partie colorée.

13 Dans le graphique ci-contre on a représenté dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ les fonctions

$f:x\mapsto x^2+3x-1$ et $g:x\mapsto -x^2+3x+1$.



On note :

$\mathcal{A}_R$ l'aire de la partie hachurée en rouge.

$\mathcal{A}_B$ l'aire de la partie hachurée en bleu.

$\mathcal{A}_V$ l'aire de la partie hachurée en vert.

1. Calculer, en unité d'aire, l'aire $\mathcal{A}_R$.
2. Montrer que $\mathcal{A}_B=\mathcal{A}_V$.

14 Soit f la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par $f(x)=x^2$.

On désigne par C_f la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

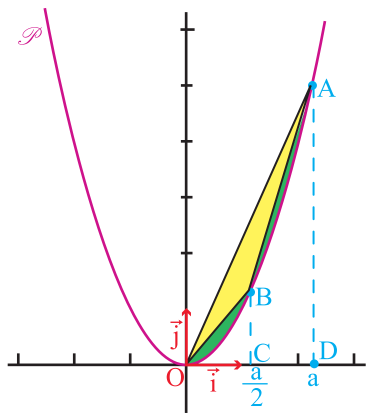
1. Tracer C_f.

2. a. Montrer que f réalise un bijection de $[0,+\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera.

   b. Tracer $C_{f^{-1}}$ la courbe de la fonction réciproque de f.

   c. Calculer l'aire de la partie du plan comprise entre C_f et $C_{f^{-1}}$.

15 Dans le graphique ci-contre on a représenté dans un repère orthonormé la parabole $\mathscr{P}$ d'équation $y=x^2$.



On note A le point de $\mathscr{P}$ d'abscisse a $(a>0)$, B est le point de $\mathscr{P}$ d'abscisse $\frac{a}{2}$.

Les points C et D sont les points de coordonnées respectives $\left(\frac{a}{2},0\right)$ et $(a,0)$.

On désigne par $\mathcal{A}_1$ l'aire de la partie coloriée en jaune.

On désigne par $\mathcal{A}_2$ l'aire de la partie coloriée en vert.

1. a. Justifier qu'une équation de la droite (OA) est $y=ax$.

   b. Justifier qu'une équation de la droite (OB) est $y=\frac{a}{2}x$.

   c. Justifier qu'une équation de la droite (AB) est $y=\frac{3}{2}ax-\frac{a^2}{2}$.

   d. Justifier que $\mathcal{A}_1=\int_0^{\frac{a}{2}}\frac{a}{2}x\,dx+\int_{\frac{a}{2}}^{a}(\frac{a^2}{2}-\frac{x}{2})\,dx$.

   e. En déduire la valeur de $\mathcal{A}_1$ à l'aide de a.

2. a. Calculer l'aire de la partie du plan limitée par $\mathscr{P}$, la droite (OA) est les droites d'équation $x=0$ et $x=a$.

   b. En déduire la valeur de $\mathcal{A}_2$ à l'aide de a.

3. Montrer que le rapport $\frac{\mathcal{A}_1}{\mathcal{A}_2}$ est constant lorsque a varie dans $]0,+\infty[$.

Correction de l'exercice 6 :

1. a. • $f(0)=0$.

• La tangente à C_f en O passe par le point de coordonnées $(1,-3)$, alors $y=-3x$ est une équation de T. Par suite $f'(0)=-3$.

b. f est une fonction polynôme de degré 3 alors f' est une fonction polynôme de degré 2, c'est-à-dire il existe trois réels a, b et c tels que $f'(x)=ax^2+bx+c$.

De l'égalité $f'(0)=-3$ on déduit que $c=-3$.

La courbe C_f admet deux tangentes horizontales aux points d'abscisses (-1) et 3.

Par conséquent $f'(-1)=0$ et $f'(3)=0$.

Ainsi a et b vérifient les deux équations suivantes : $\begin{cases} a-b-3=0 \\ 9a+3b-3=0 \end{cases}$

On trouve $a=1$ et $b=-2$. Autrement dit $f'(x)=x^2-2x-3$.

2. f est une primitive sur $\mathbb{R}$ de f' qui s'annule en 0 $(f(0)=0)$.

Alors il existe $k\in\mathbb{R}$ tel que $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2-3x+k$.

De l'égalité $f(0)=0$, on déduit que $k=0$. Par suite $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2-3x$.

Correction de l'exercice 7 :

1. La voiture parcourt 105 km en $\frac{1}{2}$ heure. Sa vitesse moyenne en km/h est $\frac{105}{\frac{1}{2}}=210$.

2. a. $V(0)=3$ km/min , $V(30)=4$ km/min.

b. La représentation graphique de la fonction $v:t\mapsto v(t)$ est un segment de droite.

Alors $v(t)=at+b$ où a et b sont deux réels.

• $V(0)=3$ équivaut à $b=3$.

• $V(30)=4$ équivaut à $30a+b=4$. Par suite $a=\frac{1}{30}$. Ainsi $V(t)=\frac{1}{30}t+3$.

c. Notons $d(t)$ la distance par parcourue par cette voiture à l'instant t , $t\in[0,30]$.

La fonction $t\mapsto d(t)$ est une primitive de la fonction v sur $[0\,,\,30]$.

Alors $d(t)=\frac{1}{60}t^2+3t+k$, $k\in\mathbb{R}$.

La distance parcourue entre $t=3$ min et $t=5$ min est égale à $d(5)-d(3)=\frac{16}{60}+6$ km.

Une valeur arrondie au mètre de cette distance est 6267 mètres.

Correction de l'exercice 12 :

1. $T : y = -2x + 1$

2. $(AC) : y = x + 1$

3. On partage la partie colorée en deux parties (P_1) et (P_2).

   (P_1) limitée par $\mathscr{P}$, la droite T les droites $x = -1$, $x = 0$.

   (P_2) limitée par $\mathscr{P}$, (AC) et les droites $x = 0$ et $x = 3$.

   • Sur $[-1, 0]$, $\mathscr{P}$ est au dessous de T,

   alors $\text{Aire}(P_1) = \int_{-1}^{0}\left[(x-1)^2 - (-2x+1)\right]dx = \int_{-1}^{0} x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{0} = \frac{1}{3}(\text{u.a}).$

   • Sur $[0, 3]$, $\mathscr{P}$ est au dessous de (AC),

   alors $\text{Aire}(P_2) = \int_{0}^{3}\left[(x+1) - (x-1)^2\right]dx = \int_{0}^{3}\left(-x^2 + 3x\right)dx = \left[\frac{-x^3}{3} + \frac{3}{2}x^2\right]_{0}^{3} = \frac{9}{2}(\text{u.a}).$

Conclusion : $\mathcal{A} = \text{Aire}(P_1) + \text{Aire}(P_2) = \frac{1}{3} + \frac{9}{2} = \frac{29}{6}(\text{u.a}).$

Chapitre 4

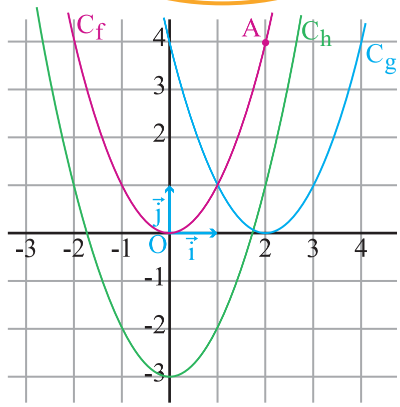
Fonction logarithme népérien

Aperçu historique

Neper (1550-1617) :« On rejette les nombres utilisés dans les multiplications, les divisions et les extractions de racines lorsqu'elles sont difficiles et prolixes, et on les remplace par d'autres nombres, que j'ai pris soin de leur adjoindre, et l'on achève le calcul par des additions, des soustractions, des divisions par deux et par trois seulement... »

Extrait de la Préface de la « merveilleuse règle des Logarithmes de Jean Neper

Activité 1



Dans La figure ci-contre on a représenté, dans un repère orthogonal, les courbes représentatives des fonctions $f : x \mapsto x^2$, $g : x \mapsto x^2 - 4x + 4$ et $h : x \mapsto x^2 - 3$.

1. Soit A le point de C_f d'abscisse 2.
   On désigne par B l'image de A par la translation de vecteur $2\vec{i}$ et par C l'image de A par la translation de vecteur $-3\vec{j}$.
   a. Trouver les coordonnées des points B et C.
   b. Vérifier que B appartient à la courbe C_g et que C appartient à la courbe C_h.

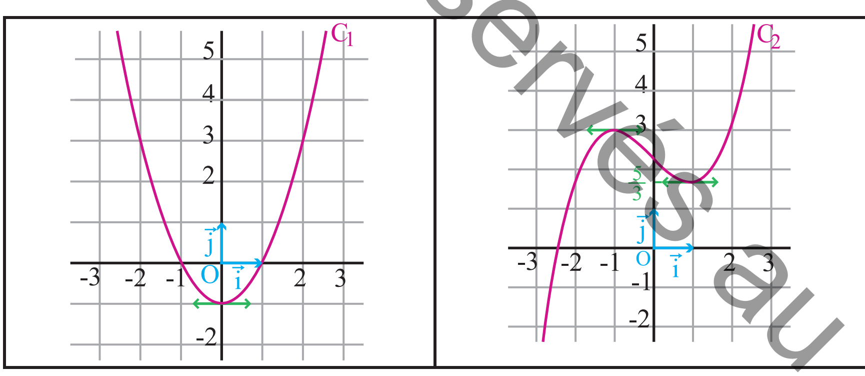
2. Vérifier que pour tout réel x, $g(x) = f(x-2)$.

3. a. Par quelle translation C_g est obtenue à partir de C_f ?
   b. Par quelle translation C_h est obtenue à partir de C_f ?

Activité 2

Le plan est muni d'un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

On a représenté-ci-après une fonction f continue sur $\mathbb{R}$ ainsi qu'une primitive F de f sur $\mathbb{R}$.



1. Identifier la courbe de f et celle de F.
2. Monter que l'aire (en u.a) de la partie du plan limitée par la courbe représentative de f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = -1$ et $x = 1$ est égale à $\frac{4}{3}$.
3. Soit la fonction $G : x \mapsto F(x) - 3$.
   Montrer que G est la primitive de f sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en -1.

I. Définition

Activité 1

Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{x}$.

1. Montrer que f admet des primitives sur $]0, +\infty[$.
   On note F la primitive de f qui s'annule en 1.
2. Dans la figure ci-contre on a représenté dans un repère orthonormé la courbe C_f de la fonction f.
   On désigne par $\mathcal{A}(2)$ l'aire de la partie du plan limitée par la courbe C_f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 2$.
   a. Justifier que $\mathcal{A}(2) = F(2)$.
   b. En déduire que $1 < F(2) < 2$.

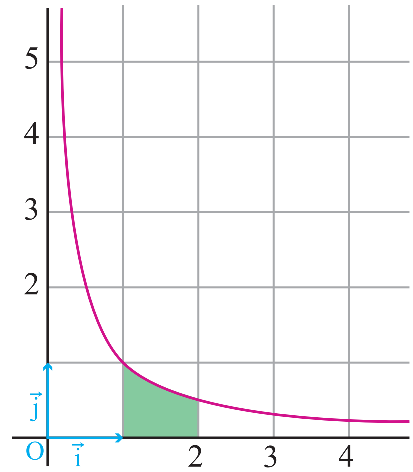


Figure 1

3. Soit a un réel strictement positif. On désigne par $\mathcal{A}(a)$ l'aire de la partie du plan limitée par la courbe C_f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = a$.
   a. Que vaut $\mathcal{A}(1)$?
   b. Montrer que si $a > 1$ alors $F(a) = \mathcal{A}(a)$ et si $0 < a < 1$ alors $F(a) = -\mathcal{A}(a)$.
4. La figure ci-dessous est un agrandissement d'une partie de la figure 1.

Figure 2

a. Exprimer en (u.a) l'aire du petit carreau coloré en vert.

b. En comptant les petits carreaux de la partie colorée en bleu, estimer la valeur de $F(2)$.

(Les carreaux partiels seront comptés $\frac{1}{2}$).

c. Avec le même procédé de la question précédente estimer les valeurs de $F(3), F(1.5)$ et $F(0.5)$.

5. En utilisant la touche ln de votre calculatrice, calculer $\ln(1)$, $\ln(2)$, $\ln(2.5)$ et $\ln(0.5)$.

Définition

On appelle fonction logarithme népérien et on note ln la primitive sur $]0, +\infty[$ qui s'annule en 1 de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$.

Conséquences

1. La fonction ln est définie, continue et dérivable sur $]0, +\infty[$ et pour tout réel x de $]0, +\infty[$, $\ln'(x) = \frac{1}{x}$.

2. Pour tout réel a strictement positif, $\int_1^a \frac{dx}{x} = \ln(a)$

3. La fonction ln est strictement croissante sur $]0, +\infty[$.

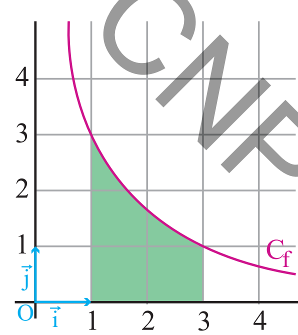
4. Pour tous réels a et b de l'intervalle $]0, +\infty[$,
   - $\ln(a) > \ln(b)$ si et seulement si $a > b$.
   - $\ln(a) = \ln(b)$ si et seulement si $a = b$.

En particulier :
- $\ln(a) = 0$ si et seulement si $a = 1$.
- $\ln(a) < 0$ si et seulement si $0 < a < 1$.
- $\ln(a) > 0$ si et seulement si $a > 1$.

Activité 2

Dans la figure ci-contre on a représenté dans un repère orthonormé la courbe de la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \frac{3}{x}$.

Calculer l'aire de la partie du plan limitée par C_f l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 3$.



Activité 3

1. Résoudre dans $]0, +\infty[$ les équations suivantes :

a. $\ln(x) = \ln(5)$.　　b. $\ln(x) = 0$.　　c. $\ln(3x) = \ln(2)$.

2. Résoudre dans $]0, +\infty[$ les inéquations suivantes :

a. $\ln(x) < \ln\left(\frac{1}{2}\right)$.　　b. $\ln(3x) < 0$.　　c. $\ln(2x) \geq \ln(2)$.

II. Propriétés de la fonction ln

Activité 1 (Avec l'ordinateur)

On se propose de comparer, à l'aide d'un tableur Excel, $\ln(ab)$ avec $\ln(a)+\ln(b)$ où a et b sont deux réels strictement positifs.

Pour réaliser la feuille de calcul avec le tableur Excel,

- Dans les cellules A1, B1, C1 et D1 taper respectivement a, b, $\ln(ab)$ et $\ln(a)+\ln(b)$.
- Dans la cellule A2, taper par exemple 1; dans la cellule B2, taper par exemple 2.
- Dans la cellule C2, taper $\boxed{= LN(A2 * B2)}$.
- Dans la cellule D2, taper $\boxed{= LN(A2) + LN(B2)}$.
- Dans la cellule A3, taper par exemple $\boxed{= A2 + 0.5}$.
- Dans la cellule B3, taper par exemple $\boxed{= B2 + 0.5}$.

Glisser chaque colonne vers le bas. On obtient la feuille de calcul suivante :

	A	B	C	D
1	a	b	ln(ab)	ln(a)+ln(b)
2	1	2	0,69314718	0,69314718
3	1,5	2,5	1,32175584	1,32175584
4	2	3	1,79175947	1,79175947
5	2,5	3,5	2,1690537	2,1690537
6	3	4	2,48490665	2,48490665
7	3,5	4,5	2,75684037	2,75684037
8	4	5	2,99573227	2,99573227
9	4,5	5,5	3,20882549	3,20882549
10	5	6	3,40119738	3,40119738

Comparer dans chaque ligne $\ln(ab)$ et $\ln(a)+\ln(b)$.

Propriété

Pour tous réels strictement positifs a et b , $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$.

Activité 2

Soit a et b deux réels strictement positifs.

1. a. En écrivant $a \times \frac{1}{a} = 1$ et $\frac{a}{b} = a \times \frac{1}{b}$, montrer que $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a)$ et $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$.

   b. En écrivant $a = \left(\sqrt{a}\right)^2$, montrer que $\ln\left(\sqrt{a}\right) = \frac{1}{2}\ln(a)$.

2. a. Montrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n, $\ln\left(a^n\right) = n \times \ln(a)$.

   b. En déduire que pour tout entier naturel non nul n, $\ln\left(a^{-n}\right) = -n \times \ln(a)$.

Propriétés

- Pour tous réels strictement positifs a et b,
  $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a)$, $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$, $\ln\left(\sqrt{a}\right) = \frac{1}{2}\ln a$.
- Pour tout réel $a > 0$ et pour tout entier relatif n, $\ln\left(a^n\right) = n \times \ln(a)$.

Activité 3

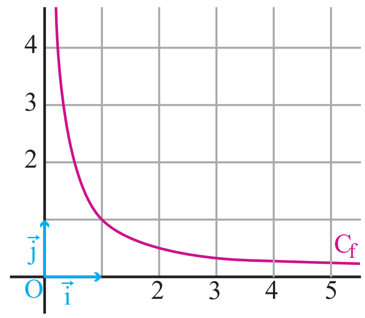
1. Simplifier les écritures suivantes :
   a. $\ln(15) - \ln(5)$.
   b. $\ln(4) + 2\ln(2) + \ln\left(\frac{1}{2}\right)$.
   c. $\ln(10000) - \ln(32)$.
   d. $\ln\left(10^{-3}\right) + \ln\left(10^4\right)$.
   e. $\ln(25) - \ln(75) + 2\ln\left(\sqrt{5}\right)$.

2. a. Déterminer le plus petit entier naturel n tel que $\left(\sqrt{5}\right)^n \geq 10^5$.

   b. Déterminer le plus petit entier naturel n tel que $\left(\frac{3}{4}\right)^n \leq 10^{-5}$.

Activité 4

Dans la figure ci-contre on a représenté, dans un repère orthonormé, la courbe représentative de la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x)=\frac{1}{x}$.



On désigne par $\mathcal{A}_1$ l'aire en $(u.a)$ de la partie du plan limitée par les courbes C_f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=2$ et $x=4$ et par $\mathcal{A}_2$ l'aire en $(u.a)$ de la partie du plan limitée par le courbes C_f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=\frac{1}{4}$ et $x=\frac{1}{2}$.

Montrer que $\mathcal{A}_1=\mathcal{A}_2$.

Activité 5

Au niveau de la mer (altitude 0), la pression atmosphérique est 1 013 hectopascal.
Dans cet exercice, on admet que la pression atmosphérique diminue de 1,25% à chaque élévation de 100 m. Pour tout entier naturel n, on note P_n la pression, exprimée en hectopascal, à l'altitude 100n, exprimée en mètres. Soit (P_n) la suite numérique des valeurs prises par cette pression atmosphérique. On a alors $P_0=1013$.

1. Calculer les pressions P_1 et P_2 arrondies à l'unité, aux altitudes 100 m et 200 m.
2. a. Exprimer P_{n+1} en fonction de P_n.

   b. En déduire que $P_n=1013\times(0.875)^n$.
3. L'équipe nationale tunisienne s'est déplacée vers la ville de Mexico où l'altitude est de 3500 m . Calculer la pression atmosphérique, arrondie à l'unité, à cette altitude.
4. Calculer à partir de quelle altitude, à 100 m près, la pression atmosphérique devient inférieure à 500 hectopascal.

III. Etude et représentation graphique de la fonction ln

Activité 1

Utiliser la touche ln de la calculatrice pour compléter le tableau suivant :

x	10^{-50}	10^{-20}	10^{-5}	10^{-1}	10	10^{5}	10^{10}	10^{30}	10^{60}
$\ln(x)$									

1. Que peut-on conjecturer sur $\ln(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$?
2. Que peut-on conjecturer sur $\ln(x)$ lorsque x tend vers 0 et $x>0$?

Théorème

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \ln(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$.

Activité 2

1. Dresser le tableau de variation de la fonction ln.
2. a. Montrer que l'équation $\ln(x)=1$ admet une unique solution dans l'intervalle $]0,+\infty[$.
   On note e cette solution.
   b. En utilisant une calculatrice, justifier que $2.7<e<2.8$.
   c. Déterminer une valeur approchée à 10^{-5} près des réels $\ln(2.7182)$ et $\ln(2.7183)$.
   d. Calculer $\ln\left(e^2\right)$, $\ln\left(e^3\right)$ et $\ln\left(\dfrac{1}{e^2}\right)$.

Retenons

Il existe un unique réel strictement positif noté e tel que $\ln(e)=1$.
Une valeur approchée de e est 2.71828128…..

Activité 3

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative, dans un repère orthogonal, de la fonction ln.

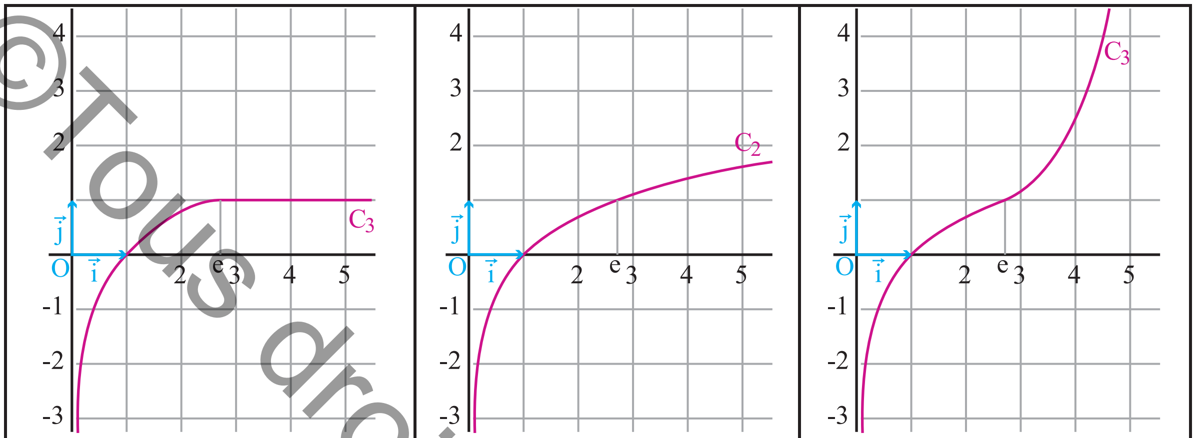
Pour tout réel $x>0$, on désigne par M le point de $\mathscr{C}$ d'abscisse x.

1. Que représente le rapport $\dfrac{\ln(x)}{x}$ pour la droite (OM).
2. a. Compléter le tableau suivant :

x	10	10^{5}	10^{20}	10^{30}	10^{40}
$\dfrac{\ln(x)}{x}$					

b. Que peut-on conjecturer sur $\frac{\ln(x)}{x}$ lorsque x tend vers $+\infty$?

c. L'une des trois courbes représentées ci-dessous est celle de la fonction ln. Laquelle ?



Théorème

La courbe représentative de la fonction ln dans un repère orthogonal admet :

- une branche parabolique de direction celle de l'axe des abscisses.
- une asymptote verticale d'équation x = 0.

IV. Fonction du type $x \mapsto \ln(ax+b)$, $a > 0$

Activité 1

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :
   a. $3x > 0$.
   b. $2x - 7 > 0$.
   c. $3x + 6 > 0$.
2. Déterminer les réels x pour lesquels,
   a. $\ln(3x)$ existe.
   b. $\ln(2x-7)$ existe.
   c. $\ln(3x+6)$ existe.

Théorème

Soit a un réel strictement positif et b un réel.

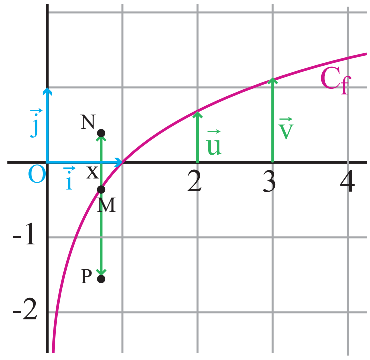
La fonction $x \mapsto \ln(ax+b)$ est définie, continue et dérivable sur $\left]\frac{-b}{a}, +\infty\right[$.

Activité 2

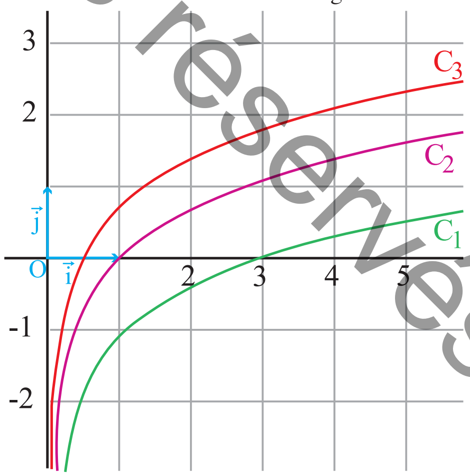
On considère les fonctions $f : x \mapsto \ln(x)$, $g : x \mapsto \ln(2x)$ et $h : x \mapsto \ln\left(\frac{1}{3}x\right)$.

On désigne par C_f, C_g et C_h leurs courbes représentatives dans un repère orthogonal.

1. a. Déterminer l'ensemble de définition de chacune des fonctions f, g et h.
   b. Monter que les fonctions f, g et h sont des primitives sur $]0,+\infty[$ d'une même fonction que l'on précisera.
2. Dans le graphique ci-contre on a représenté C_f.
   Soit x un réel strictement positif. On note M le point de C_f d'abscisse x, N l'image de M par la translation de vecteur $\vec{u} = \ln(2)\vec{j}$ et P l'image de M par la translation de vecteur $\vec{v} = -\ln(3)\vec{j}$.
   a. Exprimer à l'aide de x les coordonnées des points M, N et P.
   b. Justifier que N appartient à C_g et que P appartient à C_h.



3. Dans le graphique ci-dessous on a représenté C_f, C_g et C_h.



   a. Associer à chacune des fonctions g et h sa courbe représentative.
   b. Dresser le tableau de variation de chacune des fonctions g et h.
   c. Que peut-on conjecturer sur le comportement des fonctions g et h à l'infinie ?

Théorème

Pour tout réel $a > 0$ la fonction $x \mapsto \ln(ax)$ est une primitive sur $]0,+\infty[$ de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$.

Activité 3

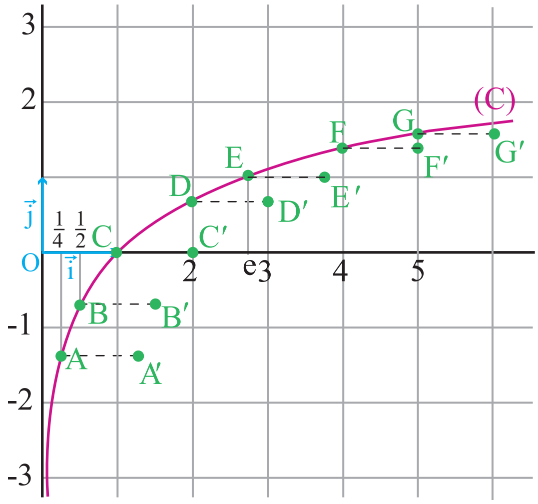
Soit la fonction $f : x \mapsto \ln(x-1)$ et C_f sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

1. Justifier que l'ensemble de définition de f est $]1, +\infty[$.

2. Dans la figure ci-contre on a représenté dans un repère orthogonal la courbe représentative (C) de la fonction ln.

   Les abscisses respectives des points A, B, C, D, E, F et G sont $\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, 2, e, 4$ et 5.

   Les points A', B', C', D', E', F' et G' sont les images respectives des points A, B, C, D, E, F et G par la translation de vecteur $\vec{i}$.



   a. Montrer que les points A', B', C', D', E', F' et G' appartiennent à la courbe C_f.

   b. Que peut-on conjecturer sur $\ln(x-1)$ lorsque x tend vers $+\infty$?

   c. Que peut-on conjecturer sur $\ln(x-1)$ lorsque x tend vers 1 et $x > 1$?

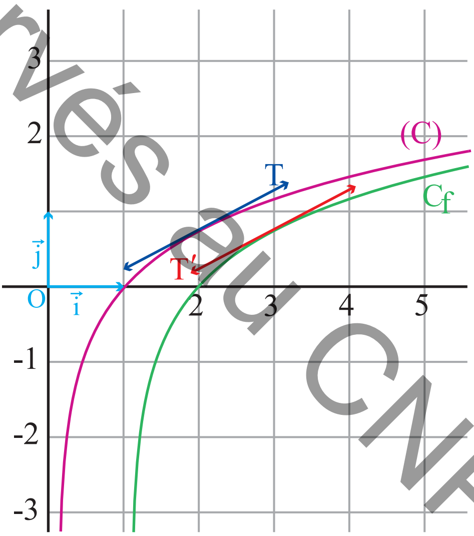
3. Dans la figure ci-contre on a représenté, dans le même repère les courbes (C) et C_f.

   La droite T est la tangente à (C) en son point D d'abscisse 2 et la droite T' est la tangente à C_f en son point D' d'abscisse 3.

   a. Déterminer la pente de la droite T.

   b. En remarquant que $t_{\vec{i}}(A) = B$, déterminer la pente p de la droite T'.

   c. Vérifier que p est l'image de 3 par la fonction $x \mapsto \frac{1}{x-1}$



Théorème

Soit b un réel. La fonction $f : x \mapsto \ln(x+b)$ est dérivable sur $]-b, +\infty[$.

Pour tout réel $x > -b$, $f'(x) = \dfrac{1}{x+b}$.

Activité 4

On considère la fonction $f : x \mapsto \ln(3x-2)$.

1. Vérifier que pour tout réel de l'intervalle $\left]\dfrac{2}{3}, +\infty\right[$, $f(x) = \ln 3 + \ln\left(x - \dfrac{2}{3}\right)$.
2. En déduire que f est dérivable sur $\left]\dfrac{2}{3}, +\infty\right[$ et que pour tout réel $x > \dfrac{2}{3}$, $f'(x) = \dfrac{3}{3x-2}$.

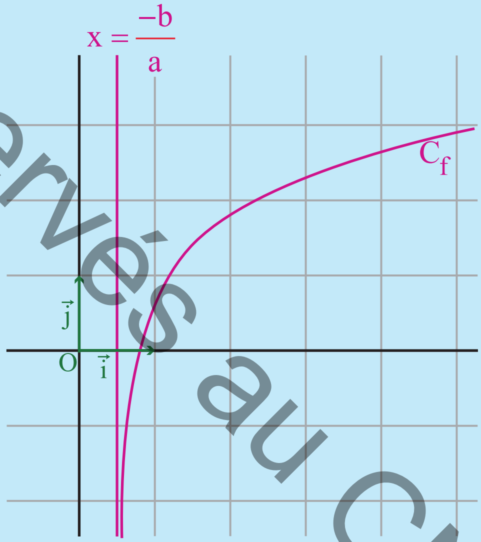
Théorème

Soit a et b deux réels tels que $a > 0$.

Soit f la fonction $x \mapsto \ln(ax+b)$.

On désigne par C_f la courbe de f dans un repère orthogonal.

- f est définie, continue et dérivable sur $\left]\dfrac{-b}{a}, +\infty\right[$.
- $\lim\limits_{x \to \left(\frac{-b}{a}\right)^+} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.
- Pour tout réel $x > \dfrac{-b}{a}$, $f'(x) = \dfrac{a}{ax+b}$.
- La droite d'équation $x = \dfrac{-b}{a}$ est une asymptote verticale à C_f.
- C_f admet une branche parabolique de direction celle de l'axe des abscisses au voisinage de $+\infty$.



Activité 5

Déterminer, dans chaque cas, le tableau de variation de la fonction f.

1. $f : x \mapsto \ln(3x-1)$.
2. $f : x \mapsto \ln(4x)$.
3. $f : x \mapsto \ln(2x+5)$.

Activité 6

Lord d'une expérience, on a mesuré la fréquence cardiaque, en battements par minute, d'un coureur en course de 400 mètres.

Cette fréquence est modélisée par la fonction f définie sur $[0, 400]$ par

$f(x)=65+\frac{51}{\ln(10)}\times\ln(1+x)$ où x désigne la distance parcourue en mètres depuis le départ.

1. Donner la fréquence cardiaque du sportif au début de la course.
2. Calculer la fréquence cardiaque du sportif à mi-course.
   (on donne le résultat arrondi à l'unité)
3. a. Déterminer le sens de variation de la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ sur l'intervalle $[0, 400]$.

   b. Montrer que l'inéquation $f(x) \geq 167$ est équivalente à $\ln(1+x) \geq \ln(100)$.

   c. Au bout de combien de mètres la fréquence cardiaque du sportif dépassera-t-elle 167 battements par minute ?

Activité 7

Soit la fonction $f : x \mapsto \ln(2x+1)$ et C_f sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

1. Montrer que C_f coupe l'axe des abscisses en un seul point A que l'on déterminera.
2. a. Dresser le tableau de variation de f.

   b. Ecrire une équation de la tangente à C_f au point A.
3. Tracer C_f et tracer la tangente en A.

Activité 8

Soit la fonction $f : x \mapsto \ln\left(\frac{2}{3}x+1\right)$ et C_f sa courbe dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Dresser le tableau de variation de f.
2. Soit $\mathscr{C}$ la courbe représentative, dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, de la fonction $x \mapsto \ln(x)$.

   a. Etudier la position relative de C_f et $\mathscr{C}$.

   b. Construire C_f et $\mathscr{C}$ dans le même repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

IV. Fonction du type $x \mapsto \ln(ax+b),\ a<0$

Activité 1

Déterminer les réels x pour lesquels,

a. $\ln(-3x)$ existe.

b. $\ln(-2x+5)$ existe.

c. $\ln(-3x-6)$ existe.

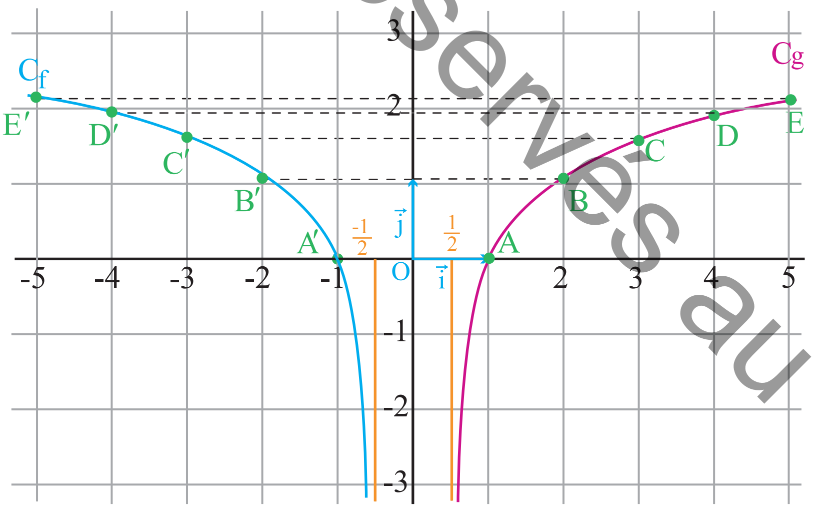
Activité 2

Soit la fonction $f : x \mapsto \ln(-2x-1)$ et C_f sa courbe représentative dans un plan rapporté à un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Dans la figure ci-dessous on a représenté dans un repère orthogonal la courbe représentative de la fonction $g : x \mapsto \ln(2x-1)$.

   A, B, C, D et E sont les points de C_g d'abscisses respectives $1, 2, 3, 4$ et 5.

   Les points A', B', C', D' et E' sont les images respectives des points A, B, C, D et E par la symétrie axiale d'axe la droite d'équation $x = 0$.



a. Déterminer les coordonnées des points A', B', C', D' et E'.
   En déduire qu'ils appartiennent à la courbe C_f.

b. Que peut-on conjecturer sur $\ln(-2x-1)$ lorsque x tend vers $-\infty$?

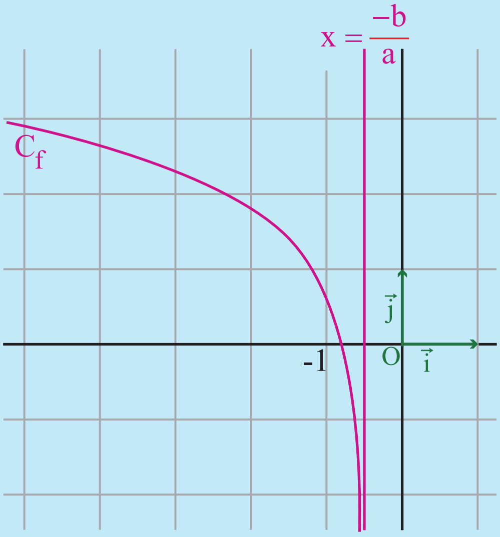
c. Que peut-on conjecturer sur $\ln(-2x-1)$ lorsque x tend vers $\frac{-1}{2}$ et $x < \frac{-1}{2}$?

Théorème

Soit a et b deux réels tels que $a<0$.

Soit f la fonction $x \mapsto \ln(ax+b)$. On désigne par C_f la courbe de f dans un repère orthogonal.

- f est définie, continue et dérivable sur $\left]-\infty, \frac{-b}{a}\right[$.
- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to \left(\frac{-b}{a}\right)^-} f(x) = -\infty$.
- Pour tout réel $x < \frac{-b}{a}$, $f'(x) = \frac{a}{ax+b}$.
- La droite d'équation $x = \frac{-b}{a}$ est une asymptote verticale à C_f.
- C_f admet une branche parabolique de direction celle de l'axe des abscisses au voisinage de $-\infty$.



Activité 3

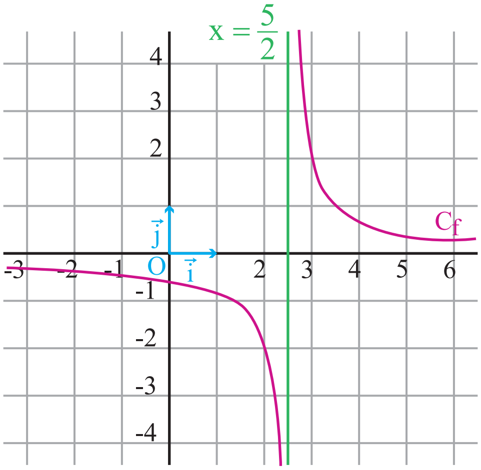
Soit la fonction $f : x \mapsto \ln\left(-\frac{1}{2}x+2\right)$ et C_f sa courbe dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Déterminer l'intersection de C_f avec les axes du repère.
2. a. Dresser le tableau de variation de f.

   b. Ecrire une équation de la tangente T à C_f en son point d'abscisse 2.
3. Tracer C_f et tracer la tangente T.

Activité 4

Dans la figure ci-contre on a représenté, dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$, la fonction f définie sur $\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{5}{2}\right\}$ par $f(x)=\frac{2}{2x-5}$.



1. a. Justifier que la fonction f admet des primitives sur $\left]-\infty, \frac{5}{2}\right[$.

   b. Justifier que la fonction f admet des primitives sur $\left]\frac{5}{2}, +\infty\right[$.

2. Soit la fonction $F: x \mapsto \ln\left(|2x-5|\right)$.

   a. Montrer que l'ensemble de définition de F est $\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{5}{2}\right\}$.

   b. Ecrire $F(x)$ sans valeur absolue.

   c. En déduire que pour tout réel x de $\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{5}{2}\right\}$, $F'(x)=f(x)$.

3. a. Calculer, l'aire de la partie du plan limitée par C_f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=0$ et $x=1$.

   b. Calculer, l'aire de la partie du plan limitée par C_f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=3$ et $x=4$.

Théorème

Soit a et b deux réels tels que $a \neq 0$ et I un intervalle inclus dans $\left]-\infty, \frac{-b}{a}\right[$ ou $\left]\frac{-b}{a}, +\infty\right[$.

La fonction $f: x \mapsto \frac{a}{ax+b}$ admet la fonction $F: x \mapsto \ln\left(|ax+b|\right)+k, k \in \mathbb{R}$ comme primitive de f sur I.

Activité 5

Si l'évolution, au cours du temps, d'une population est modélisé par une fonction $P : t \mapsto P(t)$ alors
Le rythme de croissance à l'instant t est donné par la fonction $P' : t \mapsto P'(t)$.

Une culture de bactéries a un rythme de croissance modélisé par la fonction définie par $f(t) = \dfrac{3000}{1+0.25t}$ où t est le temps écoulé en jours.
Au temps $t = 0$, la culture comporte 1000 bactéries.

1. Déterminer $P(t)$, le nombre de bactéries après t jours.
2. Déterminer le nombre de bactéries après trois jours.
3. Après combien de jours le nombre de bactéries dépassera-t-il 1200 ?

Activité 6

Soit la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x}{x-1}$ et C_f sa courbe dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. a. Dresser le tableau de variation de f.
   b. Tracer C_f.
2. a. Vérifier que pour tout x de $\mathbb{R}\backslash\{1\}$, $\dfrac{x}{x-1} = 1 + \dfrac{1}{x-1}$.
   b. Calculer l'aire de la partie du plan limitée par C_f l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = -2$ et $x = 0$.

V. Primitives de la fonction $x \mapsto \ln(ax+b)$

Activité 1

1. Tracer, dans un repère orthonormé, la courbe représentative (C) de la fonction ln.
2. Soit la fonction F définie sur $]0, +\infty[$ par $F(x) = x\ln(x) - x$.
   Calculer $F'(x)$ pour tout $x \in]0, +\infty[$.

Soit f et g deux fonctions dérivables sur un intervalle I.
La fonction $f \times g$ est dérivable sur I et
$(f \times g)' = f' \times g + g' \times f$.

3. En déduire l'aire de la partie du plan limitée par C_f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 2$.

Théorème

La fonction $x \mapsto x\ln(x) - x$ est une primitive de la fonction $x \mapsto \ln(x)$ sur $]0, +\infty[$.

Activité 2

1. Soit la fonction F définie sur $\left]\frac{3}{2}, +\infty\right[$ par $F(x)=(2x-3)\ln(2x-3)-2x$.

 a. Déterminer la fonction dérivée de la fonction F.

 b. En déduire une primitive de la fonction $x \mapsto \ln(2x-3)$ sur $\left]\frac{3}{2}, +\infty\right[$.

2. Soit la fonction G définie sur $]-\infty, 2[$ par $G(x)=(-4x+8)\ln(-4x+8)+4x$.

 a. Déterminer la fonction dérivée de la fonction G sur $]-\infty, 2[$.

 b. En déduire une primitive de la fonction $x \mapsto \ln(-2x+3)$ sur $]-\infty, 2[$.

Théorème

Soit a et b deux réels tels que $a \neq 0$. On considère la fonction $f : x \mapsto \ln(ax+b)$.

La fonction $F : x \mapsto \frac{1}{a} \times (ax+b)\ln(ax+b) - x$ est une primitive de la fonction f sur tout intervalle I inclus dans l'ensemble de définition de f.

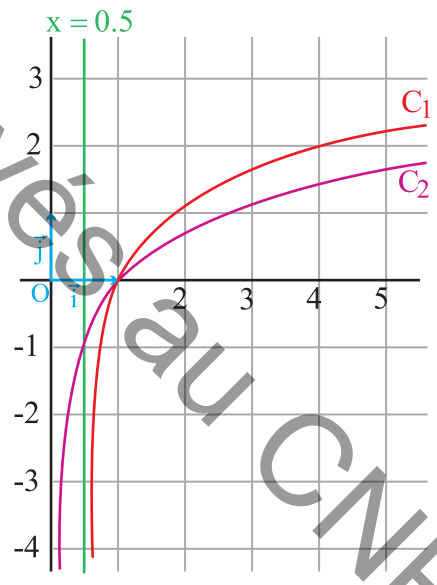
Activité 3

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\ln(2x-1)=\ln(x)$.

2. Dans le graphique ci-contre on a représenté, dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, les courbes des fonctions $f : x \mapsto \ln(x)$ et $g : x \mapsto \ln(2x-1)$.

 a. Associer à chaque fonction sa courbe représentative.

 b. Calculer l'aire de la partie du plan limitée par C_1, C_2 et les droites d'équations $x=1$ et $x=2$.



Fonction logarithme népérien

On appelle fonction logarithme népérien et on note ln la primitive sur $]0,+\infty[$ qui s'annule en 1 de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$.

Propriétés

- Pour tous réels strictement positifs a et b,

  $\ln(ab)=\ln(a)+\ln(b)$, $\ln\left(\dfrac{1}{a}\right)=-\ln(a)$, $\ln\left(\dfrac{a}{b}\right)=\ln(a)-\ln(b)$, $\ln\left(\sqrt{a}\right)=\dfrac{1}{2}\ln a$.

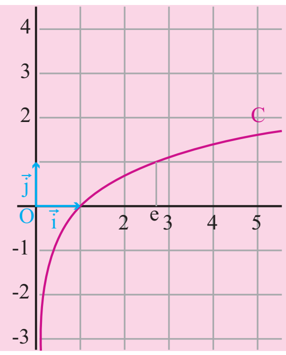
- Pour tout réel $a>0$ et pour tout entier relatif n, $\ln\left(a^n\right)=n\times\ln(a)$.

Courbe représentative de la fonction logarithme népérien

- La fonction ln est définie continue et dérivable sur $]0,+\infty[$.
- $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \ln(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x)=+\infty$.
- La courbe représentative de la fonction ln dans un repère orthogonal admet :

-une branche parabolique de direction celle de l'axe des abscisses.

- une asymptote verticale d'équation $x=0$.



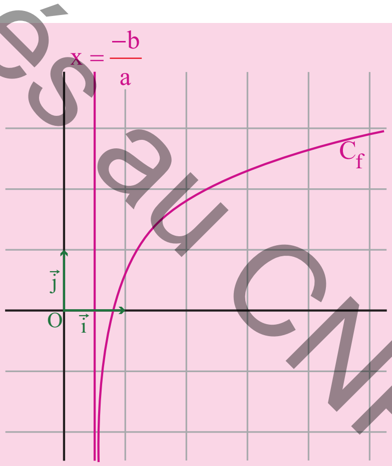
Fonction du type $x\mapsto \ln(ax+b)$, $a>0$

Soit a et b deux réels tels que $a>0$.

Soit f la fonction $x\mapsto \ln(ax+b)$.

On désigne par C_f la courbe de f dans un repère orthogonal.

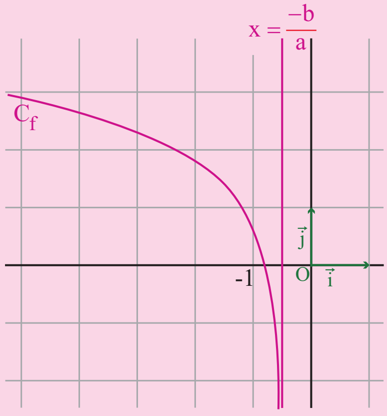
- f est définie, continue et dérivable sur $\left]\dfrac{-b}{a},+\infty\right[$.
- $\lim\limits_{x\to\left(\frac{-b}{a}\right)^+} f(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.
- Pour tout réel $x>\dfrac{-b}{a}$, $f'(x)=\dfrac{a}{ax+b}$.
- La droite d'équation $x=\dfrac{-b}{a}$ est une asymptote verticale à C_f.
- C_f admet une branche parabolique de direction celle de l'axe des abscisses au voisinage de $+\infty$.



Fonction du type $x \mapsto \ln(ax+b)$, $a<0$

Soit a et b deux réels tels que $a<0$. Soit f la fonction $x \mapsto \ln(ax+b)$.

On désigne par C_f la courbe de f dans un repère orthogonal.



- f est définie, continue et dérivable sur $\left]-\infty, \frac{-b}{a}\right[$.
- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to\left(\frac{-b}{a}\right)^-} f(x)=-\infty$.
- Pour tout réel $x<\frac{-b}{a}$, $f'(x)=\frac{a}{ax+b}$.
- La droite d'équation $x=\frac{-b}{a}$ est une asymptote verticale à C_f.
- C_f admet une branche parabolique de direction celle de l'axe des abscisses au voisinage de $-\infty$.

Primitives de la fonction du type $f : x \mapsto \frac{a}{ax+b}$, $a \neq 0$

Soit a et b deux réels tels que $a \neq 0$ et I un intervalle inclus dans $\left]-\infty, \frac{-b}{a}\right[$ ou $\left]\frac{-b}{a}, +\infty\right[$.

La fonction $f : x \mapsto \frac{a}{ax+b}$ admet la fonction $F : x \mapsto \ln(|ax+b|)+k, k\in\mathbb{R}$ comme primitive de f sur I.

Primitives de la fonction ln

La fonction $x \mapsto x\ln(x)-x$ est une primitive de la fonction $x \mapsto \ln(x)$ sur $]0,+\infty[$.

Primitives de la fonction du type $x \mapsto \ln(ax+b)$, $a \neq 0$

Soit a et b deux réels tels que $a \neq 0$. On considère la fonction $f : x \mapsto \ln(ax+b)$.

La fonction $F : x \mapsto \frac{1}{a}\times(ax+b)\ln(ax+b)-x$ est une primitive de la fonction f sur tout intervalle I inclus dans l'ensemble de définition de f.

Activité

1. Tracer à l'aide du « Sine qua non » les courbes C_f et C_g représentatives des fonctions

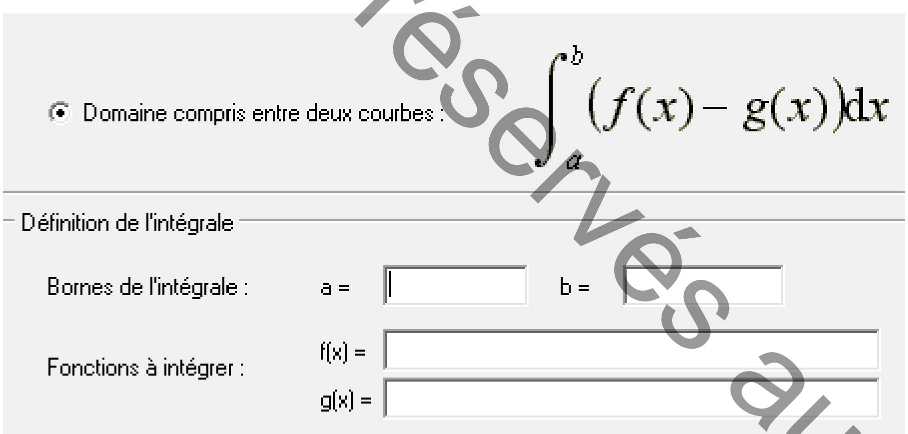
   $f : x \mapsto \ln(3x+2)$ et $g : x \mapsto x^3 - 1$. (Voir avec l'ordinateur chapitre 3).

2. On désigne par A et B les points d'intersection de C_f et C_g.

   Mettre le curseur sur chacun des points A et B et lire en haut et à droite les coordonnées de ses points. On note α l'abscisse de A et β l'abscisse de B.

3. a. Déterminer la position relative de C_f et C_g.

   b. Utiliser la fenêtre ci-dessous pour déterminer une valeur approchée de l'aire de la partie du plan comprise entre C_f et C_g.

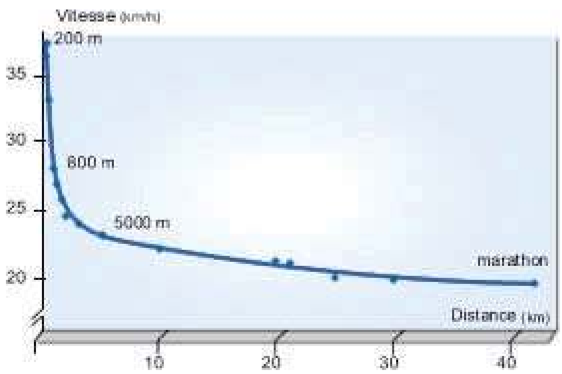


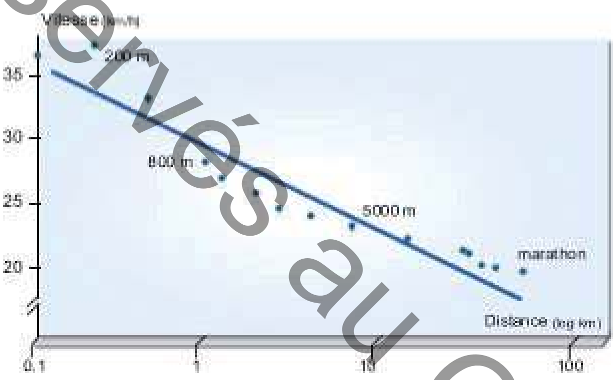
Connaître son indice d'endurance

L'endurance est la capacité à maintenir le plus longtemps possible un certain niveau de puissance.

Soit deux coureurs A et B ayant la même VMA (la vitesse de course à laquelle le coureur atteint sa consommation maximale d'O2) et qui tiennent une allure égale à 22km/h pendant un 1500m. Lors d'un test comprenant un 3000m puis un 5000m et enfin un 10000m, si le coureur A réalise respectivement 9', 16', 33' soit 100%, 93% et 90% de sa VMA, et le coureur B réalise 9'30", 17' et 37' soit 95%, 87% et 82% ; on dit que le coureur B a une moins bonne endurance que A.

Bien quelle soit intéressante, cette approche est difficile à mettre en œuvre dans un processus d'entraînement. En effet, si vous voulez avoir réellement votre indice d'endurance sous la forme d'un chiffre, vous devez faire un petit traitement mathématique qui demande de transformer les temps de course en **logarithme**. Vous avez alors un graphique avec en abscisse le logarithme du temps de course (ou de la distance) et en ordonné la vitesse de course.





Indice d'endurance "idéal" calculé à partir des records du monde réalisés du 100m au marathon

Les données des deux schémas sont identiques mais le schéma de droite utilise l'échelle logarithmique pour les abscisses.

La baisse de la courbe rend compte de la perte de vitesse lorsque la distance augmente. Pour un même athlète, plus la pente de la courbe est importante, moins l'indice d'endurance est bon.

QCM

Cocher la réponse exacte.

1. L'ensemble des solutions de l'inéquation $\ln(2-x) \geq 0$ est :

☐ $]0, 1]$. ☐ $]-\infty, 1]$. ☐ $]0, 2]$.

2. La solution de l'équation $\ln(x) = 3$ est :

☐ $\ln 3$. ☐ $3e$. ☐ e^3.

3. On considère la fonction $f : x \mapsto \ln(x-1)$. L'ensemble de définition de f est :

☐ $]1, +\infty[$. ☐ $\mathbb{R}$. ☐ $\mathbb{R}\backslash\{1\}$.

4. On considère la fonction $f : x \mapsto \ln(|x-1|)$. L'ensemble de définition de f est :

☐ $]1, +\infty[$. ☐ $\mathbb{R}$. ☐ $\mathbb{R}\backslash\{1\}$.

5. Pour tout nombre réel a strictement positif, le nombre $\ln(5a)$ est égal à :

☐ $5\ln(a)$. ☐ $\ln(5)\times\ln(x)$. ☐ $\ln(5)+\ln(a)$.

6. ☐ $3\ln(2) > 2\ln(3)$. ☐ $3\ln(2) < 2\ln(3)$. ☐ $3\ln(2) = 2\ln(3)$.

7. Soit f la fonction définie sur $]3, +\infty[$ par $f(x) = \ln(2x-6)$.

Pour tout $x \in]3, +\infty[$,

☐ $f'(x) = \dfrac{1}{2x-6}$. ☐ $f'(x) = \dfrac{1}{x-3}$. ☐ $f'(x) = \dfrac{2}{\ln(2x-6)}$.

8. La primitive qui s'annule en $\dfrac{3}{2}$ de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{2x-2}$ sur $]1, +\infty[$ est :

☐ $F : x \mapsto \dfrac{1}{2}\ln(2x-2)$. ☐ $F : x \mapsto 2\ln(2x-2)$. ☐ $F : x \mapsto \ln(2x-2)$.

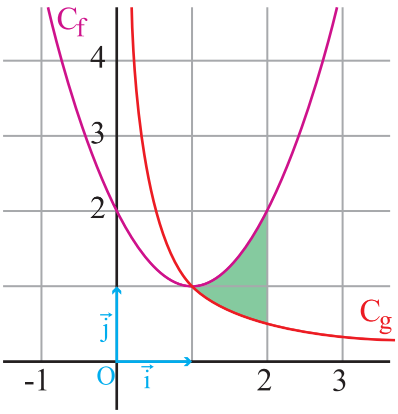
9. La fonction $F : x \mapsto (2x+1)\ln(2x+1) - x$ est la primitive sur $\left]\dfrac{-1}{2}, +\infty\right[$ qui s'annule en 0 de la fonction :

☐ $f : x \mapsto \ln(2x+1)$. ☐ $f : x \mapsto 2\ln(2x+1)$. ☐ $f : x \mapsto \dfrac{1}{2}\ln(2x+1)$.

VRAI - FAUX

Répondre par vrai ou faux en justifiant la réponse.

1. $\ln\left(1+10^{-10}\right)>0$.
2. $\ln(3)+\ln(15)=\ln(9)+\ln(5)$.
3. $\ln 7=\left(\ln\sqrt{7}\right)^2$.
4. $\ln(2)<1<\ln(3)$.
5. $\ln\left(2+\sqrt{3}\right)+\ln\left(2-\sqrt{3}\right)=0$.
6. Pour tout réel $x>0$, $\ln(x)>0$.
7. L'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ de l'inéquation $\ln(x)<\ln(2)$ est l'intervalle $]-\infty, 2[$.
8. La fonction $F: x \mapsto \ln(3x)$ est une primitive sur $]0, +\infty[$ de la fonction $f: x \mapsto \dfrac{1}{3x}$.
9. La fonction $x \mapsto ex+\dfrac{1}{6}$ est la fonction dérivée de la fonction $x \mapsto \dfrac{e}{2}x^2+\ln(6)$.
10. Soit $n \in \mathbb{N}$. Si $\left(1-\dfrac{1}{100}\right)^n \leq 0.2$ alors $n \leq \dfrac{\ln(0.2)}{\ln(0.99)}$.



1 Dans la figure ci-contre on a représenté, dans un repère orthonormé, les courbes représentatives de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^2-2x+2$ et de la fonction g définie sur $]0,+\infty[$ par $g(x)=\frac{1}{x}$.

On désigne par $\mathcal{A}$ l'aire en $(u.a)$ de la partie du plan limitée par les courbes C_f et C_g et les droites d'équations $x=1$ et $x=2$.

1. Montrer que $\mathcal{A}=\frac{4}{3}-\ln(2)$.
2. En déduire une valeur approchée à 10^{-2} près de $\mathcal{A}$.

2 1. Exprimer en fonction de $\ln(2)$ les nombres suivants :

$a=\ln(4)$, $b=\ln\left(\frac{1}{8}\right)$, $c=\frac{1}{2}\ln(32)$, $d=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{4}\right)$.

2. Exprimer, en fonction de $\ln(2)$ ou $\ln(3)$ ou les deux, les nombres suivants :

$\ln(16)$, $\ln(81)$, $\ln(48)$, $\ln(144)$ et $\ln\left(\frac{27}{32}\right)$.

3. Simplifier au maximum chacun des nombres suivants :

a. $\ln\left(e^3\right)-2\ln\left(e^2\right)+\ln\left(\frac{1}{e^4}\right)$.

b. $2\ln(2)+\ln\left(\frac{1}{4}\right)+2\ln(3)-\ln(9)$.

c. $3\left(\ln(3)+\ln(5)\right)-\ln(27)-2\ln(10)-\ln\left(\frac{1}{4}\right)$.

***3** Trouver, dans chaque cas, le plus petit entier naturel n tel que :

1. $2^n>10^{20}$.
2. $(0.5)^n<10^{-10}$.

4 Une ville compte 4000 habitants. Une étude statistique a montré que la population de cette ville augmente de 3% chaque année. On suppose que ce phénomène se poursuivra dans les années à venir.

On note $P_0 = 4000$ et on désigne par P_n le nombre d'habitants de cette ville dans n années.

1. a. Exprimer P_{n+1} en fonction de P_n.

   b. En déduire que pour tout $n \geq 0$, $P_n = 4000 \times (1.03)^n$.

2. Au bout de combien d'années, la population de cette ville aura-telle pour la première fois un effectif supérieur à 6000 habitants ?

5 Le prix d'une voiture neuve est 32 000 DT.

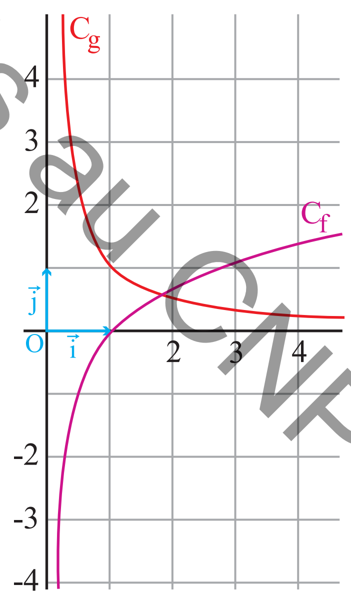
On estime que sur le marché de l'occasion, elle perd 5% de sa valeur par an.

On pose $v_0 = 32000$ et pour tout entier n, on désigne par v_n la valeur atteinte par cette voiture au bout de n années.

1. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = 32000 \times (0.95)^n$.

2. A partir de quelle année la valeur de la voiture sera-t-elle inférieure à 25% de sa valeur initiale ?

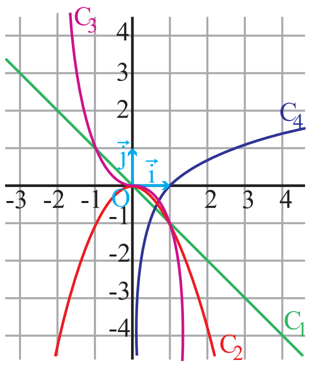
6 Dans la figure ci-contre on a représenté dans un repère orthonormé les courbes représentatives des fonctions f et g définies sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \ln(x)$ et $g(x) = \dfrac{1}{x}$.



1. Utiliser le graphique pour justifier que l'équation $\ln(x) - \dfrac{1}{x} = 0$ admet une solution unique α dans $]0, +\infty[$ et donner un encadrement de α par deux entiers.

2. Montrer que $1.76 < \alpha < 1.77$.

3. Résoudre dans $]0, +\infty[$ l'inéquation $\ln(x) - \dfrac{1}{x} \leq 0$



7 le plan est rapporté à un repère orthonormé.

Dans la figure ci-contre C_1 , C_2 , C_3 et C_4 sont les courbes représentatives des fonctions :

$f_1 : x \mapsto -x$, $f_2 : x \mapsto -x^2$, $f_3 : x \mapsto -x^3$ et $f_4 : x \mapsto \ln(x)$.

On considéré les équations suivantes :

$(E_1) : x + \ln(x) = 0$. $(E_2) : x^2 + \ln(x) = 0$. $(E_3) : x^3 + \ln(x) = 0$.

1. Utiliser le graphique, pour justifier que chacune des équations précédentes admet une solution unique dans $]0 , +\infty[$.

   Pour $i \in \{1, 2, 3\}$ on note α_i la solution de l'équation (E_i).
2. Vérifier que $0.5 < \alpha_1 < 0.6 < \alpha_2 < 0.7 < \alpha_3 < 0.8$
3. Résoudre graphiquement les inéquations suivantes :

   a. $x + \ln(x) < 0$. b. $x^2 + \ln(x) \geq 0$. c. $x^3 + \ln(x) \leq 0$.

8 1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a. $\ln(x) = \ln(5)$. b. $\ln(2x - 3) = \ln(3)$. c. $\ln(3 - 5x) = \ln(1 - x)$.

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

a. $\ln(2x) < \ln\left(\frac{1}{2}\right)$. b. $\ln(x + 1) \geq \ln(2x + 1)$. c. $\ln(3x) < 0$.

9 1. Calculer $\ln(e^2)$, $\ln(e^3)$, $\ln(e^4)$ et $\ln(e^{-4})$.

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a. $\ln(2x) = 2$. b. $\ln^2(x) - 5\ln(x) + 4 = 0$. c. $\ln^2(x) + 2\ln(x) - 8 = 0$.

3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

a. $\ln(3x + 1) > 2$. b. $\ln(-2x + 5) < -3$.

10 Dresser, dans chaque cas, le tableau de variation de f :

a. $f : x \mapsto \ln(4x)$. b. $f : x \mapsto \ln\left(\frac{1}{2}x - 2\right)$. c. $f : x \mapsto \ln(1 - 4x)$.

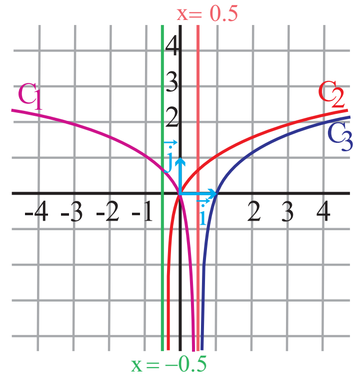
11 Soit la fonction $g : x \mapsto 1 + \ln(x-1)$.

1. Déterminer l'ensemble de définition D_f de f.
2. Vérifier que pour tout réel x de D_f, $1 + \ln(x-1) = \ln(ex - e)$.
3. En déduire le tableau de variation de f.

12 Dans la figure ci-contre on a représenté, dans un repère orthonormé, la courbe de chacune des fonctions :

$f : x \mapsto \ln(2x-1)$, $g : x \mapsto \ln(1-2x)$ et $h : x \mapsto \ln(2x+1)$.

Associer à chaque fonction sa courbe représentative.



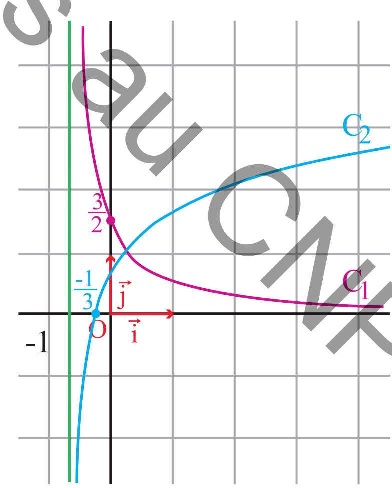
***13** Soit la fonction $f : x \mapsto \ln(-3x+2)$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. a. Déterminer l'ensemble de définition de f.
   b. Déterminer f' puis dresser le tableau de variation de f.
2. a. Déterminer les coordonnées du point A, l'intersection de (C) avec l'axe des abscisses.
   b. Ecrire une équation de la tangente T à (C) au point A.
3. Tracer T et (C).

14 Soit la fonction $f : x \mapsto \ln(ax+b)$ où a et b sont deux réels non nuls.

Dans la figure ci-contre on a représenté, dans un repère orthonormé, les courbes représentatives de la fonction f et de sa fonction dérivée f'.

1. Associer à chaque fonction sa courbe représentative.
2. Utiliser le graphique pour justifier que $\ln\left(\frac{-a}{3} + b\right) = 0$.
3. a. Déterminer graphiquement $f'(0)$.
   b. Déterminer l'intersection de la courbe de f avec l'axe des ordonnées.



b. En déduire que $\frac{a}{b} = \frac{3}{2}$.

4. a. Déterminer les réels a et b puis préciser l'ensemble de définition de la fonction f.

b. Déterminer l'intersection de la courbe de f avec l'axe des ordonnées.

15 Soit la fonction $f : x \mapsto \ln(|2x-3|)$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.

2. a. Montrer que la droite d'équation $x = \frac{3}{2}$ est un axe de symétrie de la courbe (C).

b. Dresser le tableau de variation de f sur $\left]\frac{3}{2}, +\infty\right[$.

3. a. Montrer que (C) coupe l'axe des abscisses en deux points A et B que l'on déterminera.

b. Ecrire les équations des tangentes à (C) aux points A et B.

c. Tracer (C) et les tangentes en A et B.

16 Pour chaque cas déterminer la primitive F sur l'intervalle I de la fonction f qui vérifie $F(x_0) = y_0$.

1. $f : x \mapsto \frac{3}{3x+5}$; $I = \left]-\frac{5}{3}, +\infty\right[$; $F(0) = 2$.

2. $f : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2}\,x - 1}$; $I =]-\infty, 0[$; $F(-1) = 0$.

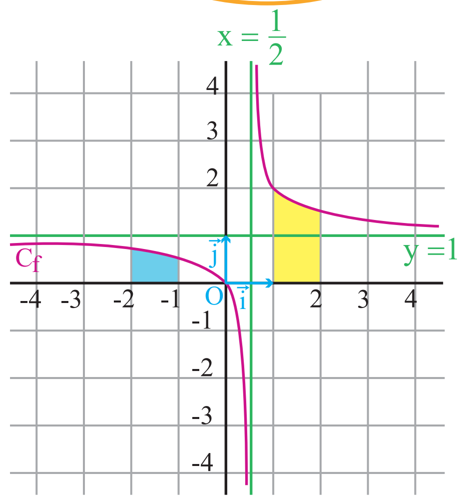
3. $f : x \mapsto 2 + \frac{1}{-2x+3}$; $I = [0, 1]$; $F(1) = 2$.

4. $f : x \mapsto x^2 - \ln(x)$; $I =]0, +\infty[$; $F(1) = 1$.

5. $f : x \mapsto \ln(2x-1)$; $I = \left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$; $F(1) = 0$.

6. $f : x \mapsto \frac{1}{x} - \ln(3-x)$; $I =]0, 3[$; $F(2) = 0$.

***17** Dans la figure ci-contre on a représenté, dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$, la fonction f définie sur $\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{2}\right\}$ par $f(x)=\frac{2x}{2x-1}$.

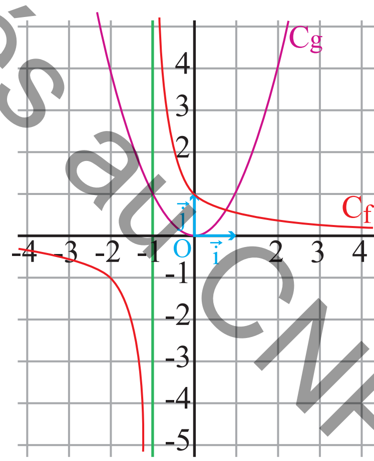


1. Vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{2}\right\}$, $f(x)=1+\frac{1}{2x-1}$.
2. Calculer l'aire de chacune des parties colorées en jaune et en bleu.

18 Soit la fonction $f : x \mapsto \frac{2x-1}{x+1}$ et (C) sa courbe dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1. Etudier f et tracer sa courbe (C).
2. Soit D_1 la partie du plan limitée par (C) et les droites d'équations $x=0$, $x=2$ et $y=2$ et D_2 la partie du plan limitée par (C) et les droites d'équations, $x=-4$, $x=-2$ et $y=2$.
   a. Hachurer D_1 et D_2.
   b. Vérifier que pour tout réel x de $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$, $f(x)=2-\frac{3}{x+1}$.
   c. Calculer alors l'aire de chacune des parties D_1 et D_2.

19 Dans la figure ci-contre on a représenté, dans un repère orthonormé, les fonctions $f : x \mapsto \frac{1}{x+1}$ et $g : x \mapsto x^2$.



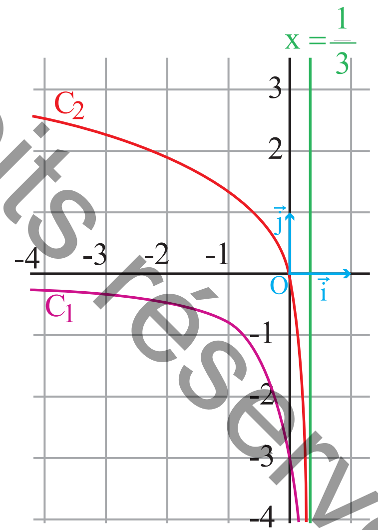
Le réel α désigne l'abscisse du point d'intersection des deux courbes.

1. Vérifier que $0.7 < \alpha < 0.8$
2. Soit $\mathcal{A}$ l'aire (en unité d'aire) de la partie du plan limitée par C_f, C_g et les droites d'équations $x=0$ et $x=1$.
   a. Montrer que $\mathcal{A}=\frac{1}{3}-\frac{2}{3}\alpha^3-\ln(2)-4\ln(\alpha)$. (on pourra utiliser l'égalité $\alpha^2=\frac{1}{\alpha+1}$).
   b. Trouver une valeur approchée de $\mathcal{A}$. (on prendra $\alpha \simeq 0.75$).

20 Soit f la fonction définie sur $\left]-\infty, \frac{1}{3}\right[$ par $f(x)=\ln(1-3x)$.

Dans le graphique ci-dessous on a représenté, dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, la courbe représentative de la fonction f ainsi que la courbe de sa fonction dérivée f'.

1. Associer à chaque fonction sa courbe représentative.
2. Calculer l'aire de la partie du plan limitée par C_1, C_2 et les droites d'équations $x=-2$ et $x=0$.



Correction de l'exercice 3 :

1. On sait que pour tous réels strictement positifs a et b, $\ln(a) > \ln(b)$ équivaut à $a > b$.

Ainsi $2^n > 10^{20}$ équivaut à $\ln(2^n) > \ln(10^{20})$

équivaut à $n\ln(2) > 20\ln(10)$

équivaut à $n > \dfrac{20\ln(10)}{\ln(2)}$ $\quad (\ln(2) > 0)$

or $\dfrac{20\ln(10)}{\ln(2)} \simeq 66.43$ et n est un entier naturel.

Par suite le plus petit entier n_0 vérifiant $2^n > 10^{20}$ est 67 et pour tout $n \geq 67$, $2^n > 10^{20}$.

2. $(0.5)^n < 10^{-10}$ équivaut à $\ln(0.5^n) < \ln(10^{-10})$

équivaut à $n\ln(0.5) < -10\ln(10)$

équivaut à $n > \dfrac{-10\ln(10)}{\ln(0.5)}$ $\quad (\ln(0.5) < 0)$

or $\dfrac{-10\ln(10)}{\ln(0.5)} \simeq 33.19$ et n est un entier naturel.

Par suite 34 est le plus petit entier qui vérifie $(0.5)^n < 10^{-10}$ et pour $n \geq 34$, $(0.5)^n < 10^{-10}$.

Correction de l'exercice 13 :

1. a. $f(x) = \ln(-3x+2)$, $D_f = \left]-\infty, \dfrac{2}{3}\right[$.

b. f est dérivable sur $\left]-\infty, \dfrac{2}{3}\right[$. Pour tout réel $x < \dfrac{2}{3}$, $f'(x) = \dfrac{-3}{-3x+2}$

Tableau de variation de f :

x	$-\infty$	$\frac{2}{3}$
$f'(x)$	$-$	||
f	$+\infty \searrow -\infty$	||

2. a. $f(x)=0$ équivaut à $\begin{cases} x \in D_f \\ \ln(-3x+2)=0 \end{cases}$

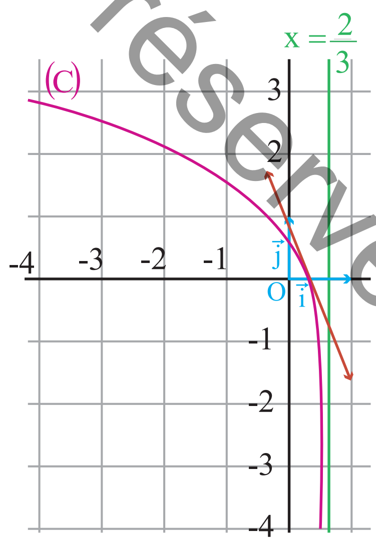
équivaut à $\begin{cases} x < \dfrac{2}{3} \\ -3x+2=1 \text{ car } (\ln 1 = 0) \end{cases}$

équivaut à $x=\dfrac{1}{3}$.

Conclusion : $C_f \cap (xx') = \left\{ A\left(\dfrac{1}{3}, 0\right) \right\}$.

b. $T : y = f'\left(\dfrac{1}{3}\right)\left(x-\dfrac{1}{3}\right)+f\left(\dfrac{1}{3}\right)$. Or $f'\left(\dfrac{1}{3}\right)=-3$ et $f\left(\dfrac{1}{3}\right)=0$. Par suite $T : y=-3x+1$.

3. La courbe (C) admet une branche parabolique au voisinage de $(-\infty)$ de direction $(O, \vec{j})$ et une asymptote d'équation $x=\dfrac{2}{3}$.



Correction de l'exercice 17 :

1. Pour tout réel x de $\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{2}\right\}$, $1+\frac{1}{2x-1}=\frac{2x-1+1}{2x-1}=\frac{2x}{2x-1}=f(x)$.

2. • La fonction f est positive sur $[-2\,,-1]$.

Par conséquent l'aire de la partie colorée en bleu vaut

$A_1=\int_{-2}^{-1}\left(1+\frac{1}{2x-1}\right)dx=\int_{-2}^{-1}\left(1+\frac{1}{2x-1}\right)dx$. Or $\frac{1}{2x-1}=\frac{1}{2}\times\frac{2}{2x-1}$

Ainsi la fonction $x\mapsto\frac{1}{2}\ln|2x-1|$ est une primitive de la fonction $x\mapsto\frac{1}{2x-1}$ sur $[-2\,,-1]$.

Par suite $A_1=\left[x+\frac{1}{2}\ln|2x-1|\right]_{-2}^{-1}=\left(-1+\frac{1}{2}\ln|-3|\right)-\left(-2+\frac{1}{2}\ln|-5|\right)$

$$=1+\frac{1}{2}\ln(3)-\frac{1}{2}\ln(5)=1+\frac{1}{2}\ln\left(\frac{3}{5}\right)\ \text{(u.a)}.$$

• L'aire de la partie colorée en rouge vaut

$$A_2=\int_{1}^{2}\left(1+\frac{1}{2x-1}\right)dx=\left[x+\frac{1}{2}\ln|2x-1|\right]_{1}^{2}=\left(2+\frac{1}{2}\ln(3)\right)-\left(1+\frac{1}{2}\ln(1)\right)=1+\frac{1}{2}\ln(3)\ \text{(u.a)}.$$

Chapitre 5

Fonction exponentielle de base e

Aperçu historique

La première apparition de la lettre « e » pour désigner la base du logarithme népérien date de 1728, dans un manuscrit d'**Euler** qui le définit comme le nombre dont le logarithme est l'unité. Et sa première apparition officielle dans une œuvre publiée date de 1736.

En 1737, il le développe de la manière suivante

$$e = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{\dots}}}}}}}}}$$

Activité 1 :

Simplifier au maximum chacun des nombres suivants :

$A = \ln 24 - \frac{1}{2}\ln 36 - \ln 2$.

$B = \ln(0.001) + \ln(100) + \ln 10$.

Activité 2 :

On considère la fonction f définie sur $[1,+\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x$.

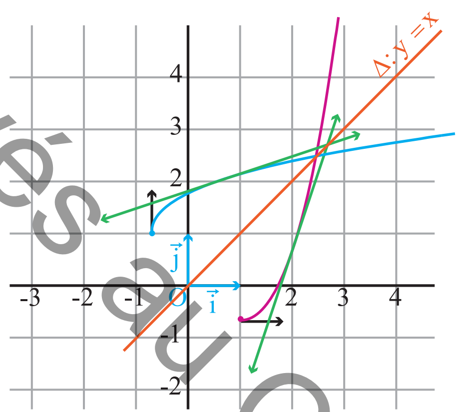
On note C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Montrer que f réalise une bijection de $[1,+\infty[$ sur $\left[-\frac{2}{3},+\infty\right[$.

   On note f^{-1} sa fonction réciproque.

2. Vérifier que la droite T d'équation $y = 3x - \frac{16}{3}$ est la tangente à C_f en son point d'abscisse 2.

3. Dans la figure ci- contre, on a représenté dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, les fonctions f et f^{-1} ainsi que la droite T et la droite T′ d'équation $y = \frac{1}{3}x + \frac{16}{9}$.



   a. Associer à chaque fonction sa courbe représentative.

   b. Vérifier que les droites T et T′ sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.

c. Que représente la droite T′ pour la courbe représentative de f^{-1} ?

d. La fonction f^{-1} est-elle dérivable en $\frac{-2}{3}$?

I. Définition

Activité 1

1. Compléter le tableau suivant :

x	e^{-2}	$\sqrt{e}$	1	e	e^2	e^3	5
$\ln(x)$							

2. a. Justifier que la fonction $\ln$ est une bijection de $]0\,,+\infty[$ sur $\mathbb{R}$.

   b. Déterminer l'unique solution dans $]0\,,+\infty[$ de chacune des équations suivantes :

   $\ln(x)=1,\ \ \ln(x)=-1,\ \ \ln(x)=2$

   c. Soit $k\in\mathbb{R}$.

   On note $\exp(k)$ l'unique solution dans $]0\,,+\infty[$ de l'équation $\ln(x)=k$.

   Compléter le tableau suivant :

k	-2	-1	0	$\frac{1}{2}$	1	2	3	$\ln(5)$
$\exp(k)$								

3. En utilisant la définition du nombre e et les propriétés de la fonction $\ln$, justifier que pour tout entier naturel n, $\exp(n)=e^n$ et $\exp(-n)=e^{-n}$.

On convient d'étendre cette écriture à tout réel x et on écrit $\exp(x)=e^x$.

Définition

On appelle fonction exponentielle, et on note $\exp$, la fonction réciproque de la fonction logarithme népérien .

On écrit , $\exp:\mathbb{R}\mapsto\,]0\,,+\infty[$

$$x\mapsto \exp(x)=e^x.$$

Conséquences

1. La fonction $\exp$ est continue sur $\mathbb{R}$.
2. Pour tout réel x, $e^x>0$.
3. Pour tout réel x et pour tout réel $y>0$, $\left(y=e^x\right)$ si et seulement si $\left(x=\ln(y)\right)$.
4. Pour tout réel x, $\ln\left(e^x\right)=x$.
5. Pour tout réel $x>0$, $e^{\ln(x)}=x$.

Activité 2

1. Utiliser une calculatrice pour trouver une valeur approchée à 10^{-3} près de :

$e^{0.3}$, $e^{\frac{-1}{3}}$, $e^{-\sqrt{2}}$ et $e^{1.3}$.

2. Simplifier $e^{\ln(2)}$, $e^{-\ln(5)}$, $\ln\left(e^{-3}\right)$, $\ln\left(e^{2\ln(5)}\right)$, $e^{-2\ln(2)}$, $e^{\ln(2)+\ln(3)}$ et $e^{\ln(2)-\ln(3)}$.

II. Propriétés

Activité 1

Soit a et b deux réels.

1. a. Justifier que $\ln\left(e^a \times e^b\right) = a + b$.

   b. En déduire que $e^{a+b} = e^a \times e^b$, $e^{-a} = \dfrac{1}{e^a}$ et $e^{a-b} = \dfrac{e^a}{e^b}$

2. a. Montrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n, $e^{na} = \left(e^a\right)^n$.

   b. En déduire que pour tout entier naturel n, $e^{-na} = \left(e^a\right)^{-n}$.

Théorème

Soit a et b deux réels.

$e^{a+b} = e^a \times e^b$

$e^{-a} = \dfrac{1}{e^a}$

$e^{a-b} = \dfrac{e^a}{e^b}$

$e^{na} = \left(e^a\right)^n$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

Activité 2

1. Calculer $e^{1+\ln(2)}$, $e^{2-\ln(3)}$.
2. Simplifier les écritures ci-dessous :

$$\left(e^4 \times e^{-3}\right)^2, \frac{e^{1.3} \times e^{0.7}}{e}, \left(e^{-0.1}\right)^{10}, \left(e^{\left(\frac{-4}{3}\right)}\right)^3, \left(e^{\left(\frac{1}{4}\right)}\right)^{-8}.$$

3. Soit a un réel. Montrer que $\left(e^a + e^{-a}\right)^2 + \left(e^a - e^{-a}\right)^2 = 4$.

III. Etude de la fonction exponentielle à base e

Activité 1

1. a. Dresser le tableau de variation de la fonction ln.

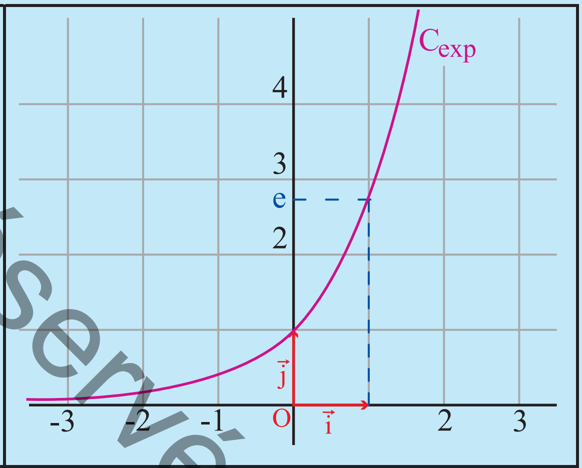
   b. En déduire celui de la fonction exp.

2. Tracer, dans un repère orthonormé $\left(O\ ,\ \vec{i}\ ,\ \vec{j}\right)$, la courbe représentative de la fonction ln et en déduire celle de la fonction exp.

Théorème

- La fonction exp est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
- $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$ • $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$

x	$-\infty$		$+\infty$
exp	0	↗	$+\infty$



- La courbe de la fonction exp admet une branche parabolique de direction celle de l'axe des ordonnées et une asymptote d'équation $y = 0$.

Conséquences

Pour tous réels x et y,

- $e^x > e^y$ si et seulement si $x > y$.
- $e^x = e^y$ si et seulement si $x = y$.

En particulier :

- $e^x = 1$ si et seulement si $x = 0$.
- $0 < e^x < 1$ si et seulement si $x < 0$.
- $e^x > 1$ si et seulement si $x > 0$.

Activité 2

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

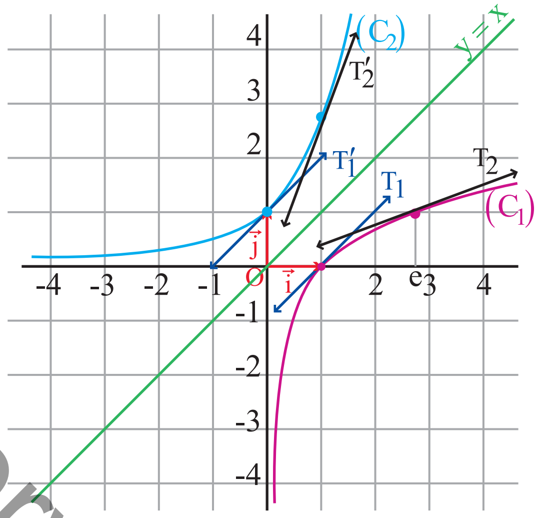
a. $e^{x-1} = e^2$. b. $e^{-2x} = e^x$. c. $e^x = \frac{1}{3}$.

d. $3e^{2x} - 2e^x - 1 = 0$ f. $e^{2x+3} = 1$. g. $e^{-x} = -1$

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

a. $e^{2x-1} > e^{0.5x}$. b. $e^{x+1} \leq e^{2x}$ c. $e^{-x} > 1$.

Activité 3



On admet que la fonction exp est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Dans la figure ci-contre on a représenté les courbes représentatives (C_1) et (C_2) des fonctions ln et exp.

Les droites T_1 et T_2 sont les tangentes à la courbe (C_1) aux points A et B d'abscisses respectives 1 et e.

Les droites T'_1 et T'_2 sont les tangentes à la courbe (C_2) aux points A' et B' d'abscisses respectives 0 et 1.

1. Ecrire une équation de chacune des droites T_1 et T_2.

2. a. Vérifier que A' et B' sont les symétriques des points A et B par rapport à la droite Δ d'équation $y = x$.

   b. Trouver une équation de chacune des droites T'_1 et T'_2.

   c. Justifier que $(\exp)'(0) = e^0$ et $(\exp)'(1) = e^1$.

Théorème admis

La fonction $x \mapsto e^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa fonction dérivée est la fonction $x \mapsto e^x$.

Activité 4

On considère la fonction $f : x \mapsto e^x$.

On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O , \vec{i} , \vec{j})$.

1. a. Ecrire une équation de la tangente T à (C) en son point d'abscisse -1

   b. Vérifier que T passe par le point de coordonnées $(-2,0)$.

2. Tracer (C) et T dans le même repère $(O , \vec{i} , \vec{j})$.

3. Calculer, l'aire de la partie du plan limitée par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

IV. Fonction du type $x \mapsto e^{ax+b}$

Activité 1

On considère la fonction f définie sur $]0 , +\infty[$ par $f(x) = 1 + \ln(x)$.

On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O , \vec{i} , \vec{j})$.

1. a. Justifier que pour tout réel $x > 0$, $f(x) = \ln(ex)$.

   b. Dresser le tableau de variation de f.

   c. Montrer que f réalise une bijection de $]0 , +\infty[$ sur $\mathbb{R}$ et que pour tout réel x, $f^{-1}(x) = e^{x-1}$.

   On note (C') la courbe représentative de f^{-1} dans le repère $(O , \vec{i} , \vec{j})$.

2. Soit Δ la droite d'équation $y = x$.

   a. Montrer que Δ est la tangente à (C) en son point d'abscisse 1.

   b. Tracer (C) et (C') dans la même repère $(O , \vec{i} , \vec{j})$.

   c. Que représente la droite Δ pour la courbe (C') ?

3. Soit A le point de (C') d'abscisse 2 et B son symétrique par rapport à Δ.

   a. Déterminer les coordonnées des points A et B.

   b. Justifier que B appartient à (C), puis écrire une équation de la tangente T à (C) en B.

      Tracer T.

   c. La courbe (C') admet-elle une tangente en A ?

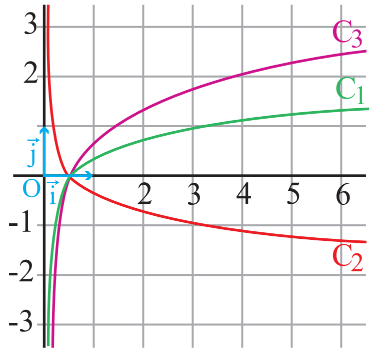
      Si oui tracer cette tangente et déterminer sa pente.

4. La courbe (C) admet - elle une tangente parallèle à l'axe des abscisses ?

Théorème

Soit a et b deux réels.
La fonction $f : x \mapsto e^{ax+b}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

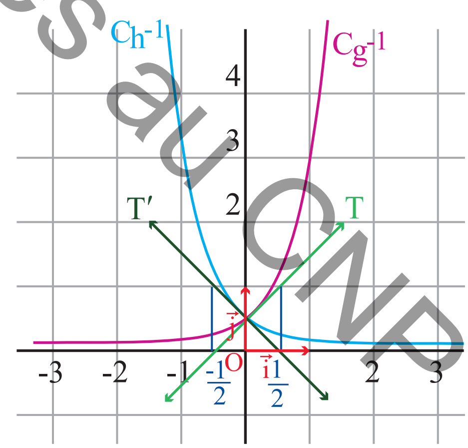
Activité 2



Dans la figure ci-contre on a représenté les courbes représentatives, dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, des fonctions :

$f : x \mapsto \ln(2x)$, $g : x \mapsto \frac{1}{2}\ln(2x)$ et $h : x \mapsto \frac{-1}{2}\ln(2x)$

1. Associer à chaque fonction sa courbe représentative.
2. Dresser la tableau de variation de chacune des fonction f, g et h.
3. a. Montrer que f réalise une bijection de $]0, +\infty[$ sur $\mathbb{R}$ et que pour tout réel x, $f^{-1}(x) = e^{x-\ln(2)}$.
   b. Dresser le tableau de variation de f^{-1}.
4. a. Montrer que g réalise une bijection de $]0, +\infty[$ sur $\mathbb{R}$ et que pour tout réel x , $g^{-1}(x) = e^{2x-\ln 2}$.
   b. Dresser le tableau de variation de g^{-1}.
5. a. Montrer que h réalise une bijection de $]0, +\infty[$ sur $\mathbb{R}$ et que pour tout réel x , $h^{-1}(x) = e^{-2x-\ln 2}$.
   b. Dresser le tableau de variation de h^{-1}.
6. Dans la figure ci-contre on a représenté dans un repère orthonormé les courbes représentatives des fonctions g^{-1} et h^{-1}.



La droite T est la tangente à $C_{g^{-1}}$ au point d'abscisse 0.
La droite T' est la tangente à $C_{h^{-1}}$ au point d'abscisse 0.

a. Déterminer, graphiquement $(g^{-1})'(0)$ et $(h^{-1})'(0)$.

b. Vérifier que $(g^{-1})'(0) = 2g^{-1}(0)$ et que $(h^{-1})'(0) = -2h^{-1}(0)$

Théorème

Soit a et b deux réels.

La fonction dérivée de la fonction $f : x \mapsto e^{ax+b}$ est la fonction $f' : x \mapsto ae^{ax+b}$

Théorème

Soit a et b deux réels.

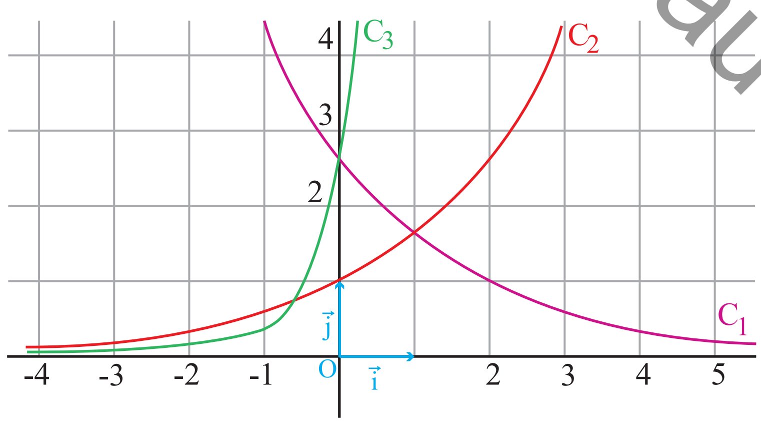
- Si $a > 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{ax+b} = +\infty$; $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{ax+b} = 0$.
- Si $a < 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{ax+b} = 0$; $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{ax+b} = +\infty$.
- La courbe représentative de la fonction $f : x \mapsto e^{ax+b}$ admet une branche parabolique de direction celle de l'axe des ordonnées et une asymptote d'équation $y = 0$.

Activité 3

On considère les fonctions : $f : x \mapsto e^{\frac{-1}{2}x+1}$, $g : x \mapsto e^{\frac{1}{2}x}$ et $h : x \mapsto e^{2x+1}$.

1. Calculer $f(0)$, $g(0)$ et $h(0)$.
2. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$, $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x)$, $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x)$, $\lim\limits_{x \to -\infty} h(x)$.
3. Déterminer la fonction dérivée de chacune des fonctions f, g et h.
4. Le plan est muni d'un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

   On a représenté ci-après les courbes représentatives des fonctions f, g et h.
   Associer à chaque fonction sa courbe représentative.



Activité 4

On suppose que la population P d'un certain pays croît de façon exponentielle, c'est-à-dire $P(t) = ke^{at}$, où t désigne l'année, k et a sont des réels $(k > 0)$.

On sait qu'en 2010, la population était 10 millions d'habitants et qu'en 2014 elle était de 11 millions.

1. a. Justifier que $e^{2010a} = \frac{10}{k}$ et que $e^{2014a} = \frac{11}{k}$.

   b. Simplifier $\frac{e^{2014a}}{e^{2010a}}$

   c. En déduire que $a = \frac{1}{4}\ln\left(\frac{11}{10}\right)$. Donner une valeur approchée de a à 10^{-2}.

2. Vérifier que $\frac{P(2020)}{P(2010)} = e^{10a}$. Estimer alors la population de ce pays en 2020 .

Activité 5

Soit la fonction $f : x \mapsto e^{\frac{1}{2}x+1}$ et on désigne par $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Dresser le tableau de variation de f.
2. Ecrire une équation de la tangente T à $\mathscr{C}$ en son point d'abscisse -2.
3. a. Tracer T et $\mathscr{C}$.

   b. Résoudre graphiquement l'inéquation $e^{\frac{1}{2}x+1} > \frac{1}{2}x + 2$.

Activité 6

On considère la fonctions $f : x \mapsto e^{\frac{2}{5}x-1}$. On désigne par C_f sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Dresser le tableau de variation de f et tracer C_f .
2. Soit la fonction $g : x \mapsto \frac{5}{2}e^{\frac{2}{5}x-1}$.

   a. Calculer $g'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

   b. Calculer l'aire de la partie du plan limitée par C_f , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 5$.

Théorème

Soit a et b deux réels avec a non nul.

La fonction $x \mapsto \frac{1}{a}e^{ax+b}$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto e^{ax+b}$.

Activité 7

Donner une primitive sur $\mathbb{R}$ de chacune des fonction suivantes :

$f : x \mapsto e^{2x}$, $g : x \mapsto e^{1-3x}$, $h : x \mapsto x - e^{\frac{1}{2}x-2}$

Activité 8

On considère les fonctions $f : x \mapsto e^{0.8x}$ et $g : x \mapsto e^{-0.2x+1}$.

On désigne par C_f et C_g leurs courbes représentatives dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. a. Dresser le tableau de variation de f.

   b. Dresser le tableau de variation de g.

2. a. Montrer que C_f et C_g se coupent en un seul point A que l'on déterminera.

   b. Tracer C_f et C_g.

3. Calculer l'aire de la partie du plan limitée par C_f, C_g et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 2$.

Activité 9

A/ Dans la figure ci-contre on a représenté dans un repère orthogonal la fonction $f : x \mapsto e^{-0.4x+\ln(500)}$.

1. Résoudre dans $[0, +\infty[$ l'équation $f(x) = 250$.
2. Résoudre dans $[0, +\infty[$ l'inéquation $f(x) < 1$.
3. Justifier que pour tout $x \geq 0$, $0 < f(x) \leq 500$.

B/ D'après les spécifications du fabricant, la fréquence de rotation de la roue d'énergie d'un appareil, t minutes après la mise sous tension est décrite par $w(t) = 500\left(1 - e^{-0.4t}\right)$.

$w(t)$ est exprimée en tours par minutes.

1. Calculer la fréquence de la rotation de la roue après 5 minutes puis après 100 minutes.

   (On donnera des valeurs approchées à 10^{-1} près)

2. a. Vérifier que pour tout $t \geq 0$, $w(t) = 500 - f(t)$.

   b. Utiliser A/ 3. Pour justifier que $w(t) < 500$, pour tout $t \geq 0$.

   c. Montrer que la fonction w est strictement croissante sur $[0, +\infty[$.

   d. A quel instant la fréquence de rotation de la roue atteindrait-elle 250 t/min ?

   e. A partir de quel instant la fréquence de la rotation de la roue dépassera-elle 499 t/min ?

Fonction exponentielle

On appelle fonction exponentielle, et on note $\exp$, la fonction réciproque de la fonction logarithme népérien .

On écrit , $\exp : \mathbb{R} \mapsto]0\ ,+\infty[$

$$x \mapsto \exp(x) = e^x.$$

1. La fonction $\exp$ est continue sur $\mathbb{R}$.
2. Pour tout réel x , $e^x > 0$.
3. Pour tout réel x et pour tout réel $y > 0$, $\left(y = e^x\right)$ si et seulement si $\left(x = \ln(y)\right)$.
4. Pour tout réel x , $\ln\left(e^x\right) = x$.
5. Pour tout réel $x > 0$, $e^{\ln(x)} = x$.

Propriétés

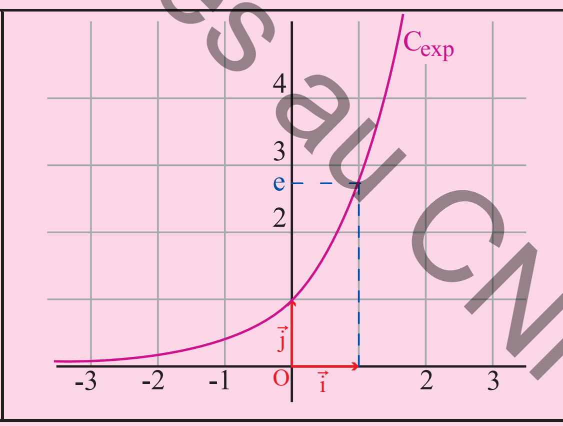
Soit a et b deux réels.

$e^{a+b} = e^a \times e^b$, $\quad e^{-a} = \dfrac{1}{e^a}$, $\quad e^{a-b} = \dfrac{e^a}{e^b}$, $\quad e^{na} = \left(e^a\right)^n$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

Courbe représentative de la fonction exp

- La fonction exp est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
- $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$ $\qquad$ • $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$

x	$-\infty$		$+\infty$
exp	0	$\nearrow$	$+\infty$



- La courbe de la fonction exp admet une branche parabolique de direction celle de l’axe des ordonnées et une asymptote d'équation $y = 0$.

Dérivabilité de la fonction exponentielle

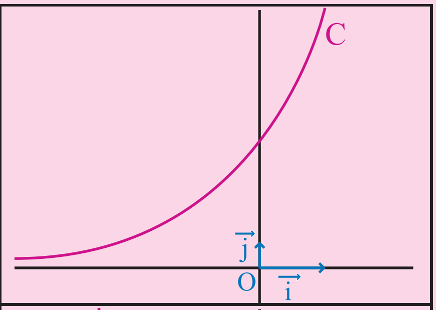
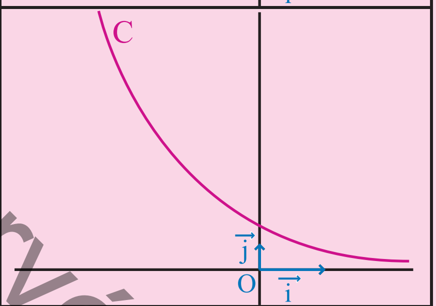
La fonction $x \mapsto e^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa fonction dérivée est la fonction $x \mapsto e^x$.

Fonction du type $x \mapsto e^{ax+b}$

Soit a et b deux réels et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{ax+b}$.

On désigne par C la courbe de f dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

- La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $f'(x) = a\,e^{ax+b}$.

• Si $a > 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$.	
• Si $a < 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$; $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.	

- La courbe C de f admet une branche parabolique de direction celle de l'axe des ordonnées et une asymptote d'équation $y = 0$.

Primitives d'une fonction du type $x \mapsto e^{ax+b}$

Soit a et b deux réels avec a non nul.

La fonction $x \mapsto \frac{1}{a}e^{ax+b}$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto e^{ax+b}$.

Avec l'ordinateur

Activité

1. Tracer à l'aide du « Sine qua non » les courbes C_f et C_g représentatives des fonctions

$f : x \mapsto \ln(2x+3)$ et $g : x \mapsto e^{(2x-1)}$. (Voir avec l'ordinateur chapitre 3).

2. On désigne par A le point d'intersection de C_f et C_g d'abscisse positive.

Mettre le curseur sur le point A et lire en haut et à droite les coordonnées de ce point.

On note α l'abscisse de A.

3. a. Déterminer la position relative de C_f et C_g sur l'intervalle $[0, 1]$.

b. Soit $\mathcal{A}_1$ l'aire de la partie du plan limitée par C_f , C_g et les droites d'équations

$x = 0$ et $x = \alpha$.

Déterminer une valeur approchée de $\mathcal{A}_1$. (Voir avec l'ordinateur chapitre 4).

c. Soit $\mathcal{A}_2$ l'aire de la partie du plan limitée par C_f , C_g et les droites d'équations

$x = \alpha$ et $x = 1$.

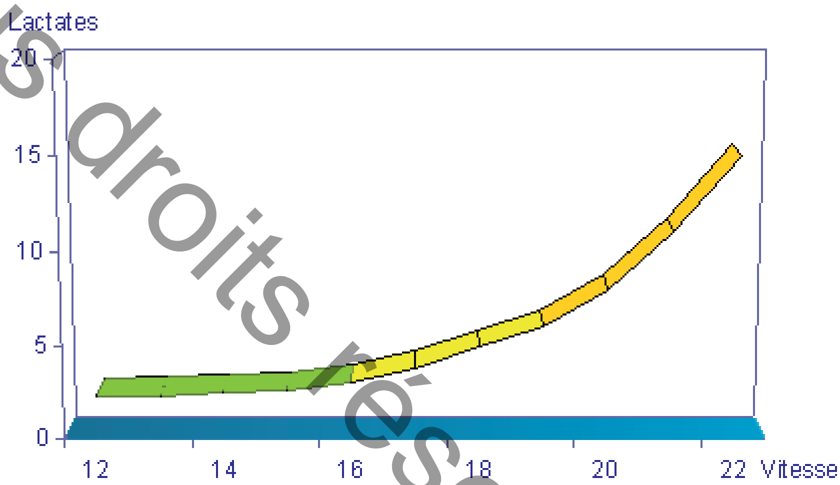
Déterminer une valeur approchée de $\mathcal{A}_2$.

d. En déduire une valeur approchée de $\mathcal{A}$ l'aire de la partie du plan limitée par C_f , C_g et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

Entrainement et acide lactique

L'acide lactique ou lactate est un élément organique. Il se forme dans le muscle durant un effort intense pour produire de l’énergie. Il est responsable et témoin de la fatigue, il est de plus en plus un indicateur utilisé pour évaluer l'impact d'un entraînement.

Pendant un exercice progressif (au cours duquel l'intensité de l'effort est graduellement augmentée), la concentration de lactate dans le sang (lactatémie) augmente de manière marquée.



Représentation de l'évolution de la lactatémie sanguine d'un spécialiste de demi-fond en fonction de la vitesse de course

Au début de l'exercice progressif, lorsque l'intensité est faible, la concentration sanguine de lactate s'accroît très légèrement tout en restant proche des valeurs de repos (environ 2 mmol/l). Avec l'augmentation d'intensité, la lactatémie augmente tout d'abord modérément puis de manière **exponentielle**.

QCM

Cocher la réponse exacte.

1. Le réel $e^{-4\ln\left(\frac{1}{2}\right)}$ est égal à :

☐ 16. ☐ $\frac{1}{16}$. ☐ -8.

2. La solution de l'équation $e^{x} = \frac{1}{e^{2}}$ est

☐ $x = -2$. ☐ $x = 2$. ☐ $x = e^{-2}$.

3. Pour tout réel x,

☐ $e^{x+2} = 2e^{x}$. ☐ $e^{x+2} = e^{2} \times e^{x}$. ☐ $e^{x+2} = \left(e^{x}\right)^{2}$.

4. $\frac{1}{e^{-2x}}$ est égale à :

☐ e^{-2x}. ☐ e^{2x}. ☐ $-e^{2x}$.

5. La fonction dérivée de la fonction $f : x \mapsto e^{-x}$ est la fonction :

☐ $f' : x \mapsto e^{-x}$. ☐ $f' : x \mapsto -e^{-x}$. ☐ $f' : x \mapsto -xe^{-x}$.

6. La fonction dérivée de la fonction $f : x \mapsto e^{2-2x}$ est la fonction

☐ $f' : x \mapsto 2e^{2-2x}$. ☐ $f' : x \mapsto -2e^{2-2x}$. ☐ $f' : x \mapsto e^{2-2x}$.

7. L'équation $e^{x} = 5$

☐ admet plusieurs solutions. ☐ admet une solution unique. ☐ n'admet pas de solutions

8. L'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation $e^{x} = 2$ est :

☐ $S = \{e^{2}\}$. ☐ $S = \{2\}$. ☐ $S = \{\ln(2)\}$.

9. Une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $f : x \mapsto e^{4x-1}$ est la fonction :

☐ $F : x \mapsto \frac{1}{4}e^{4x-1}$. ☐ $F : x \mapsto 4e^{4x-1}$. ☐ $F : x \mapsto \frac{1}{4x}e^{4x-1}$.

VRAI - FAUX

Répondre par vrai ou faux en justifiant la réponse.

1. Pour tous réels a et b, $e^{a+b} = e^{a} + e^{b}$.

2. Si $a = e^{2} \times e^{5}$ alors $\ln(a) = 10$.

3. Si $a = \ln(3) + \ln(4)$ alors $e^{a} = 12$.

4. Le point $A\left(e^{2}, \ln(2)\right)$ appartient à la courbe de la fonction $f : x \mapsto \ln(x)$.

5. Pour tout réel x, $e^{-x} \cdot e^{x} = 1$.

6. Une équation de la tangente à la courbe de la fonction exp au point d'abscisse 2 est $y = e^{2}(x-1)$.

7. La fonction dérivée de la fonction $x \mapsto e^{2-x}$ est $x \mapsto 2e^{2-x}$.

8. L'équation $e^{x} = 0$ n'admet pas de solution dans $\mathbb{R}$.

9. La fonction $x \mapsto e^{x\ln(0.5)}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

***1** Simplifier :

$A = e^{\ln(8)-3\ln(2)}$, $B = e^{-2\ln\left(\frac{1}{4}\right)}$, $C = \ln\left(\frac{1}{e^2 \times e^{-3}}\right)$, $D = \ln\left(e^2 + e^{-2}\right) + \ln e^2 - \ln\left(1+e^4\right)$.

2 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $\ln\left(\frac{x}{e}\right) = \frac{1}{2}$. 2. $e^{0.01x+2} = 10$ 3. $e^{2x} - 2e^x = 0$. 4. $3e^{2x} - e^x - 2 = 0$.

3 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1. $1 - e^x \geq 0$.
2. $e^{-10x+1} > 1$.
3. $2 - e^{-0.5x+1} \leq 0$.

4 1. Factoriser le trinôme du seconde degré $4x^2 + 9x + 5$.

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $4e^{2x} + 9e^x + 5 > 0$.

5 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

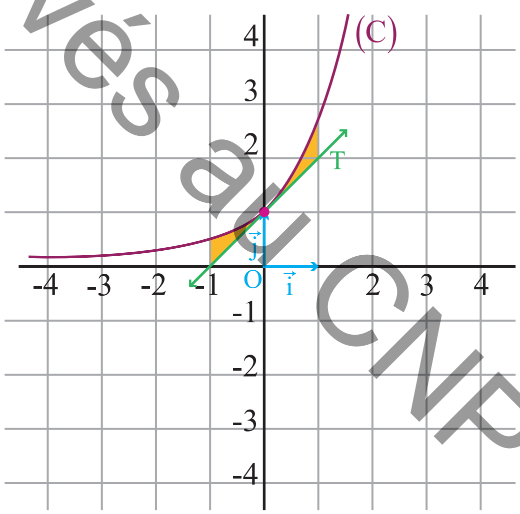
a. $\ln(x+1) + \ln(x-1) \leq \frac{1}{2}$. b. $\ln x - \ln(2x-1) \leq 1$.

6 Donner une primitive sur $\mathbb{R}$ de chacune des fonction suivantes :

$f : x \mapsto 2e^x$, $g : x \mapsto 1 - e^x$, $h : x \mapsto x^2 + e^x$

7 Dans la figure ci-contre on a représenté dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ la courbe représentative (C) de la fonction exp.

La droite T est la tangente à (C) en son point d'abscisse 0.

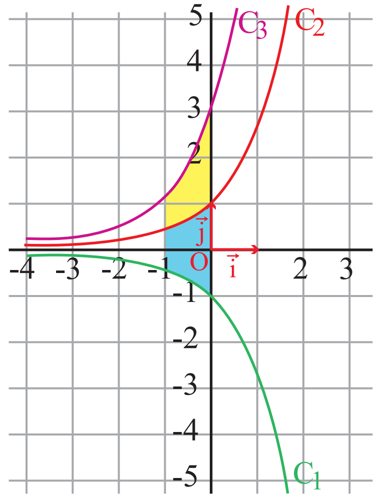


1. Ecrire une équation de la droite T.
2. a. Montrer que l'air $\mathcal{A}$ (en unité d'aire) de la partie colorée en jaune est égale à $e - \frac{1}{e} - 2$.

b. En déduire une valeur approchée de $\mathcal{A}$ à 10^{-2} près.

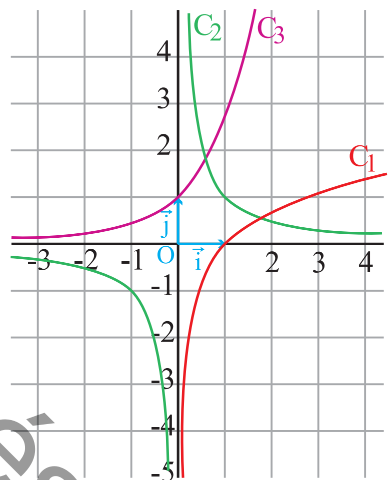
8 Dans la figure ci-contre on a représenté dans un repère orthonormé $\left(O\,,\,\vec{i}\,,\,\vec{j}\right)$ les courbes représentatives des fonctions $f : x \mapsto e^{x}$, $g : x \mapsto -e^{x}$ et $h : x \mapsto e^{x+\ln 3}$.

1. Associer à chaque fonction sa courbe.
2. Montrer que les parties coloriées en jaune et en bleu ont la même aire.



9 Dans la figure ci-contre on représenté les courbes représentatives des fonctions $f : x \mapsto e^{x}$, $g : x \mapsto \ln x$ et $h : x \mapsto \dfrac{1}{x}$.

1. Montrer que l'équation $e^{x} = \dfrac{1}{x}$ admet dans $\mathbb{R}$ une unique solution α et que $0.5 < \alpha < 0.6$.
2. Montrer que l'équation $\ln x = \dfrac{1}{x}$ admet dans $]0,+\infty[$ une unique solution β et que $1.7 < \beta < 1.8$.



10 1. Déterminer les limites suivantes :

a. $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{1-x}$; $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{1-x}$.

b. $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{0.3x-4}$; $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{0.3x-4}$.

c. $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-3x-3}$; $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-3x-3}$.

2. Soit la fonction $f : x \mapsto 0.1e^{0.1x+\ln(5)}$.

a. Justifier que $f(x) = e^{0.1x-\ln(2)}$.

b. Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

11 1. Dresser le tableau de variation de chacune des fonctions suivantes :

a. $f : x \mapsto e^{-\frac{1}{2}x}$.

b. $f : x \mapsto e^{2x-\ln(5)}$.

c. $f : x \mapsto e^{0.1x+4}$.

d. $f : x \mapsto e^{3-\frac{1}{3}x}$.

2. Soit la fonction $g : x \mapsto \frac{1}{2}e^{2x}$.

a. Justifier que pour tout réel x, $g(x) = e^{2x-\ln(2)}$.

b. Dresser le tableau de variation de la fonction g.

***12** Suite à une étude statistique, le pouvoir d'achat $P(t)$ d'un Dinar Tunisien (DT) actuel dans t années sera donné par la formule $P(t) = e^{t\ln(0.9)}$.

1. La fonction P est- elle croissante ou décroissante sur $[0, +\infty[$?

2. Quel sera le pouvoir d'achat de 1000 DT actuels dans 3 ans ?

3. Dans combien d'années le pouvoir d'achat sera-t-il la moitié de ce qu'il est aujourd'hui ?

13 On considère la fonction $f : x \mapsto e^{-x\ln(2)}$ et on désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

1. a. Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

b. Calculer $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

c. Dresser le tableau de variation de f.

2. a. Calculer $f(1)$, $f(2)$ et $f(3)$.

b. Vérifier que pour tout entier naturel $n \geq 1$, $f(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

3. Tracer la courbe (C).

4. Soit a, b et c trois réels deux à deux distincts. On désigne par A, B et C les points de coordonnées respectives $(a, \ln(f(a)))$, $(b, \ln(f(b)))$ et $(c, \ln(f(c)))$.

Montrer que les points A, B et C sont alignés.

14 Une population de bactéries évolue en milieu couvert de sorte que rien ne s'oppose à sa multiplication.

On sait qu'au bout de t heures le nombre de bactéries sera $P(t)=P_0e^{\frac{\ln(3)}{3}t}$, où P_0 est le nombre de bactéries à l'instant $t=0$.

1. a. Calculer $P(3)$ à l'aide de P_0.
   b. Montrer que le nombre de bactéries triple toutes les trois heures.
2. Avec combien de bactéries devrait-on commencer l'expérience si on désire compter 27×10^6 bactéries après 9 heures ?

15 Donner une primitive sur $\mathbb{R}$ de chacune des fonction suivantes :

$f:x\mapsto e^{3x-4}$, $\quad g:x\mapsto 4x-e^{-2x}$, $\quad h:x\mapsto x^2-x+e^{4x-2}$

***16** On considère la fonction $f:x\mapsto e^{-2x}$ et on désigne par (C) sa courbe dans un repère orthogonal .

1. a. Déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
   b. Déterminer f'.
   c. Dresser le tableau de variation de f.
2. a. Ecrire une équation de la tangente T à (C) en son point d'abscisse 0.
   b. Tracer T et (C).
3. Calculer (en u.a) l'aire $\mathcal{A}$ de la partie du plan limitée par la courbe (C) l'axe des abscisses et les droites d'équation $x=0$ et $x=1$.

17 Soit la fonction $f:x\mapsto e^{1-x}$ et (C) sa courbe dans un repère orthogonal $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1. a. Dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.
   b. Ecrire une équation de la tangente T à (C) en son point d'abscisse 1.
   c. Tracer (C) et la tangente T.
2. a. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $e^x=e^{1-x}$.
   b. Tracer dans le même repère $(O,\vec{i},\vec{j})$, la courbe (C') de la fonction exponentielle .
3. Calculer (en u.a) l'aire $\mathcal{A}$ de la partie du plan limitée par les courbes (C) et (C') et les droites d'équation $x=0$ et $x=1$.

18 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=e^{\frac{1}{2}x-1}$ et C_f la courbe de la fonction f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. a. Dresser le tableau de variation de f.
   b. Ecrire une équation de la tangente T à C_f au point d'abscisse 2.
   c. Tracer C_f et T.
2. a. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0,+\infty[$.
   On note f^{-1} sa fonction réciproque.
   b. Expliciter $f^{-1}(x)$, $x \in]0,+\infty[$
   c. Tracer $C_{f^{-1}}$ dans le même repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

19 Si le système de réfrigération d'un camion transportant des laitues tombe brusquement en panne, la température des laitues tend vers la température 22°C de l'air ambiant extérieur. La fonction T définie par $T(t)=22-18e^{-0.41t}$ représente la température en degré Celsius des laitues au bout de t heures.

1. a. Calculer la température des laitues à l'instant de la panne.
   b. Déterminer la température des laitues si la panne dure 1 heure.
   c. Déterminer la température des laitues si la panne dure 3 heures.
2. a. Montrer que la fonction T est strictement croissante sur $[0\,,+\infty[$.
   b. Calculer le temps dont dispose le conducteur du camion pour réparer le système de réfrigération sachant que la température des laitues ne doit pas dépasser 18°C .

20 Si l'on prend par voie orale une dose de 20 mg d'un médicament contre l'asthme et si aucune trace du médicament n'est présentée lors de la prise, la quantité totale $Q(t)$ du médicament présentée dans le sang après t minutes est donnée par

$Q(t)=20\left(1-e^{t\ln(0.9)}\right)$, $0 \le t \le 10$.

1. a. Montrer que la fonction Q est strictement croissante sur $[0\,,10]$.
   b. Dresser le tableau de variation de Q sur $[0\,,10]$.
2. Quel est le temps nécessaire pour que 10 mg du médicament pénètrent dans le sang ?

Correction de l'exercice 1 :

- $A = e^{\ln(8)-3\ln(2)}$. On écrit $8 = 2^3$. Alors $A = e^{3\ln(2)-3\ln(2)} = e^0 = 1$.
- $B = e^{-2\ln\left(\frac{1}{4}\right)}$. On sait que $\ln\left(\frac{1}{4}\right) = -\ln(4)$. Alors $B = e^{2\ln(4)} = e^{\ln(16)} = 16$.
- $C = \ln\left(\frac{1}{e^2 \times e^{-3}}\right) = \ln\left(\frac{1}{e^{-1}}\right) = \ln(e) = 1$.
- $D = \ln\left(e^2 + e^{-2}\right) + \ln\left(e^2\right) - \ln\left(1 + e^4\right)$.

  $e^2 + e^{-2} = e^2 + \frac{1}{e^2} = \frac{e^4+1}{e^2}$.

  Alors $D = \ln\left(e^4+1\right) - \ln\left(e^2\right) + \ln\left(e^2\right) - \ln\left(1+e^4\right) = 0$.

Correction de l'exercice 12 :

1. Pour tout $t \geq 0$, $P'(t) = \ln(0.9)e^{t\ln(0.9)}$. Comme $\ln(0.9) < 0$ et $e^{t\ln(0.9)} > 0$, alors la fonction P est strictement décroissante sur $[0\ ,+\infty[$.
2. Le pouvoir d'achat de 1000 DT actuels dans 3 ans vaut $1000 \times P(3) = 1000e^{3\ln(0.9)} = 729$ DT.
3. Il suffit de résoudre dans $[0\ +\infty[$ l'équation $P(t) = \frac{1}{2}$.

   $P(t) = \frac{1}{2}$ équivaut à $e^{t\ln(0.9)} = \frac{1}{2}$

   équivaut à $\ln\left[e^{t\ln(0.9)}\right] = \ln\left(\frac{1}{2}\right)$

   équivaut à $t\ln(0.9) = -\ln(2)$

   équivaut à $t = \frac{-\ln(2)}{\ln(0.9)}$

   Or $\frac{-\ln(2)}{\ln(0.9)} \simeq 6.578$.

   Donc le pouvoir d'achat sera la moitié de ce qu'il est aujourd'hui au cours de la septème année.

Correction de l'exercice 16 :

1. a. $f(x) = e^{-2x}$. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

b. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = -2e^{-2x}$.

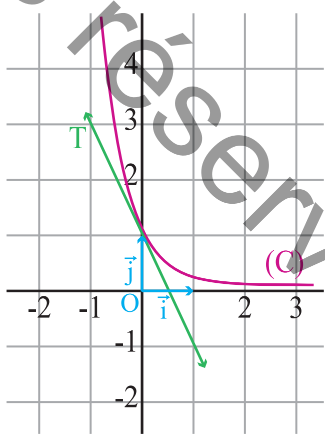
c. Tableau de variation de f :

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	
f	$+\infty$	$\searrow$	0

2. a. $T : y = f'(0)(x-0) + f(0)$. $f'(0) = -2$ et $f(0) = 1$.

Donc $T : y = -2x + 1$.

b. C_f admet une branche parabolique de direction $(O, \vec{j})$ au voisinage de $-\infty$ et une asymptote d'équation $y = 0$.



3. $\mathcal{A} = \int_0^1 e^{-2x} dx = \left[\frac{-1}{2} e^{-2x} \right]_0^1 = \frac{-1}{2} e^{-2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{e^2}\right)$ (u.a).

Chapitre 6

Suites réelles

Aperçu historique

L'approche de l'infini soulève des paradoxes comme ceux exprimés par Zénon d'Elée (490-425 avant J-C).

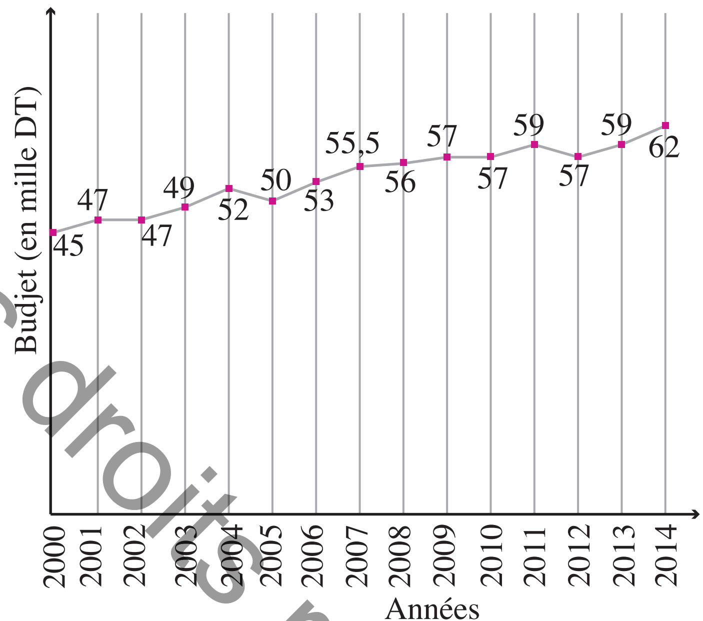
Pour Zénon le mouvement est théoriquement impossible et ce n'est donc qu'une illusion de nos sens:« pour qu'une flèche atteigne sa cible, il faut qu'elle parcoure la moitié de la distance qui la sépare de celle-ci, puis la moitié de la distance restante, puis la moitié de la distance restante etc…($\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+...+\frac{1}{2^n}+...$). Il restera toujours une distance non nulle à parcourir : la flèche n'atteindrait-elle donc jamais la cible ?

A partir du XVIIème siècle, le calcul des infiniment petits, ou le calcul différentiel, permet à Newton (1642-1727), puis à Lagrange (1736-1813) de construire des méthodes d'approximation des solutions d'une équation .

Il faut attendre le XIXème siècle pour que soit clarifiée la notion de limites d'une suite.

Activité 1

Le graphique ci-contre représente l'évolution du budget d'un club sportif (en Mille Dinars).



On désigne par b_n le budget de ce club en $2000+n$, $n \in \mathbb{N}$.

1. Déterminer b_0, b_1, b_8, b_{13}, b_{14}.
2. D'après ce graphique le budget n'a pas évolué entre 2001 et 2002, ainsi $b_1 = b_2 = 47$.
   a. Préciser deux autres termes de la suite (b_n), consécutifs et égaux.
   b. Comparer b_{10} et b_{11} puis b_{10} et b_{12}.
3. On suppose que, chaque année après 2014 le budget augmente de 2 Mille Dinars.
   Calculer les trois termes de la suite (b_n) qui suivent b_{14}.
4. Reprendre la question 3, en supposant que chaque année après 2014,
   le budget augmente de 5%.

Activité 2

On considère les suites $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = 2u_n + 1 - n, \ n \geq 0 \end{cases}$ et $\begin{cases} v_0 = 1 \\ v_{n+1} = 2v_n + 1 - n, \ n \geq 0 \end{cases}$.

1. Calculer u_1, u_2, u_3, v_1, v_2 et v_3.
2. Montrer, par récurrence, que pour tout $n \geq 0$, $u_n = n$.
3. Montrer, par récurrence, que pour tout $n \geq 0$, $v_n = 2^n + n$

I. Suites arithmétiques

Activité 1

Soit (U_n) une suite arithmétique de premier terme U_0 et de raison r.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n = U_0 + n \times r$.
- Pour tous entiers naturels n et p, $U_n = U_p + (n-p) \times r$.

Le prix d'un forage est estimé par une entreprise de la façon suivante :
- Le creusement du premier mètre est facturé à 30 DT.
- A partir du deuxième mètre, le creusement est facturé à 3 DT de plus que celui du mètre précédent.

On note p_n le prix facturé pour le $n^{\text{ème}}$ mètre. Ainsi $p_1 = 30$.

1. Justifier que pour tout entier naturel non nul n, $p_n = 3n + 27$.
2. Quel est le prix de revient d'un forage de 10 mètres ?
3. Un forage a été facturé à 3540 DT. Quelle est sa profondeur ?

Activité 2

On laisse tomber une pierre dans le vide, elle parcourt 4 mètres la première seconde, 12 mètres la deuxième seconde, 20 mètres la troisième seconde.

Soit une augmentation de la distance parcourue de 8 mètres par rapport à la distance précédente chaque seconde .

Soit d_n la distance parcourue la $n^{\text{ème}}$ seconde.

1. Donner les valeurs de d_1, d_2, d_3 et d_4.
2. Exprimer d_n en fonction de n.
3. Soit $S_n = d_1 + d_2 + ... + d_n$, $n \geq 1$.

La somme S de N termes consécutifs d'une suite arithmétique est donnée par la formule :
$$S = \frac{N \times (\text{premier terme de } S + \text{dernier terme de } S)}{2}.$$

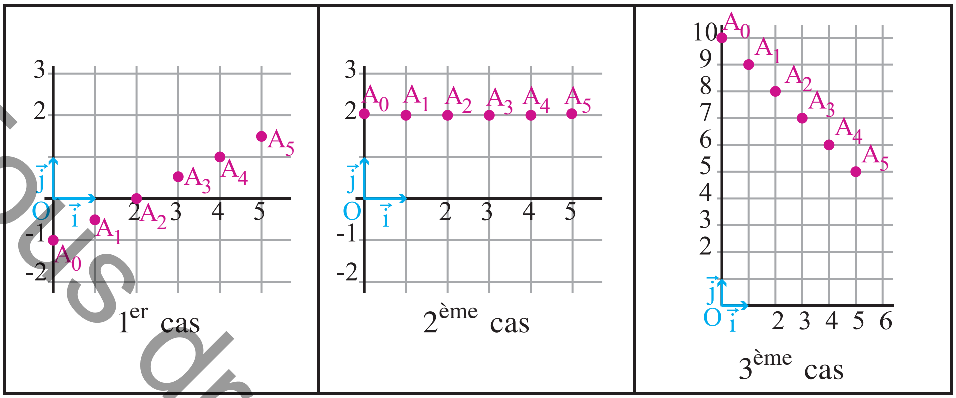
a. Montrer que $S_n = 4n^2$, $n \geq 1$.

b. Calculer la distance totale parcourue pendant 10 secondes.

c. Cette pierre met 6 secondes pour atteindre le fond d'un puits, quelle est la profondeur de ce puits ?

Activité 3

Dans chacun des cas suivants, on a représenté les points $A_n(n, u_n)$, $0 \le n \le 5$ où (u_n) est une suite arithmétique.



Pour chacun des cas précédents, comparer les termes u_n et u_{n+1}, $n \in \mathbb{N}$..

Définition

Soit $(u_n)_{n \ge n_0}$ une suite réelle.

- La suite $(u_n)_{n \ge n_0}$ est croissante si, pour tout entier $n \ge n_0$, $u_{n+1} \ge u_n$
- La suite $(u_n)_{n \ge n_0}$ est décroissante si, pour tout entier $n \ge n_0$, $u_{n+1} \le u_n$.
- La suite $(u_n)_{n \ge n_0}$ est constante si, pour tout entier $n \ge n_0$, $u_{n+1} = u_n$.
- Si la suite $(u_n)_{n \ge n_0}$ est croissante ou décroissante on dit qu'elle est monotone.

Théorème

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r.

Si $r > 0$ alors la suite (u_n) est croissante.

Si $r < 0$ alors la suite (u_n) est décroissante.

Si $r = 0$ alors la suite (u_n) est constante.

Activité 4

Dans chacun des cas suivants, étudier la monotonie de la suite (u_n).

1. $u_n = -3 + 2n, \quad n \ge 0$.
2. $u_n = -3n + 2, \quad n \ge 0$.
3. $u_n = n^2 - \left(n + \frac{1}{2}\right)^2, \quad n \ge 0$.
4. $u_0 = -1$, et pour tout $n \ge 0$, $u_{n+1} = -\sqrt{2} + u_n$.
5. $u_0 = 10$, et pour tout $n \ge 0$, $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{3}$.

Activité 5

Un sprinter fait 4 tours de piste le premier jour et il augmente de 200 mètres la distance parcourue chaque jour.

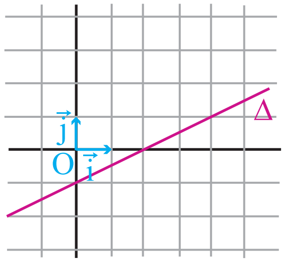
Soit u_n la distance parcourue par le sprinter le $n^{\text{ème}}$ jours .

1. Donner le sens de variation de la suite (u_n).
2. Sachant qu'un tour de piste mesure 1200 mètres, donner les valeurs de u_0, u_1 et u_2.
3. Combien de kilomètres parcourt-il le $30^{\text{ème}}$ jour ?
4. Dans combien de jours parcourt-il 10 tours de piste ?

II. Limite d'une suite arithmétique

Activité 1

Dans la figure ci-contre, la droite Δ est la représentation graphique d'une fonction affine f.



1. a. Montrer que $f(x) = \frac{1}{2}x - 1$.

   b. Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

2. Pour tout entier naturel n, on désigne par u_n l'ordonnée du point de Δ d'abscisse n.

   a. Justifier que $u_n = f(n)$, $n \geq 0$.

   b. Déterminer u_0, u_1, u_{100} et u_{101}.

   c. Montrer que la suite (u_n) est croissante.

3. a. Calculer u_{100000}.

   b. Justifier que pour tout $n > 100000$, $u_n > 49999$.

4. a. Résoudre dans $\mathbb{R}$, $f(x) > 10^{10}$.

   b. Déterminer un entier n_0 tel que pour tout entier n supérieur à n_0, $u_n > 10^{10}$.

Définition

Lorsque les termes u_n d'une suite finissent par dépasser n'importe quel réel A aussi grand soit-il, quand n devient de plus en plus grand, on dit que la suite (u_n) a pour limite $+\infty$ et on note $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

Activité 2

Soit (u_n) la suite arithmétique de premier terme $u_0 = 1000$ et de raison -20.

1. Exprimer u_n en fonction de n.

2. Justifier que la suite (u_n) est décroissante.

3. A partir de quel rang n_0, les termes de la suite (u_n) sont-ils négatifs ?

4. a. Déterminer l'entier n_1 , tel que pour tout $n \geq n_1$, $u_n < -10^{-4}$.

   b. Déterminer l'entier n_2 , tel que pour tout $n \geq n_2$, $u_n < -10^{-12}$.

Définition

Lorsque les termes u_n d'une suite finissent par être négatifs mais infiniment grand en valeur absolue, quand n devient de plus en plus grand, on dit que la suite (u_n) a pour limite $-\infty$ et on note $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$.

Théorème

Soit (u_n) une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r.

- Si $r > 0$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.
- Si $r < 0$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$.

Activité 3

Dans chacun des cas ci-dessous, vérifier que la suite (u_n) est arithmétique puis calculer sa limite.

1. $u_n = -3n + 4$, $n \geq 0$.

2. $u_n = \dfrac{5+2n}{6}$, $n \geq 0$.

3. $u_n = (n+1)^2 - (n+1)(n+3)$, $n \geq 0$.

4. $u_n = (1+3+5+......+(2n+1)) - (2+4+6+.....+2n)$, $n \geq 0$.

III. Suites géométriques

Activité 1

Soit (U_n) une suite géométrique de premier terme U_0 et de raison q.

• Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n = U_0 \times q^n$.

• Pour tous entiers naturels n et p, $U_n = U_p \times q^{(n-p)}$.

Lors d'une épreuve sportive, les dépenses énergétiques sont en grande partie couvertes par le métabolisme anaérobie lactique ce qui provoque une augmentation de la concentration sanguine de lactate.

Le but de l'exercice est d'étudier la concentration du lactate (mesurée en $mol.L^{-1}$) en fonction de la vitesse, chez un coureur international lors d'essais d'effort.

1. On note v_0 la vitesse du coureur pour l'essai initial et v_n la vitesse du coureur à l'essai n.

   La vitesse est augmentée de 2 $km.h^{-1}$ à chaque essai et on donne $v_0 = 12\ km.h^{-1}$.

   a. Déterminer v_1.

   b. Justifier que la suite (v_n) est arithmétique et déterminer son terme général.

2. On constate que $c_0 = 0.25\ mol.L^{-1}$ et qu'à l'essai suivant, la concentration du lactate dans le sang a augmenté de 78%.

   On note c_n la concentration du lactate dans le sang au $n^{ème}$ essai. Calculer c_1.

3. On estime que la concentration du lactate dans le sang continue à augmenter de 78% à chaque essai.

   a. Exprimer c_{n+1} en fonction de c_n, $n \in \mathbb{N}$.

   b. Vérifier que la suite (c_n) est géométrique et croissante.

4. Le seuil anaérobie est atteint lorsque le taux de lactate est supérieur à 4 $mol.L^{-1}$

   A partir de quelle vitesse peut-on considérer que le seuil est dépassé ?

Activité 2

La somme S de N termes consécutifs d'une suite géométrique de raison q différent de 1 est donnée par la formule $S = (\text{premier terme de } S) \times \dfrac{q^N - 1}{q - 1}$.

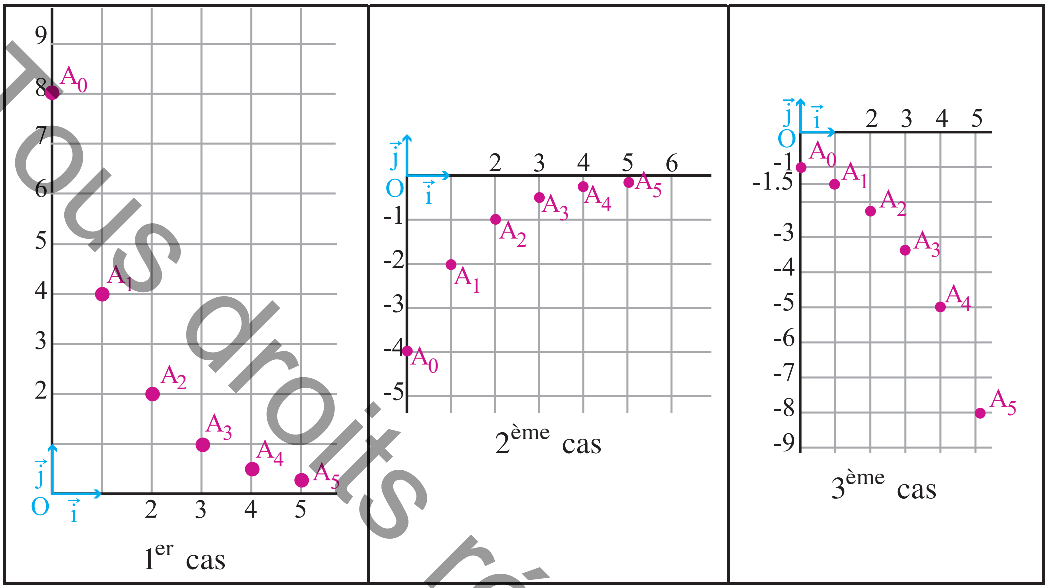
Pour fabriquer l'une des décorations d'un festival, un designer décide d'enfiler des boules sur un fil vertical de 7 mètres de longueur.

On sait que la première boule a un rayon égal à 1 mètre et à partir de la deuxième boule le rayon de chaque boule est égal aux trois quarts du rayon de la boule précédente.

Combien de boules peut-on enfiler sur ce fil ?

Activité 3

Dans chacun des cas suivants, on a représenté les points $A_n(n, u_n)$, $0 \le n \le 5$ où (u_n) est une suite géométrique.



Pour chacun des cas précédents, déterminer le terme général de la suite (u_n) et comparer les termes u_n et u_{n+1}, $n \in \mathbb{N}$.

Activité 4

1. Dans chacun des cas suivants, étudier la monotonie de la suite (u_n) définie par son terme général u_n.

   a. $u_n = 2 \times 3^n$, $n \ge 0$.

   b. $u_n = (-2)^n$, $n \ge 0$.

   c. $u_n = \dfrac{-1}{4} \times \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$, $n \ge 0$.

2. Soit q un réel strictement positif.

   a. Montrer que si $q > 1$ alors la suite de terme général q^n est croissante.

   b. Montrer que si $0 < q < 1$ alors la suite de terme général q^n est décroissante.

Théorème

Soit q un réel strictement positif.
Si $q > 1$ alors la suite de terme général q^n est croissante.
Si $0 < q < 1$ alors la suite de terme général q^n est décroissante.
Si $q = 1$ alors la suite de terme général q^n est constante.

Activité 5

Un athlète court le cent mètres en $t_0 = 11$ secondes.

1. Calculer sa vitesse moyenne v_0 sur 100 mètres (en mètres par seconde)
2. Au cours d'un entretien avec un journaliste, l'athlète déclare que s'il arrive à augmenter sa vitesse de 1 % alors son temps va diminuer de 1 %.

   Le but de cette question est de déterminer si sa déclaration est exacte.

   a. Calculer la vitesse moyenne augmentée de 1 % que l'on notera v_1 .

   b. Calculer le temps t_1 que l'athlète mettrait alors pour parcourir les 100 mètres.

   c. La déclaration de l'athlète est-elle exacte ?
3. L'entraîneur de l'athlète estime que son coureur peut augmenter sa vitesse moyenne de 1% tous les ans, durant les dix années à venir.
   On note v_n la vitesse moyenne de l'athlète au bout de n années et t_n le temps mis pour parcourir 100 mètres à cette vitesse v_n.

   a. Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n.

   b. Exprimer v_n en fonction de n.

   c. Vérifier que la suite (v_n) est croissante.

   d. Exprimer t_n en fonction de n et prouver que (t_n) est une suite géométrique dont on déterminera la raison. Vérifier que la suite (t_n) est décroissante.
4. Combien d'années d'entrainement faudrait-il à cet athlète, pour battre le record de 9 s 77 du jamaïcain Usain Bolt réalisé en 2013 à Moscou ?

Activité 6

Hsine est un joueur qui vient d'être embauché dans une équipe de foot ball.
Le directeur des ressources humaines lui a proposé deux formules différentes pour son contrat :

• La formule A : le salaire mensuel net d'embauche est de 1 850 DT, il est ensuite augmenté tous les ans de 120 DT.

• La formule B : le salaire mensuel net d'embauche est de 1 850 DT, il est ensuite augmenté tous les ans de 6 %.

On note u_n le salaire mensuel net de Hsine la $n^{ème}$ année de son embauche dans cette équipe, s'il choisit la formule A. Ainsi $u_1 = 1850$.

On note v_n le salaire mensuel net de Hsine la $n^{ème}$ année de son embauche dans l'équipe, s'il choisit la formule B. Ainsi $v_1 = 1850$.

1. a. Préciser u_2.
   b. Ecrire u_{n+1} en fonction de u_n, $n \geq 1$.
   c. Déterminer la nature de la suite (u_n). En déduire u_n en fonction de n.
   d. On note $S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n$, $n \geq 1$. Ecrire S_n en fonction de n.
2. a. Préciser v_2.
   b. Ecrire v_{n+1} en fonction de v_n, $n \geq 1$.
   c. Déterminer la nature de la suite (v_n). En déduire v_n en fonction de n.
   d. On note $S'_n = v_1 + v_2 + ... + v_n$, $n \geq 1$. Ecrire S'_n en fonction de n.
3. Que représentent les nombres $12u_n$, $12S_n$, $12v_n$ et $12S'_n$?
4. Quelle formule va-t-être choisie par Hsine, sachant qu'il pense rester 4 ans dans l'équipe ?

IV. Limite d'une suite géométrique

Activité 1

L'unité d'intensité du son utilisée dans cet exercice est le décibel (dB).

Une source sonore émet un son d'intensité 100 dB $(u_0 = 100)$.

On note $u_n \left(n \in \mathbb{N}^*\right)$ l'intensité du son mesurée après la traversée de n plaques d'isolation phonique sachant que chaque plaque d'isolation absorbe 10% de l'intensité du son qui lui parvient.

1. Calculer u_1, u_2 et u_3.

2. Déterminer la relation entre u_{n+1} et u_n puis exprimer u_n en fonction de n.

3. Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

4. a. Calculer u_{44}.

   b. Justifier que pour tout $n \geq 44$, $u_n < 1$.

5. Déterminer, l'entier n_0, tel que pour tout entier n supérieur à n_0, $u_n < 0.1$

Activité 2

Soit (u_n) la suite géométrique de premier terme $u_0 = 4$ et de raison $q = \frac{-1}{2}$.

1. Calculer u_1, u_2, u_3 et u_4.

2. a. Placer sur une droite graduée les cinq premiers termes de la suite (u_n).

   b. La suite (u_n) est-elle croissante ? est-elle décroissante ?

3. a. Déterminer l'entier n_0 tel que pour tout entier n supérieur à n_0, $|u_n| < 10^{-3}$.

   b. Déterminer, l'entier n_1, tel que pour tout entier n supérieur à n_1, $|u_n| < 10^{-4}$.

Définition

Soit (u_n) une suite et ℓ un réel. On dit que (u_n) admet pour limite ℓ si tout intervalle ouvert contenant ℓ, contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.
On écrit $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$ et on dit que la suite (u_n) est convergente.
Une suite non convergente est dite divergente.

Théorème

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q.
Si $q \in]-1, 1[$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.

Activité 3

Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n$, $\lim\limits_{n\to+\infty} 3\left(\frac{-1}{7}\right)^n$, $\lim\limits_{n\to+\infty} 100\left(\frac{1}{6}\right)^n$.

Activité 4

Soit la suite géométrique (u_n) de premier terme $u_0=\frac{1}{2}$ et de raison 2.

1. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on pose $A_n(n, u_n)$.
   Placer, dans un repère orthogonal, les points A_n , $n\in\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.
2. a. Déterminer le plus petit entier n_0 tel que pour tout entier naturel n supérieur à n_0, $u_n > 10^4$.
   b. Déterminer le plus petit entier n_1 tel que pour tout entier naturel n supérieur à n_1, $u_n > 10^8$.

Activité 5

Soit la suite géométrique (v_n) de premier terme $v_0=-3$ et de raison $q=3$.

Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on pose $A_n(n, v_n)$.

1. Placer, dans un repère orthogonal, les points A_n , $n\in\{0, 1, 2, 3, 4\}$.
2. Déterminer le plus petit entier n_0 tel que pour tout entier naturel n supérieur ou égale à n_0, $|v_n| > 10^6$.

Théorème

Soit (u_n) une suite géométrique de raison $q>1$ et de premier terme non nul u_0.

- Si $u_0>0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=+\infty$.
- Si $u_0<0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=-\infty$.

Activité 6

Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} 2\times\left(\frac{7}{3}\right)^n$, $\lim\limits_{n\to+\infty} -4(1.07)^n$. $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{1000}(1.01)^n$

Activité 7

Soit (u_n) la suite de terme général $u_n=(-1)^n$, $n\geq 0$.

1. Pour quelle(s) valeur(s) de n, a-t-on $u_n=1$?
2. Pour quelle(s) valeur(s) de n, a-t-on $u_n=-1$?

Activité 8

Soit (u_n) la suite géométrique de premier terme $u_0 = 4$ et de raison $q = \frac{3}{2}$.

1. a. Déterminer le terme général de la suite (u_n).
   b. Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.
   c. Déterminer le rang n_0 à partir du quel, $u_n \geq 10^8$.
2. Soit (v_n) la suite géométrique définie par $v_n = 4\left(\frac{-3}{2}\right)^n$, $n \in \mathbb{N}^*$.
   a. Justifier que si n est pair alors $v_n = u_n$.
   b. Justifier que si n est impair alors $v_n = -u_n$.
   c. Justifier que pour tout entier naturel pair supérieur ou égal à 50, $v_n \geq 10^8$.
   d. Justifier que pour tout entier naturel impair supérieur ou égal à 51, $v_n \leq -10^8$.

Théorème

Toute suite géométrique de raison $q \leq -1$ et de premier terme non nul, n'a pas de limite.

Activité 9

Déterminer la limite éventuelle de la suite (u_n) dans chacun des cas suivants :

1. $u_n = -3\left(\frac{-15}{7}\right)^n$, $n \geq 0$.
2. $u_n = 2(1.1)^n$, $n \geq 0$.
3. $u_n = \frac{-2}{3}\left(\frac{-1}{5}\right)^n$, $n \geq 0$.
4. $u_n = 4(-1.001)^n$, $n \geq 0$.
5. $u_n = (-7)^n$, $n \geq 0$.
6. $\lim\limits_{n \to +\infty} 3\left(\sqrt{3}\right)^n$, $n \geq 0$

V. Suite du type $u_{n+1} = au_n + b$

Activité 1

Une maison de jeunes, propose aux enfants de s'inscrire chaque mois à une activité.
L'une de ces activités est la gymnastique. Une étude effectuée sur l'année scolaire 2014/2015 montre que d'un mois à un autre 5 % des enfants ne se réinscrit pas à la gymnastique, alors qu'en même temps, 10 nouveaux enfants s'y inscrivent.
Le directeur se base sur les résultats de l'année scolaire 2014/2015 pour prévoir l'évolution des inscriptions pour les années scolaires à venir.

Le premier mois de l'année scolaire 2015/2016, 80 enfants se sont inscrits à la gymnastique.
On note u_1 le nombre initial d'enfants inscrits à la gymnastique, ainsi $u_1 = 80$.
Pour tout entier naturel $n \geq 1$, on note u_n le nombre d'enfants inscrits à la gymnastique au $n^{\text{ème}}$ mois.

1. Montrer que $u_2 = 86$.
2. a. Pour tout entier naturel $n \geq 1$, exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.
   b. Prévoir le nombre d'enfants inscrits à la gymnastique au $3^{\text{ème}}$ mois.
3. Pour tout entier naturel $n \geq 1$, on pose $v_n = u_n - 200$.
   a. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
   b. Pour tout entier naturel $n \geq 1$, exprimer v_n en fonction de n.
   c. En déduire que, pour tout entier naturel $n \geq 1$, $u_n = 200 - 120 \times (0.95)^{n-1}$.
   d. En déduire que le nombre d'inscriptions à la gymnastique augmente tous les mois.
2. a. Prévoir le nombre d'enfants inscrits à la gymnastique au $10^{\text{ème}}$ mois.
   b. Après combien de mois, le nombre d'enfants inscrits à la gymnastique dépassera-il 150 ?

Activité 2

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$.

1. Tracer dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ les droites d'équations $y = \frac{1}{2}x + 1$ et $y = x$.
2. Soit (u_n) la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = f(u_n), n \geq 0 \end{cases}$.
   a. Placer sur l'axe des abscisses le point d'abscisse $u_0 = 4$.
   b. Placer sur l'axe des ordonnées le réel $u_1 = f(u_0)$ puis reporter u_1 sur l'axe des abscisses.
   c. En réitérant le procédé précédent, placer sur l'axe des abscisses les réels u_2, u_3 et u_4.
   d. Que suggère le graphique concernant la monotonie de la suite (u_n).
   e. Montrer, par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n \geq 2$.
   En déduire le sens de variation de la suite (u_n).
3. Soit (v_n) la suite définie par $\begin{cases} v_0 = 1 \\ v_{n+1} = f(v_n), n \geq 0 \end{cases}$.
   a. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $v_n \leq 2$.
   b. En déduire que la suite (v_n) est croissante.

VI. Limite d'une suite de type $u_{n+1} = au_n + b$

Activité 1

Une observation faite par un club sur ses abonnés a permis de constater que chaque année, le taux de réabonnement diminue de 20 % et que le nombre de nouveaux abonnés est environ 2000.

En 2013 le nombre d'abonnés dans ce club est 8000.

On pose $a_0 = 8000$ et on note a_n le nombre d'abonnés après n années.

1. Déterminer le nombre d'abonnés en 2014.
2. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = \frac{4}{5}a_n + 2000$.
3. Soit (u_n) la suite définie par $u_n = 10000 - a_n$, $n \in \mathbb{N}$.
   a. Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique de raison $\frac{4}{5}$.
   b. En déduire que pour tout entier naturel n, $a_n = 10000 - 2000 \times \left(\frac{4}{5}\right)^n$.
   c. Après combien d'années le nombre d'abonnés dépassera-t-il 9900 ?
4. a. Justifier que pout tout $n \in \mathbb{N}$, $8000 \le u_n < 10000$.
   b. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} 2000 \times \left(\frac{4}{5}\right)^n$. Interpréter le résultat.

Théorème

Soit (u_n) une suite telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell \ (\ell \in \mathbb{R})$.

Pour tout réels a et b, $\lim\limits_{n\to+\infty} (au_n + b) = a\ell + b$.

Activité 2

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x - 1$.

1. a. Tracer dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ les droites d'équations $y = 2x - 1$ et $y = x$.
   b. Déterminer le point d'intersection de ces deux droites.
2. Soit (u_n) la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = f(u_n), \ n \in \mathbb{N}. \end{cases}$
   a. Placer sur l'axe des abscisses le point d'abscisse u_0.
   b. Placer sur l'axe des ordonnées le réel $u_1 = f(u_0)$ puis reporter u_1 sur l'axe $(O, \vec{i})$.

c. En réitérant le procédé précédemment, placer sur l'axe des abscisses les réels

u_2, u_3 et u_4.

d. Que suggère le graphique concernant la limite de la suite (u_n) ?

3. Soit (v_n) la suite définie par $v_n = u_n - 1$.

a. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique.

b. Exprimer v_n et u_n en fonction de n.

c. Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n$.

Théorème

Soit $a \in \mathbb{R}^*$.

- Si $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ alors $\begin{cases} \lim\limits_{n \to +\infty} (au_n + b) = +\infty & \text{si } a > 0 \\ \lim\limits_{n \to +\infty} (au_n + b) = -\infty & \text{si } a < 0 \end{cases}$
- Si $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$ alors $\begin{cases} \lim\limits_{n \to +\infty} (au_n + b) = -\infty & \text{si } a > 0 \\ \lim\limits_{n \to +\infty} (au_n + b) = +\infty & \text{si } a < 0 \end{cases}$
- Si la suite (u_n) n'a pas de limite alors la suite $(au_n + b)$ n'a pas de limite.

Suites arithmétiques

Soit (U_n) une suite arithmétique de premier terme U_0 et de raison r.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n = U_0 + n \times r$.
- Pour tous entiers naturels n et p, $U_n = U_p + (n-p) \times r$.

Somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique

La somme S de N termes consécutifs d'une suite arithmétique est donnée par la formule

$$S = \frac{N \times (\text{premier terme de } S + \text{dernier terme de } S)}{2}.$$

Suites géométriques

Soit (U_n) une suite géométrique de premier terme U_0 et de raison q.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n = U_0 \times q^n$.
- Pour tous entiers naturels n et p, $U_n = U_p \times q^{(n-p)}$.

Somme des termes consécutifs d'une suite géométrique

La somme S de N termes consécutifs d'une suite géométrique de raison q différent de 1 est donnée par la formule $S = (\text{premier terme de } S) \times \dfrac{q^N - 1}{q-1}$.

Monotonie des suites réelles

Soit $(u_n)_{n \geq n_0}$ une suite réelle.

- La suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ est croissante si, pour tout entier $n \geq n_0$, $u_{n+1} \geq u_n$.
- La suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ est décroissante si, pour tout entier $n \geq n_0$, $u_{n+1} \leq u_n$.
- La suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ est constante si, pour tout entier $n \geq n_0$, $u_{n+1} = u_n$.
- Si la suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ est croissante ou décroissante on dit qu'elle est monotone.

Monotonie d'une suite arithmétique

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r.

Si $r > 0$ alors la suite (u_n) est croissante.

Si $r < 0$ alors la suite (u_n) est décroissante.

Si $r = 0$ alors la suite (u_n) est constante.

Monotonie d'une suite géométrique

Soit q un réel strictement positif.

Si $q > 1$ alors la suite de terme général q^n est croissante.

Si $0 < q < 1$ alors la suite de terme général q^n est décroissante.

Si $q = 1$ alors la suite de terme général q^n est constante.

Limite d'une suite arithmétique

Soit (u_n) une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r.

- Si $r > 0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
- Si $r < 0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

Limite d'une suite géométrique

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q.

Si $q \in]-1, 1[$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Soit (u_n) une suite géométrique de raison $q > 1$ et de premier terme non nul u_0.

- Si $u_0 > 0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
- Si $u_0 < 0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

Limite d'une suite du type $u_{n+1} = au_n + b$

Soit (u_n) une suite telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell \ (\ell \in \mathbb{R})$.

Pour tout réels a et b, $\lim\limits_{n\to+\infty} (au_n + b) = a\ell + b$.

Soit $a \in \mathbb{R}^*$.

- Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ alors $\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} (au_n + b) = +\infty & \text{si } a > 0 \\ \lim\limits_{n\to+\infty} (au_n + b) = -\infty & \text{si } a < 0 \end{cases}$
- Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$ alors $\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} (au_n + b) = -\infty & \text{si } a > 0 \\ \lim\limits_{n\to+\infty} (au_n + b) = +\infty & \text{si } a < 0 \end{cases}$
- Si la suite (u_n) n'a pas de limite alors la suite $(au_n + b)$ n'a pas de limite.

Activité 1

Un épargnant a le choix entre deux formules pour placer un capital de 20 milles DT à partir du premier janvier 2015:

- Avec un intérêt simple de 2000 DT par an.
- Avec un intérêt composé de 7% par an.

1. a. Ouvrir un classeur du tableur Excel.
   b. Ecrire 2015 dans la cellule A1.
   c. Entrer dans la cellule A2 la fonction =A1+1 puis taper « Enter ».
   d. Sélectionner A2 et faire apparaître la croix noire en bas et à droite de la cellule, puis tirer le calcul vers A20.
2. a. Ecrire 20000 dans la cellule B1.
   b. Entrer dans la cellule B2 la fonction =B1+2000 puis taper « Enter ».
   c. Sélectionner B2 et faire apparaître la croix noire en bas et à droite de la cellule, puis tirer le calcul vers B20.
3. a. Ecrire 20000 dans la cellule C1.
   b. Entrer dans la cellule C2 la fonction =C1*1.07 puis taper « Enter ».
   c. Sélectionner C2 et faire apparaître la croix noire en bas et à droite de la cellule, puis tirer le calcul vers C20.
4. a. Quelle formule devrait choisir cet épargnant s'il décide d'épargner son capital pendant 10 ans ?
   b. Quelle formule devrait choisir cet épargnant s'il décide d'épargner son capital pendant 15 ans ?

Activité 2

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 2$.

1. Reproduire sur Excel la feuille de calcul suivante :

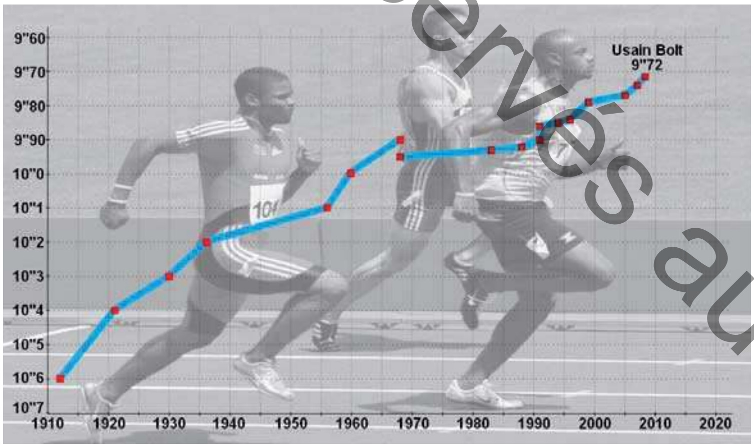
	A	B
1	n	u_n
2	$=0$	$=1$
3	$=A2+1$	$=0.5*B2+2$

La colonne A, affiche les valeurs prises par l'entier n.
La colonne B, affiche les valeurs prises par u_n.
Sélectionner A3 et faire apparaître la croix noire en bas et à droite de la cellule, puis tirer vers le bas, jusqu'à atteindre la valeur désirée de n.
Procéder de la même façon avec B3.

2. Conjecturer la limite de la suite (u_n).

Bientôt la fin des records du monde ?

Depuis les premiers jeux Olympiques de 1896, pas moins de 3 263 records mondiaux ont marqué **la progression sportive**. Alors qu'à Pékin, en 2008, 42 nouveaux records avaient été établis, en 2009 à Londres, seuls 20 l'ont été, dont celui du 4 x 100 mètres avec le Jamaïcain Usain Bolt.
Une équipe de l'Institut de recherche biomédicale et d'épidémiologie du sport (Irmes) a analysé l'ensemble des 3263 records du monde établis. Grâce à ces données, elle a pu élaborer un modèle statistique qui prévoit que la totalité des records **tendrait vers leurs limites absolues** vers 2060, sauf à imaginer des modifications génétiques.
L'analyse de l'évolution annuelle du nombre des records et des gains de performances montre une progression rapide entre 1896 et 1968, uniquement interrompue par les deux guerres mondiales. A partir de 1968, cette **progression** a subi un important ralentissement, alors même que durant cette période les techniques d'entraînement et de recrutement des sportifs se sont considérablement perfectionnées.
Les chercheurs de l'Irmes observent qu'en 2007 les records ont atteint 99% des limites estimées par le modèle statistique. Ce même modèle prédit que d'ici à vingt ans, la moitié des records auront atteint 99,95% de leur valeur limite : dans ces conditions, le 100 m masculin, dont le seuil se situerait autour de 9''67, ne pourrait plus être améliorable que de quelques millièmes de seconde.



QCM

Cocher la réponse exacte.

1. Soit (u_n) une suite arithmétique de raison $\frac{-2}{3}$.

- [ ] La suite (u_n) est croissante.
- [ ] La suite (u_n) est décroissante.
- [ ] La suite (u_n) n'est pas monotone.

2. Soit (u_n) une suite géométrique de premier terme $u_0 = 2$ et de raison $\frac{-2}{3}$.

- [ ] La suite (u_n) est croissante.
- [ ] La suite (u_n) est décroissante.
- [ ] La suite (u_n) n'est pas monotone.

3. Soit (u_n) une suite définie par $u_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 3u_n - 1$.

- [ ] La suite (u_n) est croissante.
- [ ] La suite (u_n) est décroissante.
- [ ] La suite (u_n) n'est pas monotone.

4. Soit (u_n) une suite arithmétique de raison $\frac{-1}{2}$.

- [ ] $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.
- [ ] $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.
- [ ] $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$.

5. Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = 2 \times \left(\frac{-1}{3}\right)^n$.

- [ ] $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.
- [ ] $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.
- [ ] $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$.

6. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = -1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{-1}{2} u_n + 1$.

- [ ] $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$.
- [ ] $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \frac{2}{3}$.
- [ ] $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.

VRAI - FAUX

Répondre par vrai ou faux en justifiant la réponse.

1. Si (u_n) est une suite arithmétique de raison $r > 0$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

2. Toute suite arithmétique est divergente.

3. Si (u_n) est une suite arithmétique décroissante alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$.

4. Si (u_n) est une suite géométrique divergente alors sa raison est inférieure à -1.

5. Si (u_n) est une suite géométrique non monotone alors elle est divergente.

6. Si (u_n) est une suite arithmétique de raison 2 alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

7. Si (u_n) est une suite géométrique de raison 2 et de premier terme $u_0 = \frac{1}{2}$ alors

   $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$.

8. Si (u_n) est une suite géométrique de premier terme $u_0 = -2$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$.

9. Si (u_n) est une suite géométrique de raison $q = -1$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$.

1 Dans l'un des péages d'une autoroute, un caissier a enregistré le passage de 321 véhicules à 15 heures et il a remarqué qu'il enregistrait 5 véhicules par minute en moyenne.
On note u_n le nombre moyen de véhicules enregistrés par le caissier après n minutes.

1. Préciser la nature de la suite réelle (u_n).
2. Déterminer le nombre de véhicules enregistrés par le caissier à 17 heures.
3. Dans combien de temps le nombre de véhicules enregistrés dépassera t-il 1200 ?

***2** Une entreprise exploite une nappe d'eau souterraine.
Elle commercialise l'eau de cette nappe sous forme de bouteilles d'eau minérale.
En constatant la diminution du volume de la nappe, l'entreprise a décidé de baisser sa production de 6% chaque année à partir de 2013.

1. Déterminer le nombre de bouteilles produites par cette entreprise en 2014 sachant qu'elle en a produit 75 mille en 2013.
2. On pose $u_0 = 75$ et pour tout entier naturel n on désigne par u_n le nombre de bouteilles (en milliers) produites par cette entreprise en l'année $2013 + n$.
   a. Justifier que la suite (u_n) est géométrique.
   b. Déterminer le terme général de la suite (u_n).
3. On estime que le renouvellement naturel de la nappe n'est pas suffisant pour permettre une exploitation dépassant 1200 Mille bouteilles.
   A partir de quelle année, l'entreprise devra-t-elle cesser d'exploiter la nappe d'eau ?

3 La plupart des lignes électriques font circuler du courant alternatif.
Certaines font circuler du courant continu à très haute tension ce qui occasionne moins de pertes que le courant alternatif notamment lorsque les lignes sont immergées, mais aussi lorsque les distances sont très importantes.
En 2012, la plus longue liaison électrique à courant continu à très haute tension en service dans le monde relie la centrale hydro-électrique de Xiangjiaba à la ville de Shanghai.
Elle mesure environ 1900 km, sa puissance électrique initiale est de 6 400 MW, le courant est transporté sous une tension de 800 kv.

Lorsque un courant électrique circule dans un câble, une partie de la puissance électrique est perdue. On estime les pertes de puissance électrique d'un courant continu à très haute tension à 0,3 % pour une distance de 100 kilomètres.

1. Quelle est la puissance électrique à l'arrivée de la ligne Xiangjiaba-Shanghai ?
2. D'autres lignes électriques à très haute tension, en courant continu, sont en cours d'étude. On souhaite limiter la perte de puissance électrique à 7 % sur ces lignes. Déterminer, à cent kilomètres près, la longueur maximale d'une ligne à très haute tension en courant continu pour laquelle la perte de puissance reste inférieure à 7%.

4 Déterminer éventuellement les limites des suites de terme général :

1. $u_n = -4n + 3$.
2. $u_n = -3 + \frac{4}{3}n$.
3. $u_n = \left(\frac{4}{5}\right)^n$.
4. $u_n = \frac{-1}{2}\left(\frac{7}{3}\right)^n$.
5. $u_n = \frac{1}{2}(-3)^n$.
6. $u_n = 4\left(\frac{5}{2}\right)^n$.

5 Dans un laboratoire de microbiologie, on prépare une culture bactérienne.

Au début de l'expérience, c'est-à-dire à $t = 0$ heure, cette culture contient 400 000 bactéries. Au bout de deux heures, on constate que le nombre de bactéries est passé à 1600 000. On pose $u_0 = 400000$ et on note u_n le nombre de bactéries au bout de n heures.

1. On suppose que la suite (u_n) est arithmétique.
   a. Calculer la raison de cette suite.
   b. Quel est le nombre de bactéries au bout de 8 heures ?
   c. Au bout de combien d'heures le nombre de bactéries sera-t-il strictement supérieur à 3 000 000 ?
2. On suppose que la suite (u_n) est géométrique.
   a. Calculer la raison de cette suite.
   b. Quel est le nombre de bactéries au bout de 6 heures ?
   c. Au bout de combien d'heures le nombre de bactéries sera-t-il strictement supérieur à 30 000 000 ?

6 Amir et Khalil décident d'effectuer une course après 12 semaines. Chacun a établi son programme d'entraînement.

1. La première semaine, Amir parcourt 10 kilomètres et décide d'augmenter de 1.5 kilomètres la distance parcourue chaque semaine.
   On note u_n la distance parcourue la $n^{ème}$ semaine. Ainsi $u_1 = 10$.
   a. Justifier que la suite (u_n) est arithmétique.
   b. Exprimer u_n en fonction de n.
   c. Calculer la distance parcourue par Amir la $4^{ème}$ semaine.
   d. Calculer la distance totale parcourue par Amir lors de ses entraînements, dernière semaine incluse.
2. Khalil parcourt aussi 10 kilomètres la première semaine et il souhaite augmenter chaque semaine d'un même pourcentage q % la distance parcourue, de telle sorte que la distance parcourue la dernière semaine soit de 42 kilomètres.
   On note v_n la distance parcourue la $n^{ème}$ semaine. Ainsi $v_1 = 10$.
   a. Montrer que la suite (v_n) est géométrique.
   b. Exprimer v_n en fonction de n et q. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.
   c. Déterminer la valeur de q arrondie à 10^{-1} près.
   d. Quelle est la distance parcourue par Khalil la $4^{ème}$ semaine ?
   e. Calculer la distance totale parcourue par Khalil lors de ces entraînements, dernière semaine incluse.

7 Une observation faite sur la fréquentation d'un stade de football a permis de constater, pour chaque année, un taux de réabonnement de70%, ainsi que l'apparition de 1500 nouveaux abonnés.

On note u_n le nombre des abonnés à la fin de la $n^{ème}$ année et on précise que $u_0 = 4000$.

1. a. Justifier que pour tout nombre entier naturel n, $u_{n+1} = 0.7u_n + 1500$.
   b. Montrer que pour tout entier naturel n, $u_n < 5000$.
   c. En déduire que la suite (u_n) est croissante.
2. Soit (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n, par $v_n = u_n - 5000$.
   a. Montrer que la suite (v_n) est géométrique .
   b. En déduire que, pour tout nombre entier naturel n, $u_n = 5000 - 1000(0.7)^n$.
3. On estime que l'évolution du nombre d'adhérents se poursuit selon ce modèle.
   a. Dans combien d'années, ce nombre dépassera –il 4800 ?
   b. Peut-on espérer un nombre d'adhérents supérieur à 6000 ?

8 Au 1er janvier 2014, une ville avait une population de 100 000 habitants.

Un bureau d'études avance l'hypothèse qu'à partir du 1er janvier 2015 le nombre d'habitants de la ville augmenterait chaque année de :

- 5 % du fait des naissances et des décès
- 4 000 personnes supplémentaires viennent s'installer chaque année dans cette ville du fait des mouvements migratoires,.

Pour tout entier naturel n, on note u_n le nombre d'habitants de cette ville au 1er janvier de l'année $2014+n$.

1. Déterminer u_0 et u_1.
2. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.
3. Soit (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n, par $v_n = u_n + 80000$.
   a. Montrer que la suite (v_n) est géométrique.
   b. Exprimer v_n en fonction de n.
   c. En déduire que $u_n = 10^4 \times \left[18(1.05)^n - 8\right]$.
4. a. Quel sera le nombre d'habitants de la ville le 1er janvier 2020 ?
   b. A partir de quelle année la population de cette ville dépassera-t-elle 200 000 habitants ?

9 On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = -1$ et pour tout $n \geq 0$, $u_{n+1} = -2u_n + 1$.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -2x + 1$.

1. Vérifier que pour tout $n \geq 0$, $u_{n+1} = f(u_n)$.
2. a. Tracer, dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, les droites d'équations $y = -2x + 1$ et $y = x$ puis déterminer leur point d'intersection.
   b. Représenter sur l'axe des abscisses les points A_n d'abscisse u_n, $n \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$.
   c. Que suggère le graphique concernant la convergence de la suite (u_n) ?
3. Soit (v_n) la suite définie par $v_n = u_n - \frac{1}{3}$.
   a. Montrer que la suite (v_n) est géométrique, on précisera sa raison et son premier terme.
   b. Exprimer u_n en fonction de n.
   c. Etudier la limite de la suite (u_n).

10 On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 3$ et pour tout $n \geq 1$, $u_{n+1} = 0.2\, u_n - 1$.

1. Déterminer la solution α de l'équation $x = 0.2x - 1$.
2. Soit (v_n) la suite définie par $v_n = u_n - \alpha$.

   a. Montrer que la suite (v_n) est géométrique, on précisera sa raison et son premier terme.

   b. Exprimer u_n en fonction de n.

   c. Etudier la limite de la suite (u_n).

11 Soit (u_n) la suite géométrique de premier terme $u_0 = -2$ et de raison $q = \frac{1}{3}$.

1. a. Déterminer le terme général de la suite (u_n).

   b. Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, On pose $S_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$.

   a. Exprimer S_n en fonction de n.

   b. Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$.

***12** Soit la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = 7, \\ u_{n+1} = \frac{1}{3} u_n + 4, \; n \in \mathbb{N}. \end{cases}$

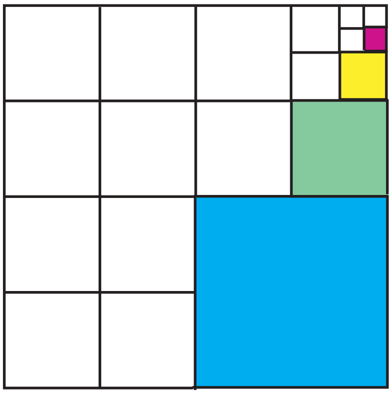
1. Montrer, par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 6$.
2. On définie la suite (v_n) par $v_n = u_n - 6$, $n \in \mathbb{N}$.

   a. Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

   b. Exprimer v_n en fonction de n et déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n$.

   c. Exprimer u_n en fonction de n et déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

3. Calculer, en fonction de n, les sommes $S_n = v_2 + v_3 + ... + v_n$ et $S'_n = u_2 + u_3 + ... + u_n$.



13 A partir d'un carré ABCD de 4 cm, on construit un premier carré (bleu) puis un deuxième (vert) et ainsi de suite comme l'indique la figure ci-contre.

On note $a_0 = 16$ (l'aire du carré ABCD) et on désigne par a_n l'aire du $n^{\text{ème}}$ carré $(n \geq 1)$.

1. a. Justifier que (a_n) est une suite géométrique .

   b. En déduire que pour tout $n \geq 0$, $a_n = \dfrac{16}{4^n}$.

2. On pose $S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n \quad (n \geq 1)$.

   a. Montrer que $S_n = \dfrac{16}{3}\left(1 - \dfrac{1}{4^n}\right)$.

   b. En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$.

14 Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 300$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{3}{4}u_n + 200$.

1. a. Montrer que pour tout entier naturel n, $u_n < 800$.

   b. En déduire que la suite (u_n) est croissante.

2. Soit (v_n) la suite définie par $v_n = u_n - 800,\ n \geq 0$.

   a. Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison.

   b. Exprimer v_n puis u_n en fonction de n.

   c. $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

3. Une salle de spectacle propose un abonnement pour l'année.
   En 2010, il y avait 300 abonnés. On estime que chaque année, il y a 200 nouveaux abonnés et que d'une année à l'autre, 75 % des abonnés renouvellent leur abonnement.

   a. Vérifier que le nombre d'abonnés estimé pour l'année $2010 + n$ est égal à u_n.

   b. Dans combien d'années, le nombre d'abonnés sera-t-il supérieur à 790 ?

   c. Dans ces conditions, est-il possible pour le gérant de la salle de spectacle d'espérer 1000 abonnés ?

***15** Toutes les heures, on injecte une même dose de 1.8 unité d'une substance médicamenteuse dans le sang. Les injections sont faites par piqure intraveineuse.
On suppose que la substance se répartit instantanément dans le sang et qu'elle est ensuite progressivement éliminée.
En une heure, la quantité de cette substance présente dans le sang diminue de 30%.
La première heure, se fait à l'instant $t=0$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note Q_n la quantité de substance présente dans le sang à l'instant $t=n$ (en heures) dés que la nouvelle injection est faite.

1. a. Justifier que $Q_1 = 1{,}8 + (0.7)\times(1.8)$.
   b. Exprimer Q_2 en fonction de Q_1 puis calculer Q_2.
2. a. Pour $n \in \mathbb{N}$, exprimer Q_{n+1} en fonction de Q_n.
   b. Déterminer une fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ tels que $Q_{n+1} = f(Q_n)$, $n \geq 1$.
   c. Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une seule solution α que l'on déterminera.
3. Soit (T_n) la suite définie par $T_n = Q_n - \alpha$, $n \geq 1$.
   a. Montrer que (T_n) est une suite géométrique.
   b. En déduire que $Q_n = 6\left(1-(0.7)^{n+1}\right)$, $n \geq 1$. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} Q_n$.
4. Donner une approximation de la quantité de substance présente dans le sang à l'instant $t=5$.

16 Lors de sa création au 1er janvier 2012, un petit club de sport a 300 adhérents.
A la fin de la première année, 60% des adhérents se réinscrivent et 100 nouveaux membres adhèrent.
Pour tout nombre entier naturel n, on appelle u_n le nombre d'adhérents du club, n années après la création du club.
On suppose que le nombre d'adhérents au club évolue de la même façon les années suivantes. Ainsi, pour tout nombre entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{6}{10}u_n + 100$.

1. Préciser u_0 et calculer u_1.

2. a. Montrer que pour tout entier naturel n, $250 < u_n \leq 300$.

b. En déduire que la suite (u_n) est décroissante. Interpréter ce résultat.

3. Soit (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n, par $v_n = u_n - 250$.

a. Montrer que la suite (v_n) est géométrique .

b. En déduire que, pour tout nombre entier naturel n, $u_n = 250 + 50\left(\frac{6}{10}\right)^n$.

c. Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$. Interpréter le résultat.

4. Sachant que ce club sera déficitaire si le nombre des adhérents est inférieur à 251, dans combien d'années, le sera-t-il ?

Correction de l'exercice 2 :

1. Le nombre de bouteilles produites en 2014 est égal à $75-\frac{75\times 6}{100}=70.5$ mille bouteilles.

2. a. $U_0=75$.

Pour tout $n\geq 0$, $U_{n+1}=U_n-\frac{6}{100}.U_n=(0.94)U_n$.

Par suite (U_n) est une suite géométrique de raison $q=0.94$.

b. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $U_n=75\times(0.94)^n$.

3. En l'année $(2013+n)$, le nombre total des bouteilles produites vaut $S_n=U_0+U_1+...+U_n$.
Comme le renouvellement naturel de la nappe n'est pas suffisant pour permettre une exploitation dépassant 1200Mille bouteilles,
alors le problème revient à chercher le plus grand entier naturel n_0 tel que $S_{n_0}\leq 1200$.

• $S_n=U_0\times\frac{1-(0.94)^{n+1}}{1-0.94}=\frac{75\times 100}{6}\left[1-(0.94)^{n+1}\right]=1250\left[1-(0.94)^{n+1}\right]$.

Ainsi $S_n\leq 1200$ équivaut à $1-(0.94)^{n+1}\leq\frac{1200}{1250}$ équivaut à $(0.94)^{n+1}\geq 0.04$

équivaut à $(n+1)\ln(0.94)\geq\ln(0.04)$ équivaut à $n+1\leq\frac{\ln(0.04)}{\ln(0.94)}$.

Or $\frac{\ln(0.04)}{\ln(0.94)}\simeq 52.02$. Alors $n_0=51$.

Correction de l'exercice 12 :

1. • $u_0=7$, ainsi l'inégalité $u_n>6$ est vérifiée pour $n=0$.
• Soit $n\in\mathbb{N}$. Supposons que $u_n>6$ et montrons que $u_{n+1}>6$.
$u_n>6$ équivaut à $\frac{1}{3}u_n>2$ équivaut à $\frac{1}{3}u_n+4>6$ équivaut à $u_{n+1}>6$.
Conclusion : Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n>6$.

2. a. Soit $n\in\mathbb{N}$, $v_{n+1}=u_{n+1}-6=\frac{1}{3}u_n-2=\frac{1}{3}(u_n-6)=\frac{1}{3}v_n$.

Par suite (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$ et de premier terme $v_0=u_0-6=1$.

b. $v_n=v_0\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^n=\frac{1}{3^n}$, $n\geq 0$. $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=0$ car $-1<\frac{1}{3}<1$.

c. De l'égalité $v_n=u_n-6$, $n\in\mathbb{N}$, on déduit $u_n=6+v_n$.

Par suite $u_n = 6 + \frac{1}{3^n}$, $n \in \mathbb{N}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 6$.

3. S_n est la somme de $(n-1)$ termes consécutifs d'une suite géométrique.

$$S_n = v_2 \times \frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{9}\times\frac{3}{2}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right) = \frac{1}{6}\left(1-\frac{1}{3^{n-1}}\right).$$

$$S'_n = u_2 + u_3 + \ldots + u_n = (6+v_2)+(6+v_3)+\ldots+(6+v_n)$$

$$= \underbrace{(6+6+\ldots+6)}_{(n-1)\text{ termes}} + s_n = 6(n-1)+\frac{1}{6}\left(1-\frac{1}{3^{n-1}}\right).$$

Correction de l'exercice 15 :

1. a. A l'instant $t=1$, on injecte une dose de 1.8 unités.

La dose restante dans le sang après une heure de la première injection est $\frac{70}{100}\times 1,8$ unités.

Ainsi $Q_1 = 1.8 + (0.7)\cdot(1.8) = 3.06$

b. $Q_2 = \underbrace{1.8}_{\substack{\text{quantité}\\ \text{injectée}\\ \text{à l'instant}\\ t=2}} + \underbrace{(0.7)Q_1}_{\substack{\text{quantité}\\ \text{restante}\\ \text{à l'instant}\\ t=2}} = 3.942$

2. a. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $Q_{n+1} = 1.8 + (0.7)Q_n$

b. $f : x \mapsto 1.8 + 0.7x$

c. $f(x) = x$ équivaut à $1.8 + 0.7x = x$ équivaut à $x = 6$.

3. a. Soit $n \geq 1$. $T_{n+1} = Q_{n+1} - 6 = 1.8 + 0.7Q_n - 6 = 0.7Q_n - 4.2 = 0.7(Q_n - 6) = 0.7T_n$.

Ainsi (T_n) est une suite géométrique de raison 0.7.

b. (T_n) est une suite géométrique de raison 0.7.

Alors $T_n = T_1(0.7)^{n-1}$, $n \geq 1$. Or $T_1 = Q_1 - 6 = -2.94$.

Par conséquent $T_n = -2.94(0.7)^{n-1}$, $n \geq 1$. Comme $Q_n = T_n + 6$, $n \geq 1$.

Alors $Q_n = -2.94(0.7)^{n-1} + 6$, $n \geq 1$.

De l'égalité $2.94 = 6\times 0.49 = 6\times(0.7)^2$ on aura $Q_n = 6\left[1-(0.7)^{n+1}\right]$, $n \geq 1$. $\lim\limits_{n\to+\infty} Q_n = 6$

4. $Q_5 = 6\left[1-(0.7)^6\right] \simeq 5.3$.

Chapitre 7

Probabilités

Aperçu historique

En cherchant à résoudre des problèmes posés par les jeux de hasard que les mathématiciens donnent naissance aux probabilités.

Les archéologues ont montré que ces jeux ont été pratiqués dans de nombreuses sociétés antiques, pourtant on ne trouve nul part trace de leur étude.

Le problème initial le plus fameux (évoquer par le mathématicien italien Luca Pacioli en 1494) est celui de la répartition équitable des enjeux d'une partie inachevée, à un moment où l'un des joueurs a un pris un avantage, non décisif évidemment. Le même type de problème est posé à Pascal par son ami le Chevalier de Méré. Ce problème est à l'origine d'une correspondance entre Pascal et Fermat (1654).

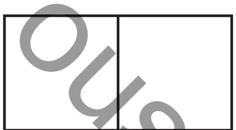
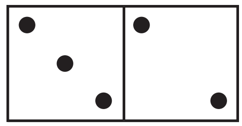
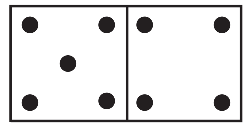
Pascal et Fermat dans leurs correspondances dégagent le calcul des probabilités et la notion d'Esperance de gain

Bernoulli, puis De Moivre, ont précisé les notions de dénombrement et mis en place des modèles probabilistes pour des phénomènes expérimentaux.

Activité 1

Un jeu de dominos est composé d'un certain nombre de jetons. Chaque jeton se présente sous la forme d'un rectangle comportant deux cases. Une case peut être blanche (vide) ou peut comporter de 1 à 6 points.

Exemples :

		
Double zéro	Trois et deux	Cinq et quatre

1. Donner le nombre des doubles dans un domino.
2. Utiliser un arbre de choix pour trouver le nombre des non-doubles dans ce jeu.
3. Combien y a-t-il de dominos dans ce jeu ?

Activité 2

Un entraîneur de basket dispose de cinq joueurs. Combien d'équipes peut-il former, en tenant compte des postes des joueurs ?

Le nombre de permutations d'un ensemble de n éléments est égal à $n\times(n-1)\times\cdots\times 2\times 1,\ n\in\mathbb{N}^*.$.

Activité 3

Dans une course de 12 chevaux, combien y a-t-il d'arrivées possibles au tiercé :

1. Dans l'ordre ?
2. Dans le désordre ? (sans ordre)

Soit E un ensemble de n éléments et p un entier tel que $1\le p\le n$, $n\in\mathbb{N}^*$.
Le nombre d'arrangements de p éléments de E est l'entier A_n^p égal à $n\times(n-1)\times\cdots\times(n-p+1)$.

Soit E un ensemble non vide de cardinal égal à n et p un entier naturel tel que $p\le n$, $n\in\mathbb{N}^*$.
Le nombre de combinaisons de p éléments de E est égal à $C_n^p=\binom{n}{p}=\dfrac{A_n^p}{p!}$

Activité 4

Un tournoi sportif compte 8 équipes engagées.

Chaque équipe doit rencontrer les autres deux fois (aller et retour).

Combien doit-on organiser de matchs ?

Activité 5

Un sondage auprès de 150 personnes a donné les résultats suivants :
A la question « êtes-vous un fumeur ? », 50 personnes répondent oui.
A la question « pratiquez vous régulièrement du sport ? », 80 personnes répondent oui.
A la question « êtes-vous un fumeur pratiquant régulièrement du sport ? », 35 personnes répondent oui.
On note F l'ensemble des fumeurs et S l'ensemble des personnes qui pratiquent du sport.

1. Déterminer le cardinal de chacun des ensembles F, S , $F \cap S$ et $F \cup S$.
2. Combien de personnes ne sont pas fumeurs et ne pratiquent pas régulièrement du sport ?

Activité 6

A l'aide d'un logiciel, on assimile le lancer de trois pièces de monnaies identiques.

On s'intéresse au nombre de Pile et de Face obtenues.

Le tableau ci-dessous donne la répartition des résultats pour 3000 lancers.

Résultat	Nombre de fois
3 Piles et 0 face	370
2 Piles et 1 face	1120
1 Pile et 2 faces	1128
0 Piles et 3 faces	382

1. Calculer la fréquence d'apparition de chacun des résultats.

2. Si on lance une fois de plus ces trois pièces.

Parmi les résultats : « Obtenir 3 Piles et 0 face » et « Obtenir 2 Piles et 1 face »,

Quel est le plus probable ?

I. Probabilité d'un événement

Activité 1

Une boite contient cinq jetons marqués A - A - A - N - N .

On tire au hasard successivement deux jetons que l'on dispose côte à côte, de gauche à droite.

1. Combien y a-t-il de tirages possibles ?
2. Calculer la probabilité des événements suivants :

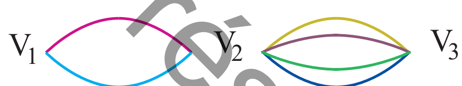
   E : « Obtenir le mot NA ».

   F : « Obtenir le mot AN ».

Activité 2

On organise une course de voitures entre deux villes V_1 et V_3 en passant par la ville V_2 .

La figure ci-dessous représente les trois villes V_1 , V_2 et V_3 , ainsi que les routes les reliant.



1. De combien de façons peut-on aller de V_1 à V_3 en passant par V_2 ?
2. Combien y a-t-il de circuits $V_1 \to V_2 \to V_3 \to V_2 \to V_1$?
3. Une personne effectue un circuit $V_1 \to V_2 \to V_3 \to V_2 \to V_1$.

   A chaque embranchement, il choisit au hasard un chemin possible.

   Quelle est la probabilité qu'il ne prenne pas deux fois la même route entre deux villes ?

Définition

Une expérience aléatoire est une expérience dont le résultat est soumis au hasard (imprévisible).

Si E est l'univers associé à cette expérience (l'ensemble de toutes les issues associées à cette expérience) alors toute partie A de E s'appelle un événement de cette expérience aléatoire.

Théorème

• Lors d'une expérience aléatoire, la probabilité d'un événement A est la somme de toutes les probabilités des éventualités appartenant à A .

• Lorsque toutes les issues d'une expérience aléatoire ont la même probabilité, on dit qu'il y a équiprobabilité et dans ce cas $p(A)=\frac{\text{Cardinal de A}}{\text{Cardinal de E}}$.

• $p(E)=1$.

• $p(\varnothing)=0$.

Activité 3

On lance deux dés cubique équilibrés, (c'est-à-dire non truqués) dont les faces sont numérotées de1 à 6.

On dit que deux événements A et B sont incompatibles lorsque $A\cap B=\varnothing$.

1. Déterminer l'univers E associé à cette expérience et donner son cardinal.
2. Déterminer la probabilité des événements suivants :

A : « Obtenir le même chiffre sur les deux dés ».
B : « Obtenir deux chiffres pairs ».
C : « Obtenir deux chiffres différents sur les deux dés ».
D : « Obtenir le 1 sur un seul dé ».
$E=A\cup B$ et $F=B\cup D$.

Propriétés

On considère une expérience aléatoire.

1. Pour tout événement A, $p(\overline{A})=1-p(A)$.
2. Pour tous événements A et B , $p(A\cup B)=p(A)+p(B)-p(A\cap B)$.
3. Pour tous événements incompatibles A et B , $p(A\cup B)=p(A)+p(B)$.

Activité 4

Quatre équipes E_1, E_2, E_3 et E_4 restent qualifiées pour les demi-finales d'un tournoi.

L'histoire des jeux ne retiendra que le nom des trois équipes qui vont accéder au podium et leurs places respectives.

On notera par exemple (E_2, E_1, E_4) le podium : $\begin{cases} 1^{\text{ère}} \text{équipe } E_2 \\ 2^{\text{ème}} \text{équipe } E_1 \\ 3^{\text{ème}} \text{équipe } E_4 \end{cases}$.

1. Déterminer le nombre de podiums qu'on peut constituer avec ces quatre équipes.
2. Dans cette question on suppose que les quatre équipes ont la même chance de gagner un match lors de ce tournoi.
   a. Calculer la probabilité que l'équipe E_1 occupe la deuxième place dans le podium.
   b. Calculer la probabilité que l'équipe E_1 ne figure pas dans le podium.

Activité 5

Parmi les 8 équipes qualifiées pour les quarts de finales de la coupe Tunisienne il y a 5 équipes de la première division A_1, B_1, C_1, D_1 et E_1, 2 équipes de la deuxième division F_2 et G_2 et une équipe de la troisième division H_3.

On admet que les tirages au sort des matchs n'est pas truqué.

Ainsi l'équipe A_1, par exemple, a la même chance de rencontrer chacune des autres équipes et de jouer à domicile si elle sort la première au tirage.

Déterminer la probabilité des événements suivants :

X : « L'équipe A_1 rencontre une équipe de la première division sur son terrain ».

Y : « L'équipe A_1 rencontre une équipe de la première division ».

Z : « L'équipe A_1 ne rencontre ni B_1 ni C_1 ».

W : « L'équipe A_1 rencontre H_3 ».

T : « Une équipe de la deuxième division rencontre H_3 sur le terrain de cette dernière ».

II. Epreuves successives et événements indépendants

Activité 1

Une pièce de monnaie étant bien équilibrée. Quel est l'événement le plus probable ?

A : « Obtenir exactement une pile au cours de deux lancers ».

B : « Obtenir exactement deux piles au cours de quatre lancers ».

Définition et théorème

On considère une expérience constituée de n épreuves successives, $n \in \mathbb{N}^*$.
Soit A_1 un événement réalisé avec la probabilité p_1 lors de la première épreuve, A_2 un événement réalisé avec la probabilité p_2 lors de la deuxième épreuve et A_n un événement réalisé avec la probabilité p_n lors de la $n^{ème}$ épreuve.
On dit que les événements sont indépendants si la réalisation de l'un n'influe pas sur la réalisation du suivant.
Dans ce cas la probabilité que les événements $A_1, A_2, ..., A_n$ se réalisent successivement est égale à $p_1 \times p_2 \times ... \times p_n$.

Activité 2

On suppose que chaque naissance donne équiprobablement un garçon ou une fille.
Quelle est la probabilité que, dans une famille de quatre enfants, il y ait plus de filles que de garçons ?

Activité 3

Trois tireurs à l'arc T_1, T_2 et T_3 visent une cible.
La probabilité d'atteindre la cible (ou de ne pas l'atteindre) est indépendante pour chacun d'eux.
On désigne par p_1, p_2 et p_3 les probabilités respectives pour que les tireurs T_1, T_2 et T_3 atteignent la cible. On donne $p_1 = 0.3$, $p_2 = 0.15$ et $p_3 = 0.10$

1. Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :
   A : « La cible soit atteinte par ces trois tireurs ».
   B : « La cible soit atteinte par un seul tireur ».
2. La cible a-t-elle plus d'une chance sur deux d'être touchée par au moins un des tireurs ?

III. Epreuves successives et événements dépendants

Activité 1

Marouène s'entraîne au tir à la cible. Son entraîneur a remarqué qu'il a 80% de chance d'atteindre la cible lors de son premier essai, s'il réussit le premier essai il aura 90% de chance de réussir le deuxième et s'il ne réussit pas le premier essai il aura 50% de chance de réussir le deuxième.

1. Calculer la probabilité que Marouène atteint la cible au cours de deux essais.
2. Calculer la probabilité que Marouène atteint la cible seulement au cours du premier essai.
3. Calculer la probabilité que Marouène atteint la cible une seule fois au cours de deux essais.

Définition et théorème

On considère une expérience constituée de n épreuves successives, $n \in \mathbb{N}^*$.
Soit A_1 un événement réalisé lors de la première épreuve, A_2 un événement réalisé lors de la deuxième épreuve et A_n un événement réalisé lors de la $n^{\text{ème}}$ épreuve.
On dit que les événements sont dépendants si la réalisation de l'un influe sur la réalisation du suivant.
Soit p_1 la probabilité de A_1, p_2 la probabilité de A_2 si A_1 se réalise et p_n la probabilité de A_n si A_{n-1} se réalise.
Alors la probabilité que les événements $A_1, A_2, \dots, A_n$ se réalisent successivement est égale à $p_1 \times p_2 \times \dots \times p_n$.

Activité 2

Un débutant à un jeu effectue trois parties successives. Pour la première partie, les probabilités de gagner ou de perdre sont les mêmes. Pour la suite des parties on suppose que :
- Si une partie est gagnée, la probabilité de gagner la suivante est 0.8.
- Si une partie est perdue, la probabilité de perdre la suivante est 0.6.

Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :

A : « Le joueur gagne les trois parties ».

B : « Le joueur perd les trois parties ».

C : « Le joueur gagne la première partie seulement ».

D : « Le joueur gagne une seule partie ».

IV. Variables aléatoires

Activité 1

Un joueur lance une fléchette sur une cible, à deux reprises, avec une probabilité 0.8 d'atteindre la cible au premier lancer et avec une probabilité 0.7 d'atteindre la cible au deuxième lancer. Les éventualités associées à ce jeux sont :

E_1 : « Ne pas atteindre la cible deux fois de suite ».

E_2 : « Atteindre la cible au premier coup seulement ».

E_3 : « Atteindre la cible au deuxième coup seulement ».

E_4 : « Atteindre la cible deux fois de suite ».

1. Associer à chaque événement le nombre de fois où le joueur atteint la cible.
2. Calculer la probabilité de ces quatre événements.
3. Vérifier que $p(E_1)+p(E_2)+p(E_3)+p(E_4)=1$.

Définition et notation

Soit E l'univers associé à une expérience aléatoire.

- Définir une variable aléatoire X, c'est définir une application qui associe à chaque éventualité de cette expérience un nombre réel x_i.
- L'ensemble des valeurs prises par X est noté $X(E)$.
- L'évènement formé par les éventualités d'image x_i est noté $(X = x_i)$.

Activité 2

Une urne contient 4 boules blanches et 2 boules noires. On tire successivement deux boules sans remise et désigne par X la variable aléatoire associant à chaque tirage le nombre de boules blanches tirées.

1. Déterminer les valeurs possibles de X.
2. Pour chacune de ces valeurs, calculer la probabilité de leur obtention.

Définition

On considère une variable aléatoire X associée à une expérience aléatoire d'univers E.

Si $X(E)=\{x_1,x_2, ..., x_n\}$, $n \in \mathbb{N}^*$, alors l'ensemble des couples $(x_i, p(X=x_i))$ constitue la loi de probabilité (ou distribution) de la variable aléatoire X.

On représente en général la loi de probabilité de la variable aléatoire X sous forme d'un tableau, en notant les valeurs x_i qui peut prendre la variable de X et les probabilités de ces valeurs, notées $p(X=x_i)$.

Valeur x_i	x_1	x_2	....	x_n
$p(X=x_i)$	$p(X=x_1)$	$p(X=x_2)$	....	$p(X=x_n)$

Activité 3

Une expérience consiste à lancer deux dés équilibrés dont les faces sont numérotées de 1 à 6. Soit X la variable aléatoire qui attribue la somme des numéros qui apparaissent sur les faces supérieures des dés.

1. Déterminer la loi de probabilité de X.
2. Calculer la probabilité de chacun des évènements suivants :

A : « Obtenir une somme supérieure ou égale à 9 ».

B : « Obtenir une somme supérieure ou égale à 3 ».

C : « Obtenir une somme paire ».

Activité 4

Dans un milieu de culture, après une heure, une bactérie peut mourir avec une probabilité $\frac{1}{7}$, peut continuer à vivre avec une probabilité $\frac{2}{7}$, peut se diviser en deux bactéries identiques avec une probabilité $\frac{4}{7}$.

On suppose qu'initialement le milieu contient deux bactéries B_1 et B_2.

On désigne par X la variable aléatoire qui prend pour valeur le nombre de bactéries après une heure.

Déterminer la loi de probabilité de X.

V. Espérance, variance et écart-type d'une variable aléatoire

Activité 1

Un joueur a une chance sur trois de gagner une partie. Il joue trois parties. Chaque partie est indépendante des précédentes.

1. Calculer la probabilité pour qu'il gagne :
   a. les trois parties.
   b. seulement la première partie.
   c. seulement la deuxième partie.
   d. une seule partie.
2. On désigne par X la variable aléatoire donnant le nombre de parties gagnées par ce joueur.
   a. Justifier que les valeurs prises par X sont 0, 1, 2 et 3.
   a. Déterminer la loi de probabilité de X.
   b. Déterminer la valeur du réel $0\times p(X=0)+1\times p(X=1)+2\times p(X=2)+3\times p(X=3)$

Définition

On considère une variable aléatoire X associée à une expérience aléatoire.
La moyenne des valeurs prises par X affectées de leurs probabilités est la valeur moyenne que l'on peut espérer pour X lors de la réalisation de l'expérience.
Cette moyenne appelée, espérance mathématique de X et notée E(X).
Si $X(E)=\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ alors

$$E(X)=x_1\cdot p(X=x_1)+x_2\cdot p(X=x_2)+...x_n\cdot p(X=x_n)$$

Commentaire

L'espérance mathématique d'une variable aléatoire est la valeur que l'on s'attend à trouver, en moyenne, si l'on répète un grand nombre de fois la même expérience aléatoire.

Activité 2

On dispose d'un jeton à deux faces numérotées 1 et 2 et un dé à 6 faces, numérotées de 1 à 6.

L'espérance mathématique permet de calculer le degré d'équité d'un jeu de hasard :
Si l'espérance est nulle, le jeu est équitable, si elle est positive, le jeu est favorable au joueur et si elle est négative, le jeu est défavorable au joueur.

Un jeu consiste à jeter simultanément le jeton et le dé puis à noter le produit des numéros qui apparaissent sur les faces supérieures.

- Si le résultat est strictement inférieur à 5, on perd 5 points.
- Si le résultat est strictement supérieur à 10, on gagne 10 points
- Si non on gagne 1 point.

On note X la variable aléatoire qui représente le gain algébrique du joueur (compté négativement quand il perd).

1. Déterminer la loi de probabilité de X.
2. Calculer $E(X)$. A qui ce jeu est-il favorable ?

Définitions

On considère une variable aléatoire X associée à une expérience aléatoire.

- On appelle variance de X le nombre $V(X)=E\left(\left(X-E(X)\right)^2\right)$.
- On appelle écart-type de X le nombre $\sigma(X)=\sqrt{V(X)}$.

Activité 3

On jette un dé équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6.
On désigne par X la variable aléatoire qui à chaque lancer associe le numéro obtenu dans la face supérieure.

1. a . Compléter le tableau suivant :

Valeur x_i	1	2	3	4	5	6
$p(X=x_i)$						
$(x_i-3.5)^2$						

b. Montrer que $E(X)=3.5$.

c. En déduire que $V(X)=\frac{1}{3}\left((2.5)^2+(1.5)^2+(0.5)^2\right)$.

2. Soit Y la variable aléatoire qui à chaque lancer associe le carré du numéro obtenu dans la face supérieure.
   a. Déterminer la loi de probabilité de Y.
   b. Comparer $V(X)$ et $E(Y)-\left[E(X)\right]^2$.

Propriété

$$V(X)=E\left(X^2\right)-\left(E(X)\right)^2$$

Activité 4

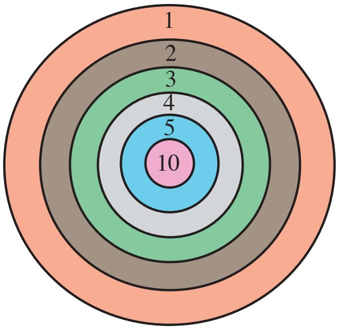
Un tireur à l'arc envoie 3 flèches sur la cible. On admet que chaque tir est indépendant des précédents et que la probabilité d'atteindre la cible pour chaque tir est égale à $\frac{3}{4}$.

On désigne par X la variable aléatoire qui prend pour valeur le rang de la première fois que le tireur atteint la cible et prend pour valeur 0 s'il n'atteint jamais la cible.

1. Déterminer la loi de probabilité de X.
2. Déterminer la valeur moyenne de X.
3. Calculer la variance et l'écart-type de X.

Activité 5

Pour une compétition, le sélectionneur doit choisir entre deux tireurs à l'arc qui ont des performances définies par les lois de probabilités ci-dessous.
X et Y sont les variables aléatoires donnant le nombre de points obtenus à chaque tir respectivement par le tireur A et le tireur B.



Tireur A

x_i	1	2	3	4	5	10
$p(X=x_i)$	0.16	0.15	0.22	0.25	0.16	0.06

Tireur B

y_i	1	2	3	4	5	10
$p(Y=y_i)$	0.03	0.1	0.51	0.21	0.11	0.04

1. Calculer l'espérance et l'´ecart type de chacune des deux variables aléatoires.

2. Compte tenu de ces informations, quel tireur va choisir le sélectionneur ?

Commentaires

- La variance est l'espérance des carrés des écarts par rapport à l'espérance.
- L'écart type sert à mesurer la dispersion des valeurs que prend la variable aléatoire autour de l'espérance.

Probabilité d'un évènement

• Lors d'une expérience aléatoire, la probabilité d'un événement A est la somme de toutes les probabilités des éventualités appartenant à A .

• Lorsque toutes les issues d'une expérience aléatoire ont la même probabilité, on dit qu'il y a équiprobabilité et dans ce cas $p(A) = \frac{\text{Cardinal de A}}{\text{Cardinal de E}}$.

• $p(E) = 1$. • $p(\varnothing) = 0$.

Propriétés

On considère une expérience aléatoire.

1. Pour tout événement A, $p(\overline{A}) = 1 - p(A)$.

2. Pour tous événements A et B , $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$.

3. Pour tous événements incompatibles A et B , $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$.

Epreuves successives et événements indépendants

On considère une expérience constituée de n épreuves successives, $n \in \mathbb{N}^*$.
Soit A_1 un événement réalisé avec la probabilité p_1 lors de la première épreuve, A_2 un événement réalisé avec la probabilité p_2 lors de la deuxième épreuve et A_n un événement réalisé avec la probabilité p_n lors de la $n^{\text{ème}}$ épreuve.
On dit que les événements sont indépendants si la réalisation de l'un n'influe pas sur la réalisation du suivant.
Dans ce cas la probabilité que les événements $A_1, A_2, \dots, A_n$ se réalisent successivement est égale à $p_1 \times p_2 \times \dots \times p_n$.

Epreuves successives et événements dépendants

On considère une expérience constituée de n épreuves successives, $n \in \mathbb{N}^*$.
Soit A_1 un événement réalisé lors de la première épreuve, A_2 un événement réalisé lors de la deuxième épreuve et A_n un événement réalisé lors de la $n^{\text{ème}}$ épreuve.
On dit que les événements sont dépendants si la réalisation de l'un influe sur la réalisation du suivant.
Soit p_1 la probabilité de A_1, p_2 la probabilité de A_2 si A_1 se réalise et p_n la probabilité de A_n si A_{n-1} se réalise.
Alors la probabilité que les événements $A_1, A_2, \dots, A_n$ se réalisent successivement est égale à $p_1 \times p_2 \times \dots \times p_n$.

Loi d'une variable aléatoire

On considère une variable aléatoire X associée à une expérience aléatoire d'univers E.

Si $X(E)=\{x_1,x_2,...,x_n\}$, $n\in\mathbb{N}^*$, alors l'ensemble des couples $(x_i,p(X=x_i))$ constitue la loi de probabilité (ou distribution) de la variable aléatoire X.

On représente en général la loi de probabilité de la variable aléatoire X sous forme d'un tableau, en notant les valeurs x_i qui peut prendre la variable de X et les probabilités de ces valeurs, notées $p(X=x_i)$.

Valeurs x_i	x_1	x_2	....	x_n
$p(X=x_i)$	$p(X=x_1)$	$p(X=x_2)$	....	$p(X=x_n)$

Espérance d'une variable aléatoire

On considère une variable aléatoire X associée à une expérience aléatoire.

La moyenne des valeurs prises par X affectées de leurs probabilités est la valeur moyenne que l'on peut espérer pour X lors de la réalisation de l'expérience.

Cette moyenne appelée, espérance mathématique de X et notée E(X).

Si $X(E)=\{x_1,x_2,...,x_n\}$ alors $E(X)=x_1\cdot p(X=x_1)+x_2\cdot p(X=x_2)+...+x_n\cdot p(X=x_n)$

Variance et écart-type d'une variable aléatoire

On considère une variable aléatoire X associée à une expérience aléatoire.

- On appelle variance de X est le nombre $V(X)=E\left((X-E(X))^2\right)=E\left(X^2\right)-(E(X))^2$
- On appelle écart-type de X est le nombre $\sigma(X)=\sqrt{V(X)}$.

Activité 1

Une expérience consiste à lancer deux dés puis faire la somme des nombres apparus.

On se propose de simuler cette expérience 20 fois à l'aide d'un tableur.

Dans chacune des cellules A1 et B1, on tape la formule $=\text{ENT}\left(\text{ALEA}()*6+1\right)$ pour générer des entiers compris entre 1 et 6.

Dans la cellule C1, on écrit la formule $=\text{A1}+\text{B1}$ pour déterminer la somme des deux faces apparentes des dés lancés.

Sélectionner A1 et à l'aide de la poignée de recopie, la copier jusqu'à la cellule A20.

Sélectionner B1 et à l'aide de la poignée de recopie, la copier jusqu'à la cellule B20.

Sélectionner C1 et à l'aide de la poignée de recopie, la copier jusqu'à la cellule C20.

Dans la cellule D1, on écrit la formule $=\text{C1}/20$ et à l'aide de la poignée de recopie, la copier jusqu'à la cellule D20.

1. Déterminer toutes les valeurs de la colonne C et la fréquence de chaque valeur d'apparition en utilisant la colonne D.
2. Quelle est la fréquence d'avoir une somme supérieure ou égale à 0.5 ?
3. Refaire le même travail en cliquant Ok sur A1 et B1 pour faire une autre expérience.

Activité 2 : (Avec une calculatrice)

On donne le tableau de la loi de probabilité d'une variable aléatoire où les valeurs de $p(X = x_i)$ sont écrites sous forme de fractions qui ont le même dénominateur.

x_i	1	2	3	6
$p(X = x_i)$	$\frac{2}{15}$	$\frac{6}{15}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{3}{15}$

On désire calculer l'espérance et l'écart-type de cette variable aléatoire à l'aide d'une calculatrice.

Sur les calculatrices « SHARP EL-531WH et EL-506W » pour effectuer des calculs des probabilités, choisissez $\boxed{\text{Mode}}$ $\boxed{1}$ $\boxed{0}$.

Pour entrer les données taper : $\boxed{1}$ $\boxed{\text{STO}}$ $\boxed{2}$ $\boxed{\text{M+}}$

$\boxed{2}$ $\boxed{\text{STO}}$ $\boxed{6}$ $\boxed{\text{M+}}$

$\boxed{3}$ $\boxed{\text{STO}}$ $\boxed{4}$ $\boxed{\text{M+}}$

$\boxed{6}$ $\boxed{\text{STO}}$ $\boxed{3}$ $\boxed{\text{M+}}$

- Pour afficher l'espérance de cette variable taper : $\boxed{\text{RCL}}$ $\boxed{\overline{X}}$
- Pour afficher l'écart type de cette variable taper : $\boxed{\text{RCL}}$ $\boxed{\sigma_X}$
- Pour afficher la variance de cette variable taper : $\boxed{\text{RCL}}$ $\boxed{\sigma_X}$ $\boxed{X^2}$.

Influences du sport sur le taux de cholestérol

Le sang contient 2 catégories principales de lipides: le cholestérol et les triglycérides. On sait que tous les 2 augmentent **la probabilité** d'ennuis cardio-vasculaires et que le taux de cholestérol idéal devrait être inférieur à 2 grammes/litre.

L'exercice physique régulier réduit de façon nette le taux des triglycérides et du mauvais cholestérol (le ldl), alors qu'il accroit le bon cholestérol (le hdl). Mais ce bénéfice disparait si on arrête de s'entrainer.

30 minutes de marche chaque jour suffisent pour commencer. Ensuite la course à pied à allure modérée est le sport idéal pour faire baisser définitivement son taux de cholestérol et de triglycérides.

QCM

Cocher la réponse exacte.

1. Soit A et B deux événements tels que $p(A)=0.4$, $p(A\cap B)=0.1$ et $p(A\cup B)=0.9$.

Alors,

☐ $p(B)=0.6$ ☐ $p(B)>0.6$ ☐ $p(B)<0.6$

2. La probabilité qu'un tireur atteigne une cible est égale à $\frac{2}{5}$.

Sur deux tirs, indépendant l'un de l'autre, la probabilité que le tireur atteigne la cible les deux fois est égale à,

☐ $\frac{2}{5}$. ☐ $\frac{4}{25}$. ☐ $\frac{2}{25}$.

3. Une urne contient 5 boules noires et 3 boules blanches.

On tire successivement et sans remises 2 boules de l'urne. La probabilité de l'événement :

« La $1^{\text{ère}}$ boule tirée est noire et la $2^{\text{ème}}$ boule tirée est blanche » est égale à,

☐ $\frac{2\times(5\times3)}{8\times7}$. ☐ $\frac{5\times3}{8\times8}$. ☐ $\frac{5\times3}{8\times7}$.

4. On lance deux dés cubiques parfaitement équilibrés. Tous les résultats sont équiprobables.

La probabilité d'obtenir deux numéros identiques est :

☐ $\frac{5}{6}$. ☐ $\frac{C_6^1}{C_6^2}$. ☐ $\frac{1}{6}$.

5. Soit a un réel non nul. La loi de probabilité d'une variable aléatoire X est représentée par :

x_i	1	2	3	4
$p(X=x_i)$	a	2a	3a	4a

☐ $p(X=3)=\frac{3}{10}$. ☐ $p(X=3)=\frac{1}{2}$. ☐ $p(X=3)=\frac{3}{7}$.

VRAI - FAUX

Répondre par vrai ou faux en justifiant la réponse.

1. Deux événements contraires sont incompatibles.

2. Deux événements incompatibles sont contraires.
3. On tire simultanément deux boules d'une urne contenant deux boules blanches et trois boules noires qui sont indiscernables au toucher.

   La probabilité de l'événement « L'une des boules au moins est noire » est égale à $\frac{9}{10}$.

4. Si x_1 et x_2 sont deux valeurs distinctes prises par une variable aléatoire X, alors les événements $(X = x_1)$ et $(X = x_2)$ sont incompatibles.
5. Le tableau ci-dessous représente la loi de probabilité d'une variable aléatoire X.

x_i	-2	-1	0	1
$p(X = x_i)$	0.15	0.05	0.1	0.7

   L'espérance $E(X)$ est un réel négatif.

***1** On sait que, parmi 120 adhérents d'un club sportif, 60 pratiquent la natation, 50 pratiques le fitness et 20 pratiquent à la fois la natation et le fitness.

On considère un adhérent au hasard, calculer la probabilité de chacun des événements suivants :

N : « L'adhérent pratique la natation ».

F : « L'adhérent pratique le fitness ».

L : « L'adhérent pratique la natation ou le fitness ».

R : « L'adhérent ne pratique ni la natation ni le fitness ».

2 Un groupe de cinq amis, n'ayant pas réservé leurs places, se répartit, au hasard et indépendamment les uns des autres, entre les cinq voitures d'un train.

1. Quelle est la probabilité que, dans chaque voiture, se trouve l'un de ce groupe ?
2. On sait qu'il y a, dans chaque voiture, quatre places libres.
   Quelle est la probabilité que tous les amis du groupe trouvent une place assise ?

3 Une urne contient 2 boules blanches et 3 boules noires.

On tire successivement deux boules sans remise.

Calculer les probabilités des événements suivants :

A « tirer une boule blanche puis une boule noire»

B « tirer une boule blanche et une boule noire»

C « Tirer deux boules de même couleur »

D « Tirer deux boules de couleurs différentes ».

4 Lors d'une élection, 10 % des gens votent pour le candidat C_1.

30 % pour le candidat C_2 et 60 % pour le candidat C_3.

On interroge 3 personnes au hasard.

Soit les évènements A : « les trois personnes votent pour C_3 ».

B : « l'une au moins vote pour C_1 ».

Quel est l'évènement le plus probable ?

5 Une équipe est formée par 24 joueurs tous nés en 1997.

On se propose de calculer la probabilité que deux joueurs aux moins soient nés le même jour.
On considère que l'année compte 365 jours et que chacun des 24 joueurs peut avoir l'un des 365 jours de l'année comme date d'anniversaire.
Soit les événements A : « Deux joueurs au moins ont la même date d'anniversaire ».

B : « Les anniversaires des 24 joueurs sont deux à deux différentes ».

1. Calculer $p(B)$.

2. Conclure.

6 1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = \dfrac{x}{2x+1}$.

Dresser le tableau de variation de f.

2. Une tirelire contient n pièces de $\dfrac{1}{2}$ dinar et $(n+1)$ pièces de 1 dinar .

On prend simultanément deux pièces au hasard et on s'intéresse à la somme S obtenue en dinar.
On admet l'équiprobabilité de toutes les extractions.

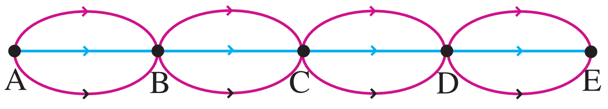
a. Déterminer la probabilité que S soit un entier lorsque $n = 6$.

b. n étant un entier naturel supérieur à 1. Déterminer la probabilité p_n que S soit un entier.

c. Montrer que $P_n < \dfrac{1}{2}$.

d. A partir de quelle valeur de n a-t-on $P_n > 0.49$?

7 On considère cinq points A, B, C, D et E alignés dans cet ordre.



Chaque point (sauf le dernier) est relié au suivant par 3 chemins, deux rouges et un bleu.
Un mobile se déplace de A vers E en passant par B, C et D et en choisissant un chemin au hasard à chaque embranchement.

Quelle est la probabilité de chacun des événements suivants :

I : « le mobile n'emprunte que des chemins rouges ».

J : « le mobile emprunte les chemins dont les couleurs sont rouge, rouge, bleu, rouge (dans cet ordre) ».

K : « le mobile emprunte une seule fois un chemin bleu ».

8 Une équipe A joue deux matchs contre la même équipe B (aller –retour).

En étudiant l'historique des matchs entre ces deux équipes, un journaliste estime que l'équipe A gagne avec une probabilité 0.5, perd avec une probabilité 0.3 et fait match nul avec une probabilité 0.2.

1. Calculer la probabilité pour que l'équipe A gagne le match d'aller et fasse match nul au retour.
2. Calculer la probabilité pour que l'équipe A gagne les deux matchs.
3. Calculer la probabilité pour que l'équipe B gagne un match et perde un match.
4. Calculer la probabilité pour que l'équipe A gagne un seul match.

***9** Lorsqu'un joueur de tennis effectue une mise en jeu, il a droit à deux tentatives : un premier service, suivi, s'il n'est pas réussi, d'un second service.

Les statistiques d'un joueur donnent les résultats suivants :

- La probabilité que le premier service réussisse est égale à $\frac{2}{3}$.
- S'il a échoué, la probabilité que le deuxième service réussisse est égale à $\frac{4}{5}$.

Lorsque les deux services échouent, on dit qu'il y a "double faute", sinon, la mise en jeu est réussie.

1. Calculer la probabilité que le joueur fasse une double faute.
2. Calculer la probabilité que le joueur réussisse sa mise en jeu.

10 Deux joueuses de tennis Emna et Eya s'affrontent dans un match en deux sets gagnants. (Pour gagner le match, une joueuse doit gagner deux sets. Il y a donc au plus trois sets). On sait que,

- La probabilité que Eya gagne le 1er set est 0.6
- La probabilité que Eya gagne le 2ème set est 0.5
- La probabilité que Eya gagne le 3ème set (si il y en a un) est 0.4.

Calculer la probabilité des événements suivants :

A : « Eya gagne le match en 2 sets ».

B : « Eya perd le match en 2 sets ».

C : « Eya gagne au moins un set ».

D : « Eya gagne le match ».

11 On tire simultanément 3 jetons d'une urne contenant 5 jetons numérotés de 1 à 5 et on note X le plus petit numéro obtenu.

1. Préciser l'univers E associé à cette expérience aléatoire.
2. À quelles parties de E correspondent les événements $(X=1)$, $(X=2)$ et $(X=3)$.
3. Déterminer la loi de probabilité de X et calculer son espérance.

12 Une urne contient 9 boules dont 3 bleues,5 vertes et 1 jaune.

On effectue un tirage simultané et au hasard de deux boules.

Une boule bleue rapporte dix points, une boule verte rapporte trois points et une boule jaune rapporte deux points. Soit X le nombre de points obtenus suite à ce tirage.

1. Déterminer la loi de X.
2. Calculer $E(X)$, $V(X)$ et $\sigma(X)$.

13 Une enveloppe contient huit "figures" d'un jeu de cartes : les quatre rois, les quatre dames.

1. On tire simultanément et au hasard 3 cartes de l'enveloppe.
   Soit X la variable aléatoire qui à chaque tirage associe le nombre de rois obtenus.
   a. Déterminer la loi de probabilité de X.
   b. Calculer l'espérance mathématique de X.
   c. Calculer la variance et l'écart-type de X.
2. On effectue successivement 2 fois le tirage au hasard d'une carte que l'on remet à chaque fois dans l'enveloppe.
   Soit Y la variable aléatoire dont la valeur est égale au nombre de rois obtenus au cours des 2 tirages.
   a. Déterminer la loi de probabilité de Y.
   b. Calculer l'espérance mathématique de Y.
   c. Calculer la variance et l'écart-type de Y.

14 Six chevaux pénètrent successivement, au hasard, sur la piste d'un cirque.
Parmi eux deux sont blancs, les autres sont noirs.

1. Quelle est la probabilité que le premier cheval apparu soit blanc ?
2. On note X la variable aléatoire qui donne le rang du premier cheval blanc.

   a. Déterminer la loi de probabilité de X.
   b. Calculer $E(X)$, $V(X)$ et $\sigma(X)$.

15 Un service après-vente dispose des équipes de dépannage qui interviennent auprès de la clientèle sur appel téléphonique.
Les appels se produisent de façon indépendante, et la probabilité qu'un retard se produise dans le dépannage à la suite d'un appel est $p = 0.3$

Un même client a appelé le service à 3 dates différentes.
Soit X le nombre de retards que ce client a subi.

1. a. Déterminer la loi de probabilité de X.
   b. Calculer $E(X)$, $V(X)$ et $\sigma(X)$.

2. Calculer les probabilités des événements :

A : « Le client a subi au moins un retard ».

B : « Le client a subi moins de 2 retards ».

16 Dans une tombola, on dispose de cent enveloppes :

Une enveloppe contient 100 DT, cinq enveloppes contiennent 10 DT , dix enveloppes contiennent 5 DT et les autres sont vides.

Un joueur paie 3 DT et prend une enveloppe au hasard.

On note X le gain algébrique du joueur.

1. Déterminer la loi de probabilité de X .
2. Calculer l'espérance de gain du joueur. À qui ce jeu est-il favorable ?
3. Quel devrait être le coût d'une enveloppe pour que le jeu soit équitable ?

17 Un match de tennis se termine dès qu'un des deux joueurs gagne deux sets.

Un match se déroule donc en deux ou trois sets.

Les joueurs A et B sont régulièrement adversaires. Le joueur A gagne en moyenne 4 sets sur 10. Le résultat d'un set est indépendant de celui des autres sets.

On note X le nombre de sets joués au cours d'un match entre ces deux joueurs.

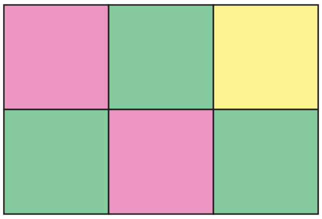
1. Déterminer la loi de probabilité de X.
2. Calculer $E(X)$, $V(X)$ et $\sigma(X)$.

18 Dans une compétition de course, un joueur doit choisir au hasard deux modèles parmi les suivants : course de 100 mètres, de 1000 mètres, de 2000 mètres ou de 3000 mètres.

On désigne par X la variable aléatoire qui a pour valeur le nombre de courses choisies par un joueur dont la distance est supérieure ou égale à 2000 mètres.

1. Déterminer la loi de probabilité de X.
2. Calculer $E(X)$, $V(X)$ et $\sigma(X)$.

***19** Un jeu de hasard est formé d'un dispositif lançant de façon aléatoire une fléchette dans une cible ayant la forme suivante :



La fléchette atteint toujours une case et une seule.
Les six cases ont toutes la même probabilité d'être atteintes.

Si la fléchette atteint une case jaune, on attribue 6 points pour le joueur.

Si la fléchette atteint une case rose, on attribue 3 points pour le joueur.

Si la fléchette atteint une case verte, on attribue 2 points pour le joueur.

1. On note X la variable aléatoire donnant le nombre de point attribués lors d'un lancer.

   a. Déterminer la loi de probabilité de X.

   b. Calculer $E(X)$, $V(X)$ et $\sigma(X)$.

2. Marouène joue 2 parties consécutives indépendantes.

   a. Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :

      A : « La somme des points attribués est égale à 12 ».

      B : « Le nombre de points attribués lors du premier lancer est 3 et lors du second est 6 ».

      C : « La somme des points attribués est égale à 9 ».

   b. On note Y la variable aléatoire donnant la somme des point attribués lors des deux lancers.

   Déterminer la loi de probabilité de Y.

Correction de l'exercice 1 :

On note E l'ensemble formé par les 120 adhérents de ce club.

$$P(N)=\frac{\text{card}(N)}{\text{card}(E)}=\frac{60}{120}=0.5$$

$$P(F)=\frac{\text{card}(F)}{\text{card}(E)}=\frac{50}{120}=\frac{5}{12}\simeq 0.42$$

$$P(L)=p(N\cup F)=p(N)+p(F)-p(N\cap F)=(0.5)+\frac{5}{12}-\frac{20}{120}=0.75$$

$$P(L)=p\left(\overline{N\cup F}\right)=1-p(N\cup F)=1-0.75=0.25$$

Correction de l'exercice 9 :

On considère les événements suivants :

A : «Le joueur fait une double faute »

B : «Le joueur réussit sa mise en jeu »

• L'événement A est réalisé lorsque le joueur échoue le premier service et le deuxième service.

Ainsi $p(A)=\left(1-\frac{2}{3}\right)\left(1-\frac{4}{5}\right)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{5}=\frac{1}{15}\simeq 0.067$

• $B=\overline{A}$ par la suite $p(B)=1-p\left(\overline{A}\right)=1-\frac{1}{15}=\frac{14}{15}\simeq 0.933$

Remarque :

On peut calculer $p(B)$ sans passer par le calcul de $p(A)$.

$$p(B)=\underbrace{\frac{2}{3}}_{\text{La probabilité que le joueur réussisse lors du premier service.}}+\underbrace{\left(1-\frac{2}{3}\right)\left(\frac{4}{5}\right)}_{\text{La probabilité que le joueur échoue le premier service et réussisse lors du deuxième.}}$$

Correction de l'exercice 19 :

Les six cases ont toutes la même probabilité d'être atteintes.

Par suite : • La probabilité que la fléchette atteigne une case jaune est $\frac{1}{6}$

• La probabilité que la fléchette atteigne une case rose est $\frac{2}{6}$

• La probabilité que la fléchette atteigne une case verte est $\frac{3}{6}$

1. a. Les valeurs possibles de X sont 2, 3 et 6.

• $(x=2)$ est l'événement «la fléchette atteint une case verte». Alors $p(x=2)=\frac{3}{6}=0.5$.

• $(x=3)$ est l'événement «la fléchette atteint une case rose». Alors $p(x=3)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}\simeq 0.33$

• $(x=6)$ est l'événement «la fléchette atteint une case jaune». Alors $p(x=6)=\frac{1}{6}\simeq 0.17$

x_i	2	3	6
$p(X=x_i)$	$\frac{3}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}$

b. • $E(X)=2\times\frac{3}{6}+3\times\frac{2}{6}+6\times\frac{1}{6}=\frac{18}{6}=3$

• $V(X)=\left(4\times\frac{3}{6}+9\times\frac{2}{6}+36\times\frac{1}{6}\right)-\left(E(X)\right)^2=\frac{66}{6}-9=11-9=2.$

• $\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{2}\simeq 1.41$

2. a. L'événement A est réalisé lorsque le joueur gagne 6 points dans chaque lancer.

Ainsi $p(A)=p(x=6)\times p(x=6)=\frac{1}{36}$.

• $p(B)=p(X=3)\times p(X=6)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{18}$.

• $C=B\cup B'$,

B' : «Le nombre de points attribués lors du premier lancer est 6 et lors du second est 3».

Ainsi $p(C)=p(B)+p(B')$ car $B\cap B'=\emptyset$.

Par suite $p(C)=2\times p(X=3)\times p(X=6)=\frac{2}{18}=\frac{1}{9}$.

b. Le tableau suivant permet de déterminer les valeurs possibles de Y :

+	2	3	6
2	4	5	8
3	5	6	9
6	8	9	12

Ainsi $Y \in \{4, 5, 6, 8, 9, 12\}$.

- $p(Y=4)=p(X=2)\times p(X=2)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$.
- $p(Y=5)=2\times p(X=2)\times p(X=3)=2\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$.
- $p(Y=6)=p(X=3)\times p(X=3)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$.
- $p(Y=8)=2\times p(X=2)\times p(X=6)=\frac{1}{6}$.
- $p(Y=9)=p(C)=\frac{1}{9}$.
- $p(Y=12)=p(A)=\frac{1}{36}$.

y_i	4	5	6	8	9	12
$p(Y=y_i)$	$\frac{1}{4}=\frac{9}{36}$	$\frac{1}{3}=\frac{12}{36}$	$\frac{1}{9}=\frac{4}{36}$	$\frac{1}{6}=\frac{6}{36}$	$\frac{1}{9}=\frac{4}{36}$	$\frac{1}{36}$

On vérifie que la somme de la deuxième ligne du tableau vaut 1.

Bibliographie

- Déclic Mathématiques Terminale L Enseignement de spécialité (Hachette : éduction 1994)
- Cahier Analyse :Didier Müller - LCP - 2012
- Transmath 4e - Édition 2011
- LOI DE PARETO   : Introduction aux probabilités et statistiques
- Mathématiques 2e. (NATHAN : éduction 1990)

Webographie

- http://www.math.unicaen.fr/lmno/Oresme/Oresme.html
- http://www.apprendre-en-ligne.net/MADIMU2/ANALY/ANALY7.PDF
- fr.wikipedia.org/wiki/Histoire_des_logarithmes_et_des_exponentielles
- storage.canalblog.com/02/77/827181/62566057.pdf
- fr.wikipedia.org/wiki/Histoire_des_logarithmes_et_des_exponentielles
- fr.wikipedia.org/wiki/Limite_d%27une_suite
- www.math93.com/index.php/histoire-des-maths/notions-et-theoremes/146-les-probabilites
- www.sport-passion.fr/conseils/sophrologie-sport.php
- svt.ac-dijon.fr/schemassvt/article.php3?id_article=625
- www.conseils-courseapied.com/fondamentaux/vma-vitesse-maximale-aerobie-course-a-pied.html
- www.batardsensible.com/sante/maigrir-rapidement-sans-regime-bien-manger-et-perdre-du- poids.html
- rasleblog.over-blog.com/10-index.html
- naturelementbio.over-blog.com/article-index-glycemique-52295065.html
- www.volodalen.com/12entrainement/aerobie0.htm
- www.volodalen.com/13physiologie/lactate.htm
- www.marathons.fr/spip.php?article4802
- www.swissheart.ch/?id=172&L=1
- www.sportsante.info/article/sites/default/files/LE-SPORT-POUR-LES-SENIORS-UN-ENJEU-DE-PREVENTION.pdf