REPUBLIQUE TUNISIENNE
MINISTERE DE L'EDUCATION

Mathématiques

4éme année de l'enseignement secondaire

Section Lettres

Hikma Smida
Professeur universitaire

Najiba Mhamdi
Inspecteur

Leila BenYoussef
Professeur

Evaluateurs

Tahar Dergaa
Inspecteur

Othman Ferjani
Inspecteur

Centre National Pédagogique

Remerciements

Les auteurs remercient

Messieurs Tahar DERGAA et Othman FERJANI pour leurs critiques, leurs conseils pertinents et leurs modifications judicieuses.

Madame Imène GHEDAMSI pour sa contribution et ses conseils.

Messieurs Nabil MZIOU et Mourad EL ARBI pour leur contribution et leur disponibilité.

Les membres de l'équipe d'édition du CNP pour leur grande compétence et leur patience.

Les auteurs

Préface

Ce manuel comprend huit chapitres.
Chaque chapitre comprend quatre rubriques.

Vérifier vos acquis

Cette rubrique vise à permettre aux élèves de consolider leurs acquis antérieurs.

Cours

Cette rubrique comprend:
- des activités visant à permettre aux élèves de développer leur capacité à chercher, à expérimenter, à modéliser et à raisonner;
- les résultats du cours à retenir.

L'essentiel du cours

Cette rubrique contient les principaux résultats du cours afin que les élèves puissent s'y référer.

Exercices

Cette rubrique comporte des exercices et problèmes visant à permettre aux élèves de mobiliser leurs compétences de façon autonome.

Sommaire

Chapitre 1

Dérivées et applications

" […] Pour résoudre ces équations, il étudie le maximum des expressions algébriques. Il prend "la dérivée première" de ces expressions qu'il annule et démontre que la racine de l'équation obtenue, substituée dans l'expression algébrique donne le maximum. […] Et comme la seule démonstration convaincante est de faire parler le texte même d'Al-Tusi, nous allons prendre trois exemples dans l'œuvre de ce mathématicien :[…], le troisième, pour dégager comment transformation affine, divisibilité et dérivée se conjuguent dans la solution de l'équation."

(R. Ras hed, Entre Arithmétique et Algèbre , 1984).

Sharaf Al-Din Al-Tusi est un mathématicien arabe qui a écrit un traité mathématique vers 1213.

Chapitre 1 Dérivées et applications

Activité 1

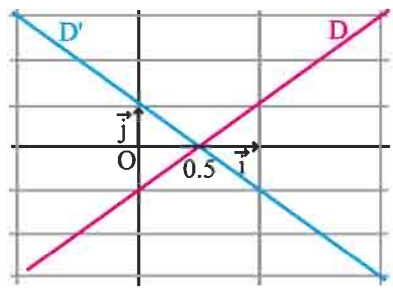
Le plan est muni d'un repère orthogonal $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

On a tracé ci-contre les droites D et D'.
Répondre par vrai ou faux.
1. La droite D a pour équation

a. $y = \frac{2}{3}x - 1$, b. $y = 2x + 3$, c. $y = 2x - 1$.

2. La pente de la droite D' est égale à

a. 2, b. –1, c. –2.



Activité 2

Le plan est muni d'un repère orthogonal $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

Soit D la droite d'équation $y = 4x + 1$.
Répondre par vrai ou faux.

a. $\vec{u}\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de D.

b. $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de D.

c. D passe par le point de coordonnées $(4, 1)$.

d. D passe par le point de coordonnées $(0, 1)$.

Activité 3

Le plan est muni d'un repère orthogonal $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

On a tracé ci-contre la courbe C d'une fonction f définie sur l'intervalle $[-4, 5]$.

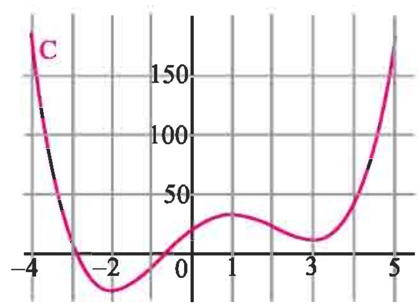
Répondre par vrai ou faux.

a. f est croissante sur $[-2, 1]$.

b. f est décroissante sur $[3, 5]$.

c. f est négative sur $[-2, 1]$.

d. f est positive sur $[3, 5]$.



1. Nombre dérivé. Equation de la tangente

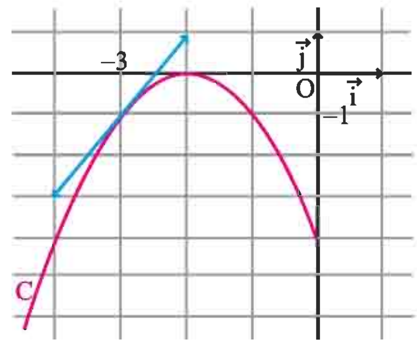
Activité 1

Le plan est muni d'un repère orthogonal $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

On a tracé la courbe C d'une fonction f dérivable en –3.
La tangente à C au point d'abscisse –3 a pour équation $y = 2x + 5$.

Répondre par vrai ou faux à chacune des affirmations ci-dessous.

a. $f'(-3) = 5$. b. $f(-3) = 5$. c. $f'(-3) = 2$.

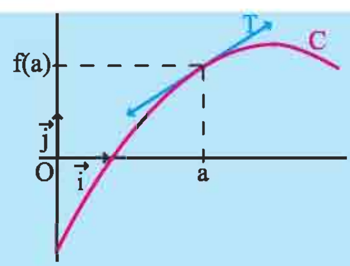


Equation de la tangente (rappel)

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et C sa courbe dans un repère orthogonal $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

Soit a un réel de I.
Si f est dérivable en a, alors C admet au point $A\left(a, f(a)\right)$ une tangente T de coefficient directeur $f'(a)$ et d'équation $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.

Le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ f'(a) \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de T.

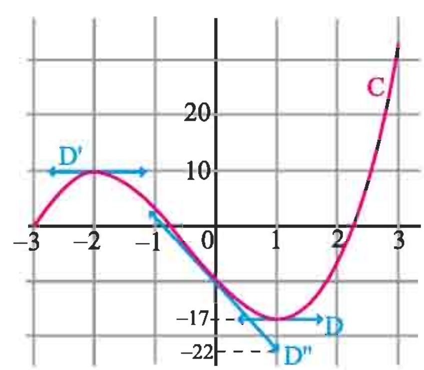


Activité 2

Le plan est muni d'un repère orthogonal $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

Soit f une fonction définie dans l'intervalle]–3, 3 [.
On a tracé sa courbe C ainsi que les tangentes D, D′ et D″ à C aux points d'abscisses 1, –2 et 0.

1. Déterminer graphiquement $f'(1)$, $f'(-2)$ et $f'(0)$.
2. Déterminer une équation de chacune des droites D, D′ et D″.



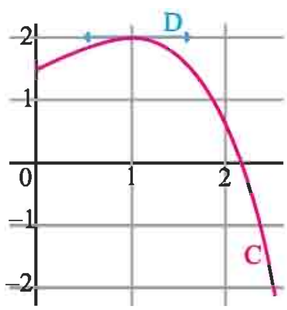
Activité 3

Dans chacun des cas suivants, la courbe C est la représentation graphique d'une fonction f dérivable en a et D est la tangente à la courbe au point d'abscisse a.

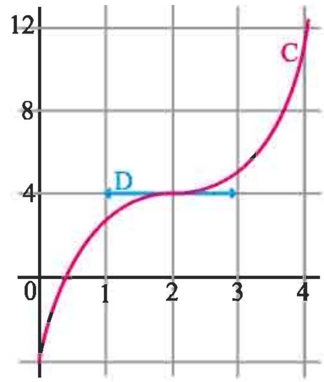
a. Déterminer graphiquement $f'(a)$.

b. Déterminer une équation de la tangente D.

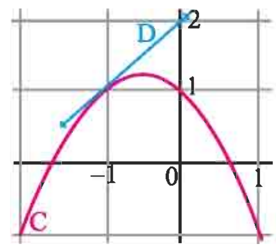
1. $a = 1$.



2. $a = 2$.



3. $a = -1$.



Cours

2. Fonction dérivée

Nous rappelons la définition d'une fonction dérivable et les règles de calculs concernant les dérivées des fonctions usuelles.

Définition

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle ouvert I.
On appelle fonction dérivée de f et on note f', la fonction qui à tout réel x de I, associe le nombre dérivé $f'(x)$.

Règles de calcul

$x \mapsto f(x)$	$x \mapsto f'(x)$
$x \mapsto a, \quad I = \mathbb{R}$.	$x \mapsto 0, \quad I = \mathbb{R}$.
$x \mapsto ax + b, \quad I = \mathbb{R}$.	$x \mapsto a, \quad I = \mathbb{R}$.
$x \mapsto x^n, \quad n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}, \; I = \mathbb{R}$.	$x \mapsto nx^{n-1}, \; I = \mathbb{R}$.
$x \mapsto \frac{1}{x}, \; I =]0, +\infty[$ ou $I =]-\infty, 0[$.	$x \mapsto -\frac{1}{x^2}, \; I =]0, +\infty[$ ou $I =]-\infty, 0[$.
$x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d}, \quad ad - bc \neq 0$, $I = \left]-\infty, -\frac{d}{c}\right[$ ou $I = \left]-\frac{d}{c}, +\infty\right[$.	$x \mapsto \frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$, $I = \left]-\infty, -\frac{d}{c}\right[$ ou $I = \left]-\frac{d}{c}, +\infty\right[$.

Activité 1

Dans chacun des cas ci-dessous, déterminer l'ensemble de définition et la dérivée de la fonction f.

1. $f : x \mapsto -2x + 4$. 2. $f : x \mapsto x^{2008}$. 3. $f : x \mapsto \frac{2x-1}{3x+4}$. 4. $f : x \mapsto \frac{1}{x-2}$.

Opérations sur les fonctions dérivées

Le théorème ci-dessous énonce les opérations sur les fonctions dérivées.

Théorème

Si f et g sont deux fonctions dérivables sur un intervalle ouvert I, alors les fonctions $f+g$, αf et fg sont dérivables sur $I\ (\alpha \in \mathbb{R})$. De plus,

• $(f+g)' = f' + g'$. • $(\alpha f)' = \alpha f'$. • $(fg)' = f'g + g'f$.

Activité 2

Dans chacun des cas ci-dessous, déterminer la dérivée de la fonction f.

1. $f : x \mapsto 5x^2 - 4x + 4$.
2. $f : x \mapsto -3x + 1 + \dfrac{2}{x}$.
3. $f : x \mapsto x^4\left(x - 4x^3\right) + 5$.
4. $f : x \mapsto \dfrac{3}{2}x^2(4 - 3x)$.

Activité 3

Dans chacun des cas ci-dessous, déterminer l'ensemble de définition et la dérivée de la fonction f.

1. $f : x \mapsto 2x + 5 - \dfrac{5}{x+2}$.
2. $f : x \mapsto \dfrac{2x-1}{x+1} + x^2 - 2$.

Activité 4

Le plan est muni d'un repère orthogonal $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

On désigne par C la courbe de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{3x+1}{x-2}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Calculer $f'(3)$.
3. Déterminer une équation de la tangente à C au point d'abscisse 3.

Activité 5

La population $P(t)$ d'une certaine ville dans t années est donnée par $P(t) = 3000 - t^2 + 70t$, $t \in [0\ ,\ 80]$.

Le taux de croissance instantané à l'instant t de la population P(t) est égal à P'(t).

1. Quelle est la population de la ville actuellement ?
   Que sera-t-elle dans 10 ans ?
2. Calculer $P'(t)$, $t \in]0, 80[$.
3. Que sera le taux de croissance instantané de la population à $t = 10$?
4. A quelle année le taux de croissance instantané sera-t-il de 30 habitants par année ?

3. Sens de variation – Extrema.

Activité 1

Le plan est muni d'un repère orthogonal $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

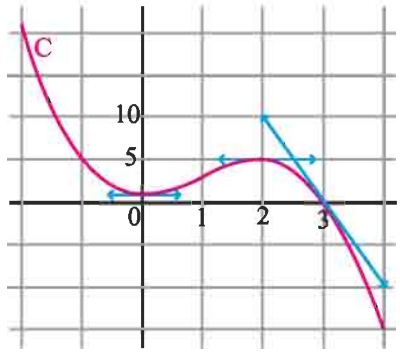
On a tracé ci-contre, la courbe d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $]-2\ ,\ 4[$.

Déterminer graphiquement,

a. $f'(0)$, $f'(2)$ et $f'(3)$,

b. le sens de variation de f dans chacun des intervalles $]-2\ ,\ 0[$, $]0\ ,\ 2[$ et $]2\ ,\ 4[$,

c. le signe de la fonction f', dans chacun des intervalles précédents.



Théorème (rappel)

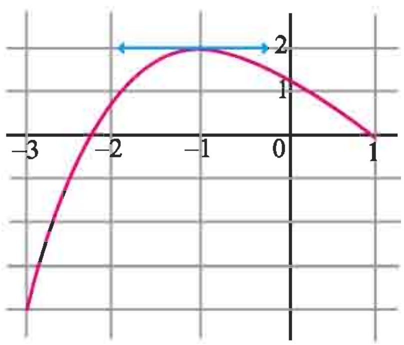
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I.
La fonction f est constante sur I, si et seulement si, pour tout réel x de I, $f'(x)=0$.
La fonction f est croissante sur I, si et seulement si, pour tout réel x de I, $f'(x)\geq 0$.
La fonction f est décroissante sur I, si et seulement si, pour tout réel x de I, $f'(x)\leq 0$.

Activité 2

Le plan est muni d'un repère orthogonal $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

On a tracé ci-contre, la courbe d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $]-3\ ,\ 1[$.

1. Déterminer le sens de variation de f.
2. Déterminer le signe de f'.
3. Déterminer $f(-1)$ et $f'(-1)$.
4. Déterminer l'extremum local de f.



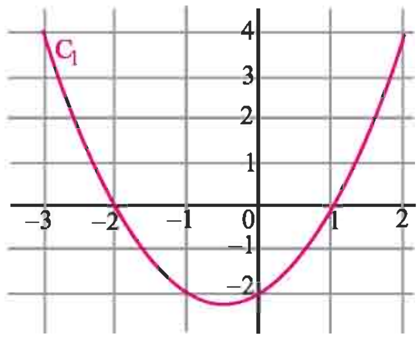
Théorème (rappel)

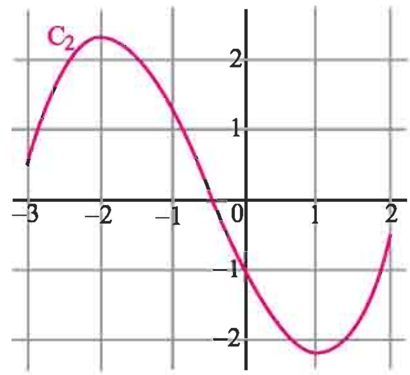
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I, et a un élément de I.
Si f admet un extremum local en a, alors $f'(a)=0$.

Activité 3

Le plan est muni d'un repère orthogonal $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

On a représenté ci-après, la fonction f ainsi que sa dérivée f'.
Identifier la courbe de f.





Activité 4

Le périmètre d'un terrain rectangulaire est égal à 40 m.

On désigne par x l'une des deux dimensions de ce terrain.

1. Montrer que l'aire du terrain est égale à $x(20-x)$.
2. On considère la fonction $x \mapsto x(20-x)$, $x \in]0, 20[$.

a. Etudier les variations de f.

b. En déduire les dimensions du rectangle ayant la plus grande aire.

Activité 5

On considère la fonction $f : x \mapsto x - \dfrac{2}{x}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Déterminer les intervalles sur lesquels f est dérivable et expliciter $f'(x)$.
3. Déterminer les variations de f.

Activité 6

Un grossiste vend du tissu. Il estime que pour une commande de x mètres le coût $c(x)$ total en dinars est donné par $c(x) = 0.3x + \dfrac{3000}{x} + 200$, $x \in]10, 500[$.

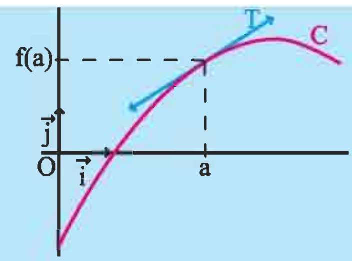
1. Calculer $c'(x)$, $x \in]10, 500[$.
2. Etudier le signe de c' sur $]10, 500[$.
3. Quel est le sens de variation de c ?
4. Quelle doit être la taille d'une commande pour que le coût total soit minimal ?
   Quel est ce coût ?

Equation de la tangente

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et C sa courbe dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Soit a un réel de I.
Si f est dérivable en a, alors C admet au point $A(a, f(a))$ une tangente T de coefficient directeur $f'(a)$ et d'équation $y = f'(a)(x-a) + f(a)$.

Le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ f'(a) \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de T.



Règles de calcul

$x \mapsto f(x)$	$x \mapsto f'(x)$
$x \mapsto a$, $I = \mathbb{R}$.	$x \mapsto 0$, $I = \mathbb{R}$.
$x \mapsto ax + b$, $I = \mathbb{R}$.	$x \mapsto a$, $I = \mathbb{R}$.
$x \mapsto x^n$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, $I = \mathbb{R}$.	$x \mapsto nx^{n-1}$, $I = \mathbb{R}$.
$x \mapsto \frac{1}{x}$, $I =]0, +\infty[$ ou $I =]-\infty, 0[$.	$x \mapsto -\frac{1}{x^2}$, $I =]0, +\infty[$ ou $I =]-\infty, 0[$.
$x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d}$, $ad - bc \neq 0$, $I = \left]-\infty, -\frac{d}{c}\right[$ ou $I = \left]-\frac{d}{c}, +\infty\right[$.	$x \mapsto \frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$, $I = \left]-\infty, -\frac{d}{c}\right[$ ou $I = \left]-\frac{d}{c}, +\infty\right[$.

Théorème

Si f et g sont deux fonctions dérivables sur un intervalle ouvert I, alors les fonctions $f + g$, αf et fg sont dérivables sur I (α étant un réel). De plus,

• $(f+g)' = f' + g'$. • $(\alpha f)' = \alpha f'$. • $(fg)' = f'g + g'f$.

Théorème

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I, et a un élément de I.
Si f admet un extremum local en a, alors $f'(a) = 0$.

Exercice 1

Le plan est muni d'un repère orthogonal $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

Dans chacun des cas suivants, déterminer la dérivée de la fonction f puis donner l'équation de la tangente à sa courbe au point d'abscisse a indiqué.

1. $f : x \mapsto -4$; $a = 3$.
2. $f : x \mapsto 3x + 5$; $a = 2$.
3. $f : x \mapsto 5x^2 - 4x - 4$; $a = -2$.
4. $f : x \mapsto \frac{3}{2}x^2(x-6)$; $a = 1$.
5. $f : x \mapsto -2x^4 - 4x^2 + 1$; $a = 1.5$.

Exercice 2

Le plan est muni d'un repère orthogonal $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

Dans chacun des cas suivants, déterminer la dérivée de la fonction f puis donner l'équation de la tangente à sa courbe au point d'abscisse a indiqué.

1. $f : x \mapsto \frac{3}{4x}$; $a = 1$.
2. $f : x \mapsto \frac{1}{x+1} - 2$; $a = 0$.
3. $f : x \mapsto \frac{3x+3}{3+2x}$; $a = -1$.
4. $f : x \mapsto \frac{2}{x} - x$; $a = \frac{-1}{3}$.

Exercice 3

Le plan est muni d'un repère orthogonal $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

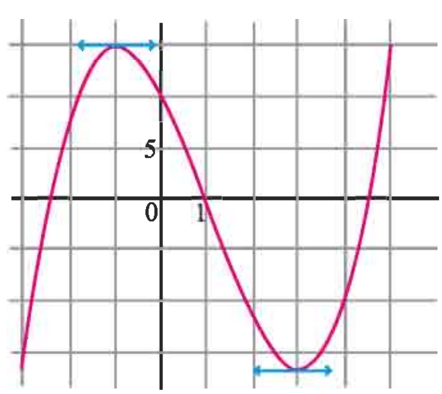
On a tracé ci-contre, la courbe d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $]-3, 5[$.

déterminer graphiquement,

a. $f'(-1)$ et $f'(3)$,

c. les variations de f ,

d. le signe de f'.

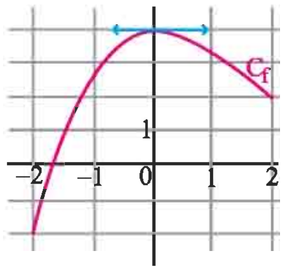


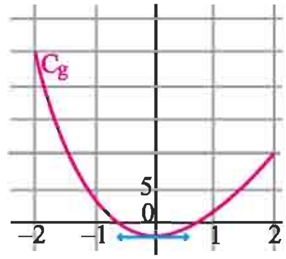
Exercice 4

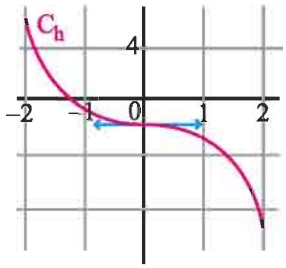
Le plan est muni d'un repère orthogonal $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

Les courbes ci-après représentent des fonctions f, g et k dérivables sur $]-2, 2[$.

On a représenté pour chaque fonction la tangente à sa courbe au point d'abscisse 0.



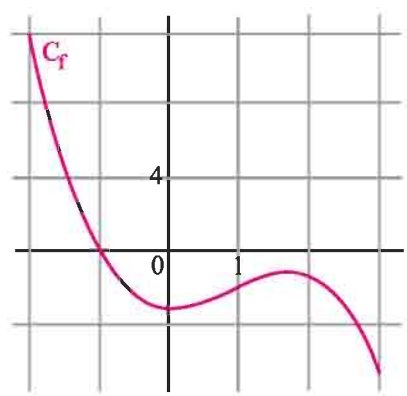


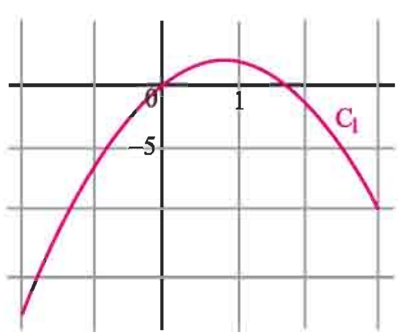


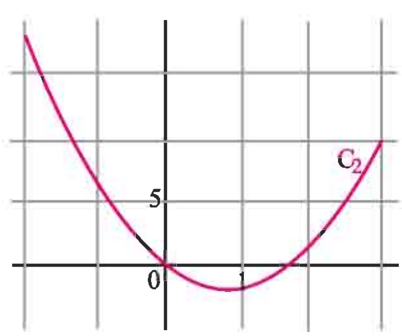
1. Déterminer graphiquement, $f'(0)$, $g'(0)$ et $k'(0)$
2. Quelles sont les fonctions qui présentent un extremum local en 0 ?
3. a. Déterminer le signe de f'.
   b. Déterminer le signe de g'.
   c. Déterminer le signe de h'.

Exercice 5

Le plan est muni d'un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
On a tracé ci-contre la courbe d'une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$.
On a tracé ci-dessous, deux courbes C_1 et C_2.
L'une de ces courbes est la représentation graphique de la fonction f'.
Déterminer la courbe en question.



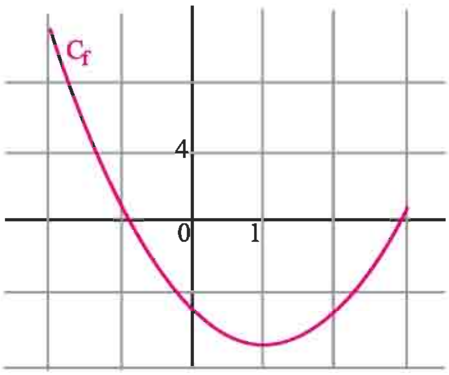


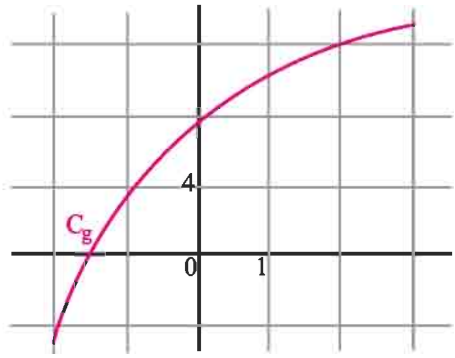


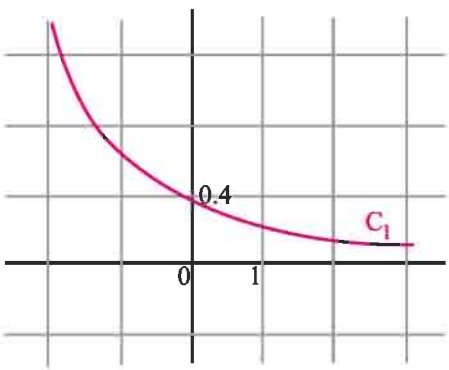
Exercice 6

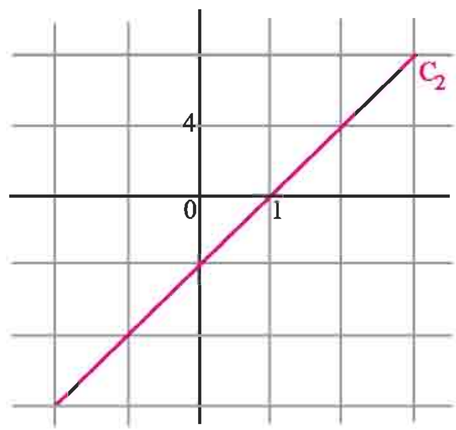
On a représenté les fonctions f et g ainsi que leurs fonctions dérivées f' et g'.

Identifier pour chaque fonction la courbe de sa fonction dérivée.









Exercice 7

1. On considère la fonction $f : x \mapsto 3x^2 - 2008$.
   a. Expliciter $f'(x)$.
   b. Etudier les variations de f .
   c. Préciser les extrema locaux éventuels de f.
2. Reprendre la question 1. dans chacun des cas ci-dessous.
   a. $f : x \mapsto x^2 - 4x + 2$.
   b. $f : x \mapsto x^3 - 2x^2 + 2$.
   c. $f : x \mapsto x^4 + 6$.
   d. $f : x \mapsto -x^4 - 2x^2$.

Exercice 8

1. On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{2}{x+1}$.
   a. Déterminer l'ensemble de définition de f.
   b. Déterminer les intervalles sur lesquels f est dérivable et expliciter $f'(x)$.
   c. Etudier les variations de f .
2. Reprendre la question 1. dans chacun des cas ci-dessous.
   a. $f : x \mapsto 1 - \dfrac{3}{x-2}$.
   b. $f : x \mapsto \dfrac{x+5}{3x-6}$.
   c. $f : x \mapsto \dfrac{2}{x+1} - 3$.

Exercice 9

On considère la fonction $f : x \mapsto x + \dfrac{4}{x+1}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Déterminer les intervalles sur lesquels f est dérivable et expliciter $f'(x)$.
3. Etudier les variations de f.
4. Préciser les extrema locaux de f.

Exercice 10

1. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x+20)(90-x)$.
   a. Etudier les variations de la fonction f .
   b. En déduire la valeur x_0, pour laquelle $f(x_0)$ est un maximum de la fonction f.
   Calculer $f(x_0)$.
2. Une compagnie loue des bateaux d'excursions en mer dont la capacité est de 80 personnes à des groupes de 20 personnes ou plus. Si un groupe compte exactement 20 personnes, chacune d'elles doit payer 90^D. Pour les groupes plus nombreux, le tarif est réduit de 1^D pour chaque personne qui s'ajoute aux 20 premières.
   Soit n le nombre de personnes s'ajoutant aux 20 premières d'un groupe.
   a. Vérifier que $f(n)$ est le revenu de la compagnie (en dinars) en fonction de n.
   b. Quel est le revenu de la compagnie pour une excursion de 30 personnes ?
   c. Quel est le revenu de la compagnie pour une excursion de 75 personnes ?
   d. Déterminer le nombre du groupe qui rapporte un revenu maximal à la compagnie.

Exemples de fonctions polynômes

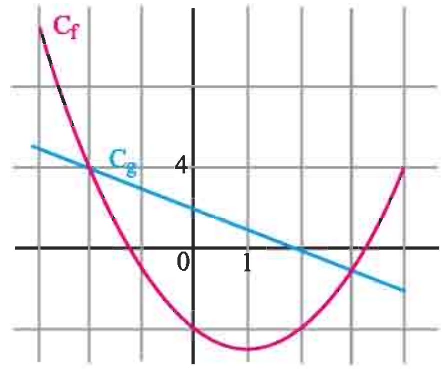
Chapitre 2

Euler (1707-1783) définit une fonction d'une quantité variable comme " une expression analytique composée d'une manière quelconque de cette quantité variable et de nombres ou de quantités constantes". En fait Euler donne une classification des fonctions en deux types: algébriques (fonctions rationnelles et irrationnelles), transcendantes (fonctions trigonométriques, logarithmes, exponentielles, puissances).

Vérifier vos acquis

Chapitre 2 Exemples de fonctions polynômes

Activité 1



Dans le plan muni d'un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on a tracé une droite D et la courbe d'une fonction f définie sur $[-3, 4]$.

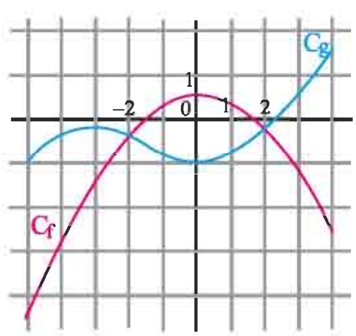
1. Vérifier que D a pour équation $y = -x + 2$.
2. Déterminer les variations de f.
3. Déterminer $f(-2)$ et $f(3)$.
4. Résoudre graphiquement $f(x) > -x + 2$.

Activité 2

Résoudre dans $\mathbb{R}$.

a. $x^2 - 2x - 8 = 0$ b. $x^2 - 2x - 8 \geq 0$. c. $x^2 - 4 \leq 0$.

Activité 3



Dans le plan muni d'un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on a tracé les courbes C_f et C_g des fonctions f et g définies sur $[-5, 4]$.

Pour quelles valeurs de x, $f(x) < g(x)$?

1. limites à l'infini d'une fonction polynôme

Activité

Calculer les limites ci-dessous.

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2$.
2. $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(-5x^3 + 5x^2 - 2x - 9\right)$.
3. $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{4}x^4 - 2x^2\right)$.
4. $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(3x^2 - 5x\right)$.
5. $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(-x^2 + 2x - 1000\right)$.
6. $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(6x^4 + 3x^3 - 2x^2 + 4\right)$.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par
$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$.
Nous donnons ci-dessous les limites de f en l'infini, suivant la parité de n et le signe de a_n.

n pair et $a_n > 0$	$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.
n pair et $a_n < 0$	$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.
n impair et $a_n > 0$	$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.
n impair et $a_n < 0$	$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.

2. Fonctions polynômes de degré 2

Activité 1

Une balle est lancée en l'air. La distance $f(t)$ (en mètre) qui sépare la balle du sol après t secondes de son lancement, est donnée par $f(t) = -3t^2 + 6\,t + 9$, $t \in [0,\ 3]$.

1. Interpréter $f(0)$ et $f(3)$.
2. Etudier les variations de f.
3. Tracer la courbe représentative de f dans un repère orthogonal.
4. A quel instant la balle atteint-elle la hauteur maximale ?

Activité 2

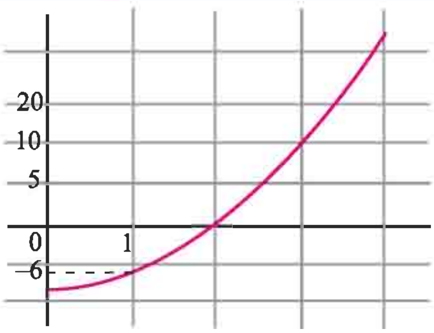
Le plan est muni d'un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Soit f une fonction paire définie sur $\mathbb{R}$ et C_f sa courbe.

On a représenté ci-contre les points de C_f d'abscisses positives.

1. Déterminer $f(-3)$, $f(-2)$ et $f(-1)$.
2. Reproduire la courbe donnée et achever le tracé de C_f.
3. Donner le sens de variation de f.

Le plan est muni d'un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
Soit f une fonction définie sur un ensemble D tel que si x appartient à D alors −x appartient à D.
La fonction f est paire, si et seulement si, sa courbe représentative est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées du repère.



Activité 3

Le plan est muni d'un repère orthogonal $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 - 8$ et C_f sa courbe.

Plan d'étude d'une fonction polynôme
- Calculer des limites à l'infini.
- Déterminer la dérivée.
- Déterminer le signe de la dérivée.
- Dresser le tableau de variation et préciser les extrema éventuels.

1. Déterminer f' et étudier son signe.
2. Dresser le tableau de variation de f.
3. Donner une équation de la tangente D à C_f au point d'abscisse 1.
4. a. Vérifier que 2 et –2 sont les solutions de l'équation $f(x) = 0$.
   b. En déduire les coordonnées des points d'intersection A et B de la courbe C_f avec l'axe des abscisses.
5. Placer les points A et B, tracer la tangente D et la courbe C_f.
6. Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) < 0$.

Activité 4

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x + \frac{3}{2}$ et C_f sa courbe dans un repère orthogonal $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1. Déterminer f' et étudier son signe.
2. Dresser le tableau de variation de f.
3. Donner une équation de la tangente T à C_f au point d'abscisse 4.
4. Tracer la tangente T puis la courbe C_f.
5. a. Tracer la droite D d'équation $y = 2x + 2$.
   b. Résoudre graphiquement dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = 2x + 2$.
   c. Résoudre graphiquement $f(x) > 2x + 2$.

Activité 5

La quantité d'algues (en grammes) présente dans un aquarium, dans x jours, est donnée par $q(x) = -2x^2 + 16x + 48$, $x \in \left]0, 10\right[$.

1. Que représentent $q(1)$? $q(6)$?
2. Calculer $q'(x)$.
3. Etudier le signe de q' sur $\left]0, 10\right[$.
4. Déterminer les variations de q.
5. Au bout de combien de jours la quantité d'algues sera-t-elle maximale ?
   Que vaut cette quantité ?

3. Etude de fonctions polynômes de degré 3

Activité 1

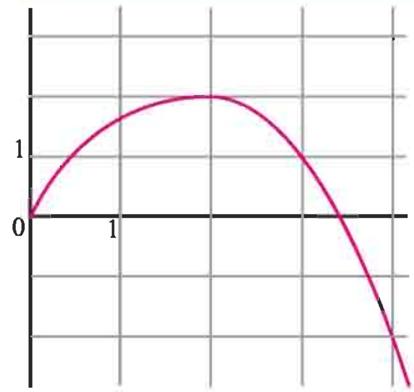
Le plan est muni d'un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Soit f une fonction impaire définie sur $\mathbb{R}$ et C_f sa courbe.

On a représenté ci-contre les points de C_f d'abscisses positives.

1. Déterminer $f(-1)$, $f(-2)$ et $f(-3)$.
2. Reproduire la courbe donnée et achever le tracé de C_f.
3. Donner le sens de variation de f.

Le plan est muni d'un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
Soit f une fonction définie sur un ensemble D tel que si x appartient à D alors −x appartient à D.
La fonction f est impaire, si et seulement si, sa courbe représentative est symétrique par rapport à l'origine du repère.



Activité 2

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{2}{3}x^3$ et C_f sa courbe dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Déterminer f' et étudier son signe.
2. Dresser le tableau de variation de f.
3. a. Vérifier que la droite T d'équation $y = 0$ est tangente à la courbe C_f en O.
   b. Etudier la position de C_f par rapport à la droite T.
4. Tracer T et C_f.

Activité 3

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + 2x$ et C_f sa courbe dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Déterminer f' et étudier son signe.
2. Dresser le tableau de variation de f.
3. Soit T la tangente à C_f au point d'abscisse 0.

a. Vérifier que T a pour équation $y = 2x$.

b. Etudier la position de C_f par rapport à la droite T.

4. Tracer T et C_f.

Activité 4

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=-\frac{1}{3}x^3-x^2+3x+2$ et C_f sa courbe dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. a. Vérifier que $f'(x)=-x^2-2x+3$.

   b. Résoudre $f'(x)=0$.

   c. Montrer que $f'(x)>0$, si et seulement si, $x\in]-3\ ,\ 1[$.
2. Etudier les variations de f.
3. Soit T la tangente à C_f au point d'abscisse 0.

   Vérifier que T a pour équation $y=3x+2$.
4. Tracer T et C_f.
5. a. Résoudre graphiquement $f(x)=-\frac{1}{3}x+2$.

   b. Résoudre graphiquement $f(x)\geq-\frac{1}{3}x+2$.

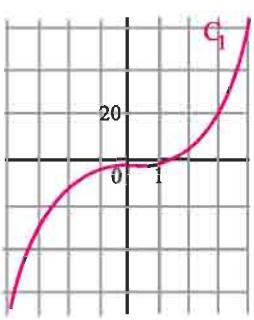
Activité 5

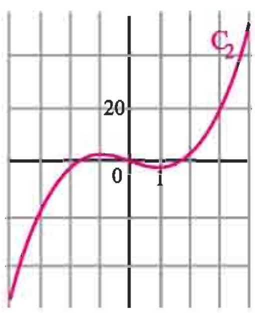
Le plan est muni d'un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

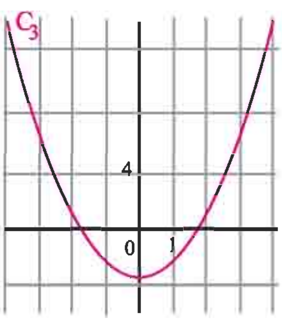
On a représenté les fonctions f, g et h définies sur $\mathbb{R}$ par

$f(x)=x^2-3$; $g(x)=x^3-3$ et $h(x)=x^3-3x$.

Associer à chaque fonction sa courbe représentative.







Activité 6

On a montré que le nombre de bactéries dans une culture donnée, t heures après le début de l'expérience est $N(t)=24t(t^2+3t)+1000$, $t\in]0,\ 25[$.

1. Calculer $N'(t)$.

2. Déterminer le sens de variation de N.
3. Recopier et compléter le tableau ci-contre.

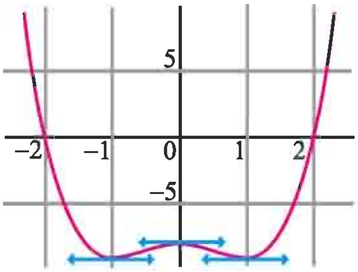
t	5	6	7	8	9	10
$N(t)$						

4. Déterminer une valeur approchée à 1 heure près du temps nécessaire pour que le nombre de bactéries dans la culture soit supérieur à
   a. 5000, b. 8000, c. 25000.

4. Etude de fonctions polynômes de la forme $x \mapsto ax^4 + bx^2 + c$

Activité 1

Le plan est muni d'un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On a représenté ci-contre, la courbe C de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^4 - 2x^2 - 8$.



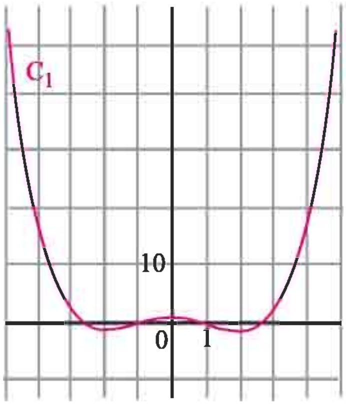
1. Dresser le tableau de variation de f.
2. Préciser l'intersection de C avec l'axe des ordonnées et avec l'axe des abscisses.
3. Résoudre graphiquement
a. $f(x) < 0$, b. $f(x) \geq 5$, c. $f(x) \geq -9$.

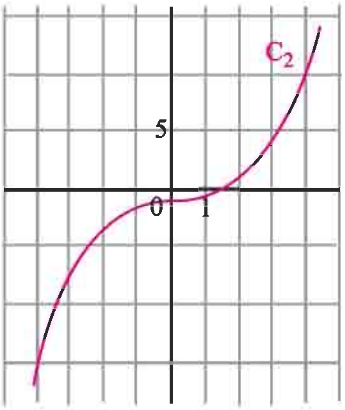
Activité 2

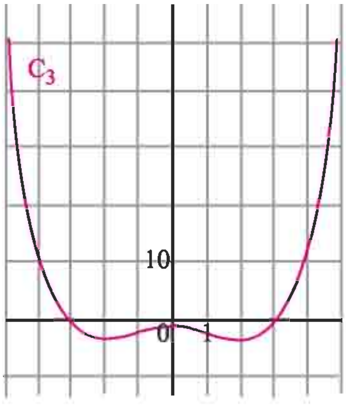
Le plan est muni d'un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

On a tracé ci-dessous, trois courbes C_1, C_2 et C_3. L'une de ces courbes est la représentation graphique de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{8}x^4 - x^2 - 1$.

Déterminer la courbe en question.

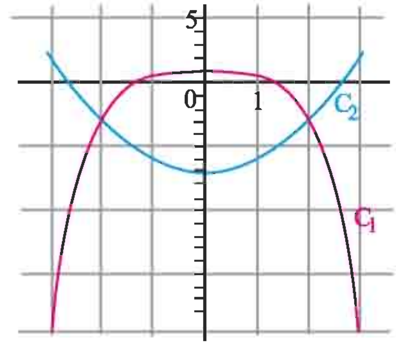






Exemples de fonctions polynômes

Activité 3



Le plan est muni d'un repère orthogonal $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.
On a représenté ci-contre, C_f et C_g les courbes des fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par
$f(x) = -\frac{1}{4}x^4 + 1$ et $g(x) = x^2 - 7$.

1. Reconnaître chacune des deux courbes.
2. a. Déterminer graphiquement les coordonnées des points communs à C_f et C_g.
   b. Etudier la position relative de C_f et C_g.
3. Résoudre $f(x) < g(x)$.

Activité 4

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -\frac{1}{4}x^4 + 2x^2 + 12$ et C_f sa courbe dans un repère orthogonal $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1. Montrer que $f'(x) = -x(x-2)(x+2)$.
2. Montrer que $f'(x) > 0$, si et seulement si, $x \in \left]-\infty, -2\right[\cup \left]0, 2\right[$.
3. Calculer les images par f des réels $-2,\ 0,\ 2$.
4. Dresser le tableau de variation de f.
5. Tracer C_f.
6. Résoudre graphiquement,

a. $f(x) < 0$; b. $f(x) = 12$; c. $f(x) = 17$; d. $f(x) = 5$.

Activité 5

Un météorologiste affirme, que dans sa ville, la température (en °C), une après midi de printemps, peut être évaluée approximativement à l'aide de la fonction T définie par
$T(t) = -\frac{t^4}{1000} + \frac{9t^2}{500} + 26$ où t est le nombre d'heures qui se sont écoulées depuis midi et $0 < t < 8 0$.

1. Montrer que $T'(t) = -\frac{t}{250}(t-3)(t+3)$.
2. Dresser le tableau de variation de T.
3. Tracer la courbe de T dans un repère orthogonal.
4. A quel moment de l'après midi, la température est-elle maximale ?
   que vaut cette température ?

Limites à l'infini d'une fonction polynôme

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$.

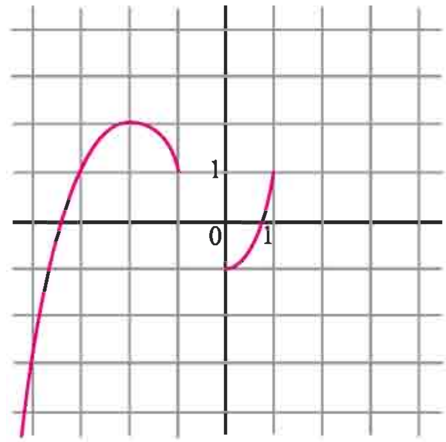
Nous donnons ci-dessous les limites de f en l'infini, suivant la parité de n et le signe de a_n.

n pair et $a_n > 0$	$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.
n pair et $a_n < 0$	$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.
n impair et $a_n > 0$	$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.
n impair et $a_n < 0$	$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.

Plan d'étude d'une fonction polynôme

- Calculer les limites à l'infini.
- Déterminer la dérivée.
- Déterminer le signe de la dérivée.
- Dresser le tableau de variation et préciser les extrema éventuels.

Exercice 1

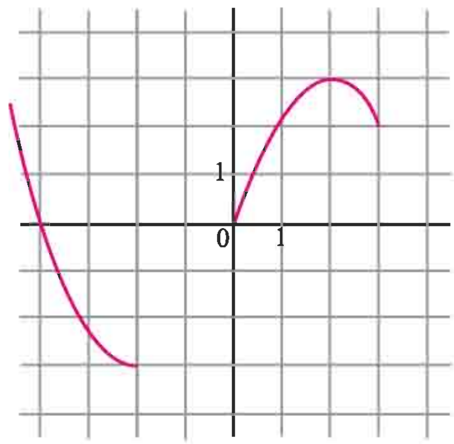


Le plan est muni d'un repère orthogonal $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

On désigne par C_f la représentation graphique d'une fonction f paire définie sur $\mathbb{R}$.

1. Reproduire la courbe donnée et achever le tracé de C_f.
2. Donner le sens de variation de f.

Exercice 2



Le plan est muni d'un repère orthogonal $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

On désigne par C_g la représentation graphique d'une fonction g impaire définie sur $\mathbb{R}$.

1. Reproduire la courbe donnée et achever le tracé de C_g.
2. Donner le sens de variation de g.

Exercice 3

Calculer les limites ci-dessous.

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-3x^2+10x\right)$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(20x^3-2008x^2-1000\right)$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{100}x^4-100x^3\right)$.
2. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-30x^2+100x\right)$; $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(3x^4-20x^2-1\right)$; $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-3x^3+3x^2-3x+3\right)$.

Exercice 4

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=2x^2+x-10$.

1. a. Déterminer la fonction dérivée de f.
   b. Dresser le tableau de variation de f.
2. Résoudre $f(x)=0$.
3. Représenter la courbe de f dans un repère orthogonal $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.
4. Résoudre graphiquement, $2x^2+x=-10$; $2x^2+x=20$.
5. a. Tracer la droite d'équation $y=2x$ dans le repère.
   b. Résoudre graphiquement, $f(x)\geq 2x$; $f(x)\leq 2x$.

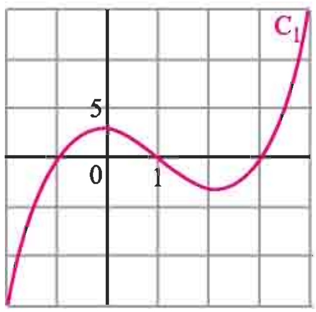
Exercice 5

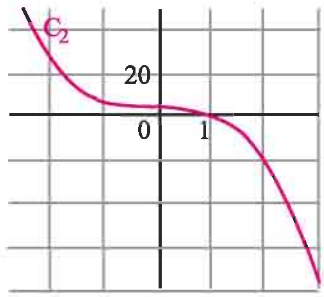
Le plan est muni d'un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

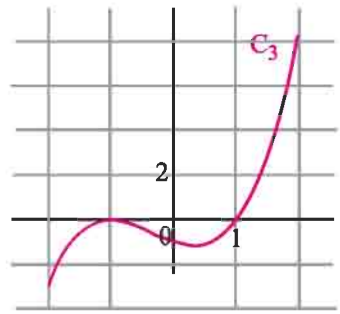
On a représenté les fonctions f , g et h définies sur $\mathbb{R}$ par

$f(x) = -3x^3 + 3$, $g(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3$ et $h(x) = x^3 + x^2 - x - 1$.

1. Associer à chaque fonction sa courbe représentative.







2. Résoudre graphiquement

a. $f(x) = 0$, b. $g(x) = 0$, c. $h(x) = 0$.

Exercice 6

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 6x^3 + x + 1$.

1. a. Calculer $f'(x)$.

   b. Dresser le tableau de variation de f.
2. Représenter la courbe de f dans un repère orthogonal.
3. Résoudre graphiquement

   a. $f(x) = 0$, b. $f(x) > 0$, c. $f(x) < 0$.
4. Résoudre graphiquement

   a. $6x^3 + x = 4$, b. $6x^3 + x = -3$.

Exercice 7

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 2$.

1. a. Calculer $f'(x)$.

   b. Résoudre $f'(x) = 0$.

   c. Dresser le tableau de variation de f et préciser les extrema de f.
2. Représenter la courbe de f dans un repère orthogonal.
3. En déduire les courbes représentatives des fonctions

   a. $g : x \mapsto -2x^3 - 3x^2 + 12x - 2$ b. $h : x \mapsto 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1$.

Exercices

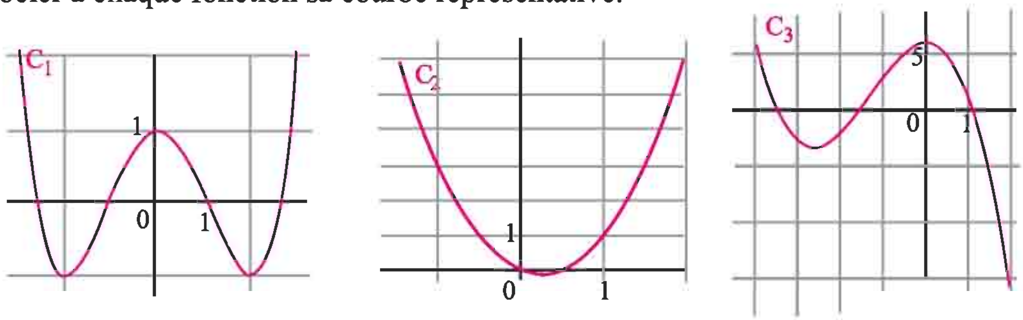
Exercice 8

Le plan est muni d'un repère orthogonal $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

On a représenté les fonctions f, g et h définies sur $\mathbb{R}$ par

$f(x)=2x^2-x$, $g(x)=-x^3-4x^2+6$ et $h(x)=2x^4-4x^2+1$.

1. Associer à chaque fonction sa courbe représentative.



2. Déterminer graphiquement, le nombre de solution(s) de chacune des équations
a. $f(x)=0$, b. $g(x)=0$, c. $h(x)=0$.

Exercice 9

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^4-2x^2+1$ et C_f sa courbe dans un repère orthogonal $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1. a. Montrer que $f'(x)=4x(x-1)(x+1)$.
   b. Etudier le signe de $f'(x)$ dans chacun des intervalles $]-\infty\ ,\ -1[$; $]-1,\ 0[$; $]0\ ,\ 1[$ et $]1,\ +\infty[$.
   c. Calculer les images par f des réels -1 et 1.
   d. Dresser le tableau de variation de f.
2. Tracer C_f.
3. a. Dresser alors le tableau de variation de la fonction $g : x \mapsto -x^4+2x^2-1$.
   b. Tracer la courbe de la fonction g.

Exercice 10

1. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t)=-20t^4+550t^2+10000$.
a. Déterminer la fonction dérivée de f.
b. Dresser le tableau de variation de f.
2. Une compagnie d'électricité se propose de prévoir, pendant un jour d'hiver, la demande d'électricité $d(t)$ (en mégawatts), en fonction du temps (en heures) entre 18 :00 et 00 : 00.

   On suppose que cette demande d(t) vérifie la relation $d(t)=-20t^4+550t^2+10000$ où $0 \leq t \leq 6$.
   a. A quel moment la demande d'électricité devrait –elle atteindre son maximum ?
   b. Donner une estimation de ce maximum.

Exemples de fonctions homographiques

Chapitre 3

"Dans l'introduction de son livre, Al-Tusi donnait déjà :
- L'équation de la parabole par rapport à deux axes perpendiculaires dont l'un est l'axe de la parabole et l'autre est la tangente au sommet de la parabole.
- L'équation de l'hyperbole par rapport à deux axes perpendiculaires dont l'un est l'axe de l'hyperbole et l'autre est la tangente au sommet de l'hyperbole.
- L'équation d'une hyperbole équilatère par rapport à ses asymptotes.

Pour résoudre l'équation proposée […]. Al-Tusi démontre que les deux coniques se coupent […]."

(R.Rashed, Entre Arithmétique et Algèbre, 1984, p.177)

Chapitre 3

Exemples de fonctions homographiques

Vérifier vos acquis

Activité

Indiquer la bonne réponse

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x-1}{x-2} =$

a. $+\infty$ b. -2 c. 2

2. $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x-3}{-x+3} =$

a. -1 b. 0 c. $-\infty$

3. $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{2x+3}{x-1} =$

a. 2 b. 5 c. $+\infty$

4. On désigne par C la courbe de la fonction f dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
La droite d'équation $x = 3$ est une asymptote à C pour

a. $f : x \mapsto \dfrac{x-3}{x-1}$ b. $f : x \mapsto \dfrac{3x+3}{x+3}$ c. $f : x \mapsto \dfrac{2x+3}{x-3}$.

5. On désigne par C la courbe de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{-3x+2}{-x+2}$ dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
C admet pour asymptote la droite d'équation

a. $y = 2$ b. $y = 3$ c. $y = -3$.

1. Ensemble de définition

Activité

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations ci–dessous.

$x+5=0$; $-x-2=0$; $-2x+0.3=0$.

2. En déduire l'ensemble de définition de chacune des fonctions ci-dessous.

$f : x\ x \mapsto \dfrac{x+1}{x+5}$;

$g : x \mapsto \dfrac{1}{-x-2}$;

$h : x \mapsto \dfrac{x+1}{-2x+0.3}$.

Soit a, b, c et d des réels tels que $c \neq 0$ et $ad-bc \neq 0$.

La fonction $x \mapsto \dfrac{ax+b}{cx+d}$ est appelée fonction homographique et est définie sur $\left]-\infty, -\dfrac{d}{c}\right[\cup \left]-\dfrac{d}{c}, +\infty\right[$.

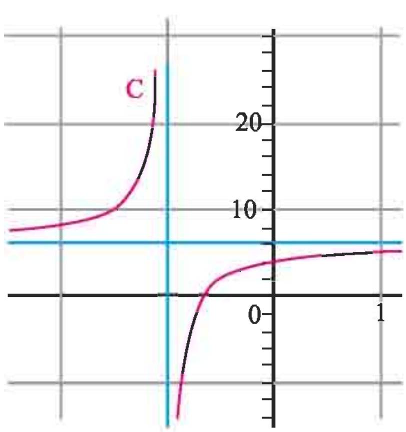
2. Asymptotes

Activité 1

Le plan est muni d'un repère orthogonal $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

La courbe C tracée ci-dessous, représente une fonction homographique f, définie sur $]-\infty, -1[\cup]-1, +\infty[$.

Les droites d'équations $x=-1$ et $y=6$ sont des asymptotes à C.



Donner les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

Soit a, b, c et d des réels tels que $c \neq 0$ et $ad-bc \neq 0$.

On considère la fonction homographique $f : x \mapsto \dfrac{ax+b}{cx+d}$ et on désigne par C_f sa courbe dans un repère orthogonal $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

Alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \dfrac{a}{c}$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \dfrac{a}{c}$.

On dit que la droite d'équation $y=\dfrac{a}{c}$ est une asymptote à la courbe C_f au voisinage de l'infini.

- Si $ad-bc>0$, alors

$$\lim_{x\to -\frac{d}{c}^-} f(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to -\frac{d}{c}^+} f(x) = -\infty.$$

- Si $ad-bc<0$, alors

$$\lim_{x\to -\frac{d}{c}^-} f(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to -\frac{d}{c}^+} f(x) = +\infty.$$

On dit que la droite d'équation $x=-\dfrac{d}{c}$ est une asymptote à la courbe C_f au voisinage de $-\dfrac{d}{c}$.

Activité 2

Le plan est muni d'un repère orthogonal $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

On considère les fonctions $f : x \mapsto \dfrac{2x-2}{2x+4}$ et $g : x \mapsto \dfrac{-x+2}{x+2}$.

Répondre par vrai ou faux aux affirmations ci-dessous.

1. a. La droite d'équation $x = -2$ est une asymptote à la courbe de f
   b. La droite d'équation $y = -1$ est une asymptote à la courbe de f.
   c. La courbe de f coupe l'axe des abscisses au point d'abscisse 2.
2. a. La droite d'équation $x = -2$ est une asymptote à la courbe de g
   b. La droite d'équation $y = -1$ est une asymptote à la courbe de g.
   c. La courbe représentative de g coupe l'axe des abscisses au point d'abscisse 2.

3. Etude et représentation graphique d'une fonction homographique

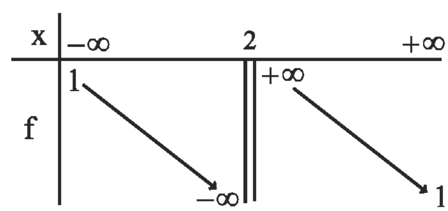
Activité 1

Pour chacun des cas suivants, calculer $f'(x)$ et donner son signe, puis donner l'équation de la tangente au réel a indiqué.

1. $f : x \mapsto \dfrac{x}{x+1}$; $a = 0$. 2. $f : x \mapsto \dfrac{-x+2}{x+1}$; $a = 1$. 3. $f : x \mapsto \dfrac{-x}{2x+1}$; $a = -1$.

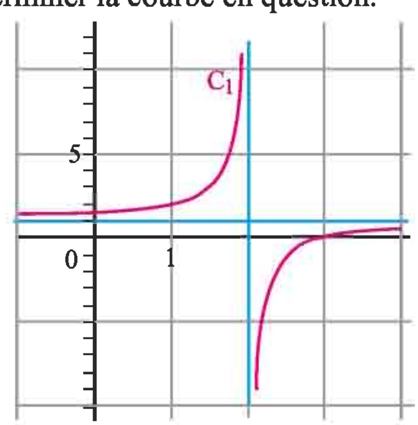
Activité 2

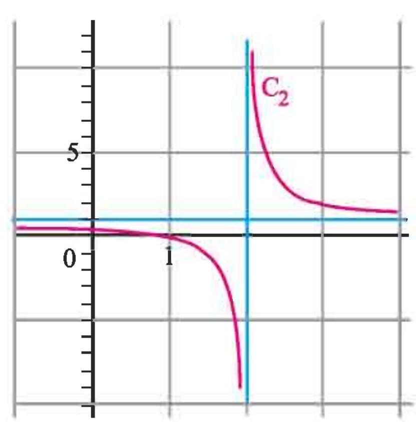
On a dressé ci-contre le tableau de variation d'une fonction homographique f.



1. Donner l' ensemble de définition de f.
2. Donner les équations des asymptotes à la courbe de f dans un repère orthogonal.
3. On a tracé ci-après, deux courbes C_1 et C_2.

   L'une de ces courbes est la représentation graphique de la fonction f.
   Déterminer la courbe en question.





Activité 3

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{2x}{x+1}$ et on désigne par C_f sa courbe dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

> **Plan d'étude d'une fonction homographique**
> - Déterminer l'ensemble de définition.
> - Calculer les limites aux bornes de l'ensemble de définition.
> - Déterminer la dérivée.
> - Déterminer le signe de la dérivée.
> - Dresser le tableau de variation.

1. a. Déterminer l'ensemble de définition de f

   b. Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition .

2. a. Calculer $f'(x)$.

   b. Dresser le tableau de variation de f.

3. a. Tracer C_f et la droite D d'équation $y = 2x - 1$.

   b. La droite D coupe C_f en deux points.
   Déterminer graphiquement les coordonnées de ces points.

Activité 4

1. On considère la fonction $f : t \mapsto \dfrac{5}{t+2}$.

   a. Déterminer l'ensemble de définition de f.

   b. Déterminer les asymptotes à la courbe de f dans un repère orthogonal.

   c. Calculer $f'(t)$ et en déduire son signe.

   d. Dresser le tableau de variation de f.

2. La quantité d'un médicament (en milligrammes) qui reste dans le sang après t heures est donnée par $M(t) = \dfrac{5}{t+2}$, $t \geq 0$.

   a. Quelle est la quantité de médicament à $t = 0$?

   b. Quelle sera cette quantité après 1 heure ?

   c. Dans combien d'heures cette quantité sera-t-elle réduite de moitié ?

   d. Décrire dans un tableau l'évolution de la quantité de médicament .

   e. Le réel $|M'(t)|$ représente le taux d'assimilation du médicament.

   A partir de quelle heure le taux d'assimilation sera-t-il de 0.2mg par cm^3 ?

Cours

Activité 5

1. On considère la fonction $P : t \mapsto \dfrac{2t+1}{t+1}$.

a. Déterminer l'ensemble de définition de P.

b. Déterminer les asymptotes à la courbe représentative de P dans un repère orthogonal.

c. Calculer $P'(t)$ et en déduire son signe.

d. Dresser le tableau de variation de P.

2. Un zoologiste estime que pour les douze années à venir, à compter d'aujourd'hui la population d'une certaine espèce d'insectes sera donnée par $Q(t) = 3600\left(\dfrac{2t+1}{t+1}\right)$, où t désigne le nombre d'années et $Q(t)$ désigne le nombre d'individus.

a. Quelle est la population actuelle ?

b. Décrire dans un tableau l'évolution de la population.

c. Le réel $Q'(t)$ représente le rythme de croissance (en individus par année) de cette espèce.

Dans combien d'années le rythme de croissance sera-t-il de 2500 individus par an ? 900 individus par an ?

Activité 6

On considère les fonctions $f : x \mapsto \dfrac{x-2}{x}$ et $g : x \mapsto x^2 - 2x$.

On désigne par C_f et C_g leurs courbes dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. a. Déterminer l'ensemble de définition de f.

b. Déterminer les asymptotes à C_f.

c. Déterminer $f'(x)$ et dresser le tableau de variation de f.

d. Calculer $f(1)$ et $f(2)$. Tracer C_f.

2. Etudier les variations de g et tracer C_g dans le même repère.

3. Résoudre graphiquement $f(x) = g(x)$ puis $f(x) < g(x)$.

Soit a, b, c et d des réels tels que $c \neq 0$ et $ad - bc \neq 0$.

On considère la fonction homographique $f : x \mapsto \dfrac{ax+b}{cx+d}$ et on désigne par C_f sa courbe dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \dfrac{a}{c}$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \dfrac{a}{c}$.

On dit que la droite d'équation $y = \dfrac{a}{c}$ est une asymptote à la courbe C_f au voisinage de l'infini.

- Si $ad - bc > 0$, alors $\lim\limits_{x \to -\frac{d}{c}^-} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\frac{d}{c}^+} f(x) = -\infty$.
- Si $ad - bc < 0$, alors $\lim\limits_{x \to -\frac{d}{c}^-} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\frac{d}{c}^+} f(x) = +\infty$.

On dit que la droite d'équation $x = -\dfrac{d}{c}$ est une asymptote à la courbe C_f au voisinage de $-\dfrac{d}{c}$.

Plan d'étude d'une fonction homographique

- Déterminer l'ensemble de définition.
- Calculer les limites aux bornes de l'ensemble de définition.
- Déterminer la dérivée.
- Déterminer le signe de la dérivée.
- Dresser le tableau de variation.

Exercice 1

1. On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{3-x}{2x}$.

   a. Déterminer l'ensemble de définition de f.

   b. Déterminer la fonction dérivée de f.

   c. Dresser le tableau de variation de f .

   d. Préciser les asymptotes à la courbe de f dans un repère orthogonal.

2. Reprendre la question 1. dans chacun des cas ci-dessous.

   a . $f : x \mapsto \dfrac{2x}{x-3}$. b. $f : x \mapsto \dfrac{2x+4}{x-3}$.

   c. $f : x \mapsto \dfrac{-x}{x+3}$. d. $f : x \mapsto \dfrac{2}{x}-5$.

Exercice 2

1. On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{-3}{2x}$.

   a. Déterminer l'ensemble de définition de f.

   b. Déterminer la fonction dérivée de f.

   c. Dresser le tableau de variation de f .

   d. Tracer sa courbe ainsi que ses asymptotes dans un repère orthogonal.

2. Reprendre la question 1. dans chacun des cas ci-dessous.

   a. $f : x \mapsto \dfrac{-3+x}{2x}$. b. $f : x \mapsto \dfrac{-x+1}{2-x}$.

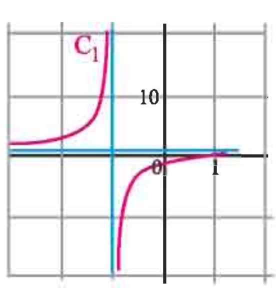
   c. $f : x \mapsto \dfrac{5-2x}{x-3}$. d. $f : x \mapsto 1-\dfrac{x}{2x+4}$.

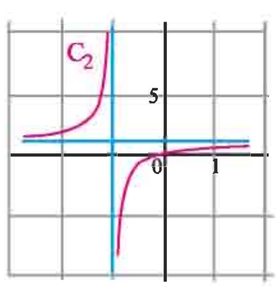
Exercice 3

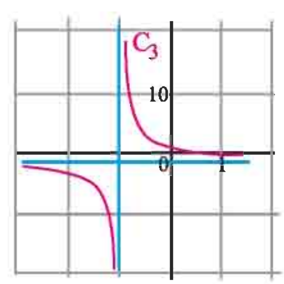
Le plan est muni d'un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

On a représenté les fonctions $f : x \mapsto 1-\dfrac{1}{x+1}$; $g : x \mapsto \dfrac{x-1}{x+1}$ et $h : x \mapsto \dfrac{1-x}{x+1}$.

Associer à chaque fonction sa courbe représentative.







Exercice 4

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

On désigne par C la courbe de la fonction définie sur $]0, +\infty[$.

par $f(x) = \frac{2}{x}$.

1. Tracer la courbe C.

2. Soit M un point de C d'abscisse x , P le point de coordonnées $(x, 0)$ et N le point cordonnées $\left(0, \frac{2}{x}\right)$.

a. Placer les points M, N et P dans chacun des cas suivants.

$x = 1$; $x = 2$; $x = 5.5$.

b. Calculer l'aire du rectangle OPMN.

Exercice 5

Soit la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x+2}$ et C_f sa courbe dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Etudier les variations de f .

2. Déterminer les asymptotes de C_f.

3. a. Quelle est l'intersection de C_f avec chacun des axes du repère ?

b. Tracer C_f.

4. On considère la fonction $g : x \mapsto \frac{x+3}{x+2}$.

a. Vérifier que pour tout $x \neq -2$, $g(x) = 1 + f(x)$.

b. Tracer la courbe de g.

c. Dresser le tableau de variation de la fonction g.

Exercice 6

Soit la fonction $f : x \mapsto \frac{-2x+1}{x-1}$ et C_f sa courbe dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Etudier les variations de f .

2. Déterminer les asymptotes de C_f.

3. a. Calculer $f(0)$, $f\left(\frac{1}{2}\right)$, $f\left(-\frac{1}{2}\right)$ et $f(-1)$.

b. Quelle est l'intersection de C_f avec chacun des axes du repère ?

c. Tracer C_f.

4. Soit D la droite d'équation $y = x - \frac{1}{2}$.

a. Tracer D.

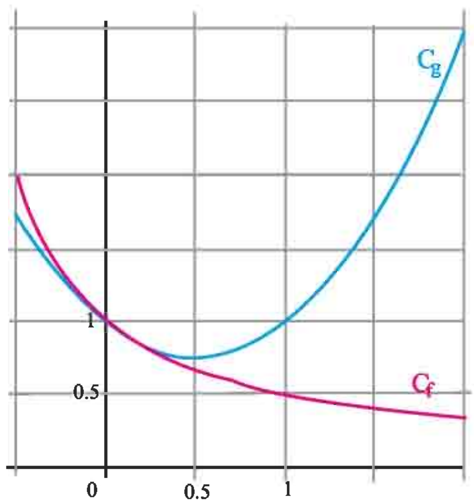
b. Résoudre graphiquement $f(x) < x - \frac{1}{2}$.

c. Vérifier que les tangentes à C_f aux points d'abscisses respectives 0 et 2 sont parallèles à D. Tracer ces tangentes.

Exercice 7

On considère les fonctions f et g définies sur $]-0.5, 2[$ par $f(x) = \frac{1}{x+1}$ et $g(x) = x^2 - x + 1$.

On a tracé ci-contre leurs courbes dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.



1. a. Résoudre graphiquement $f(x) = g(x)$.

   b. Calculer $f(0)$ et $g(0)$.

   c. Résoudre $f(x) < g(x)$.

2. Déterminer les variations de f et g.

3. a. Déterminer une équation de la tangente D à C_f au point d'abscisse 0.

   b. Vérifier que D est aussi la tangente à C_g au point d'abscisse 0.

4. a. Utiliser la calculatrice pour compléter le tableau suivant par des valeurs approchées à 10^{-4} près.

x	– 0.1	– 0.05	– 0.01	– 0.001	0.001	0.01	0.05	0.1
$f(x)$								
$g(x)$								

   b. Vérifier que pour chaque valeur du tableau, $g(x)$ est une valeur approchée de $f(x)$ à 10^{-2} près.

Exercice 8

On considère les fonctions $f : x \mapsto -\frac{2}{x}$ et $g : x \mapsto x^3 - 3x$ et on désigne par C_f et C_g leurs courbes dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Etudier les variations de f.
2. Etudier les variations de g.
3. a. Calculer $f(1)$ et $g(1)$.

b. Déterminer une équation de la tangente D à C_f au point d'abscisse 1.

c. Déterminer une équation de la tangente D' à C_g au point d'abscisse 1.

d. Tracer les droites D et D' puis C_f et C_g.

4. Résoudre graphiquement $f(x) = g(x)$ puis $f(x) < g(x)$.

Exercice 9

On considère les fonctions $f : x \mapsto \frac{2x}{x+1}$ et $g : x \mapsto \frac{-x}{x-1}$ et on désigne par C_f et C_g leurs courbes dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Etudier les variations de chacune des fonctions f et g.
2. Déterminer une équation des tangentes à C_f et à C_g au point O.
3. Tracer dans le même repère C_f et C_g.
4. Résoudre graphiquement, $\frac{2x}{x+1} \geq \frac{-x}{x-1}$.

Exercice 10

On considère la fonction $f : t \mapsto 2 - \frac{1}{1+t}$ et on désigne par C sa courbe dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. a. Déterminer les asymptotes à C.

b. Calculer $f'(t)$ et en déduire son signe.

c. Dresser le tableau de variation de f.

d. Tracer C et sa tangente D au point d'abscisse 3.

2. En faisant réagir deux substances chimiques A et B on obtient un produit E dont la quantité (en grammes) en fonction du temps (en minutes) est égale à $f(t)$ pour $t \geq 0$.

a. Quelle est la quantité du produit pour $t = 0$?

b. Quel est le taux de production instantané à l'instant $t_0 = 3$?

c. Dans combien d'heures cette quantité sera-t-elle de 1.5 g ?

Fonction logarithme népérien

Chapitre 4

M.Stifel (1544) met en évidence les deux suites

$\cdots$	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	$\cdots$	8
$\cdots$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	0	1	4	8	16	$\cdots$	256

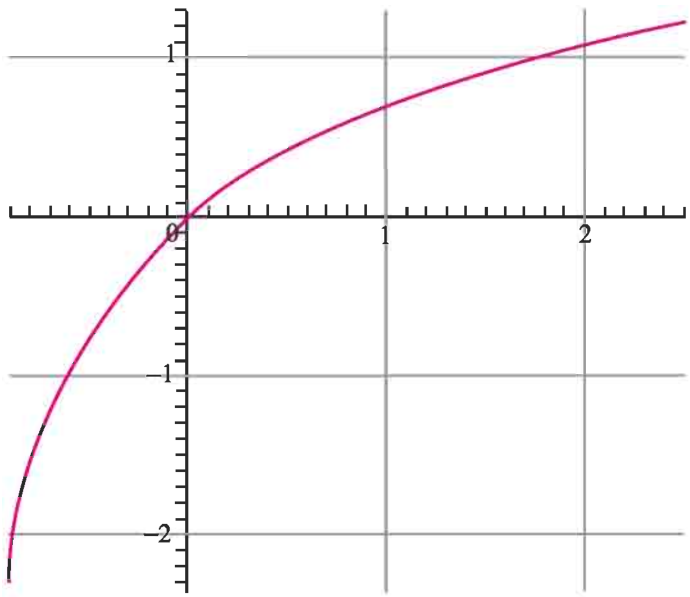
Le passage de la ligne inférieure ("in inferiore ordine") à la ligne supérieure ("in superioreordine") transforme les produits en sommes. Par exemple, au lieu de multiplier 8 par 32 "in inferiore ordine", on peut prendre les "logarithmes" correspondants 3 et 5 "in superioreordine", calculer leur somme, qui est 8, retourner "in inferiore ordine", où l'on trouve le produit 8.32=256. Cette table plus détaillée, serait d'une grande utilité, car additionner est plus facile que multiplier. Les premières tables logarithmiques […] ont été calculées par John Napier (1614, 1619), Henry Briggs (1624) et Jost Burgi (1620).

(E.Haier et al,L'analyse au fil de l'histoire, 2000).

Chapitre 4 Fonction logarithme népérien

Activité

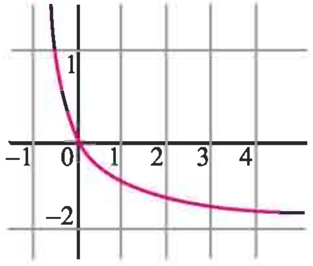
On désigne par f la fonction dérivable sur $]-1,+\infty[$ représentée dans le graphique ci-dessous.

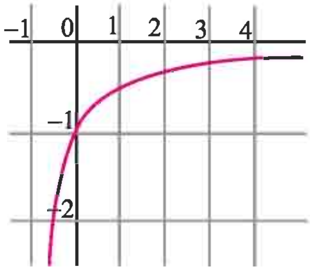


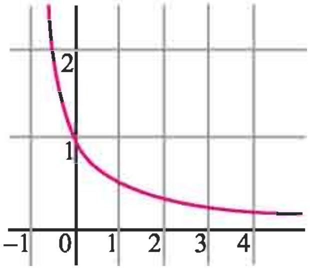
1. Donner des valeurs approchées à 10^{-1} près de $f(0)$, $f(1)$ et $f(2)$.
2. Donner une valeur approchée de l'antécédent de 1 par f.
3. Déterminer le signe de f.
4. On a tracé ci-dessous, trois courbes C_1, C_2 et C_3.

   L'une de ces courbes est la représentation graphique de la fonction dérivée de f.

   Déterminer la courbe en question.



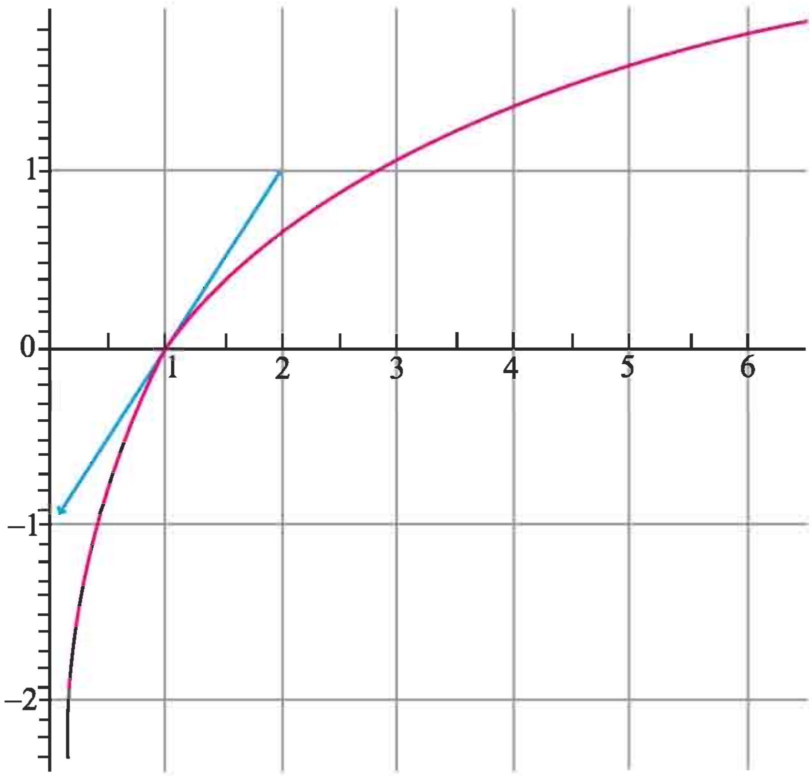




1. Définition et propriétés

Activité 1

On désigne par f la fonction dérivable sur $]0,+\infty[$ représentée dans le graphique ci-dessous.



1. Déterminer $f(1)$ et $f'(1)$.
2. Donner des valeurs approchées à 10^{-1} près de $f(2)+f(3)$ et $f(6)$ ainsi que de $f(2)+f(0.5)$ et $f(1)$.
3. Donner une valeur approchée de l'antécédent de 1 par f.
4. Déterminer le signe de f.

Activité 2

En utilisant la touche ln de votre calculatrice,

1. Calculer $\ln 1$.
2. Donner des valeurs approchées à 10^{-6} près de $\ln 0.5$; $\ln 2$; $\ln 3$; $\ln 4$; $\ln 6$.
3. Comparer $\ln 6$ et $\ln 3+\ln 2$; $\ln 1$ et $\ln 2+\ln 0.5$; $\ln 1$ et $\ln 0.1+\ln 10$.

Définition

On appelle fonction logarithme népérien, la fonction, notée ln, définie et dérivable sur $]0,+\infty[$ telle que

- $\ln 1 = 0$ et $(\ln)'(1) = 1$,
- pour tous réels strictement positifs a et b, $\ln(ab) = \ln a + \ln b$.

Activité 3

Simplifier les écritures suivantes.

$\ln 5 + \ln 2 - \ln 10$; $\ln 0.25 + \ln 4$; $\ln 0.05 + \ln 0.04 + \ln 500$.

Activité 4

Soit la fonction $\ln : x \mapsto \ln x$.

1. Montrer que pour tout réel strictement positif a, $\ln 1 = \ln a + \ln\left(\frac{1}{a}\right)$.

   En déduire que pour tout réel strictement positif a, $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln a$.

2. Montrer que pour tous réels strictement positifs a et b, $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a + \ln\left(\frac{1}{b}\right)$.

   En déduire que pour tous réels strictement positifs a et b, $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$.

3. Montrer que pour tout réel strictement positif a,

$\ln\left(a^2\right) = 2\ln a$; $\ln\left(a^3\right) = 3\ln a$; $\ln\left(a^4\right) = 4\ln a$.

Propriétés

- Pour tout réel strictement positif a, $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln a$.
- Pour tous réels strictement positifs a et b, $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$.
- Pour tout réel strictement positif a et tout entier n, $\ln\left(a^n\right) = n\ln a$.

Activité 5

Simplifier les écritures suivantes.

$\ln 0.0001 - \ln 10000$; $\ln 4000 - \ln 0.00025$;

$\ln\left(2^2\right) - \ln\left(2^3\right) + \ln 0.5$; $\ln\left(5^2\right) + \ln\left(5^{-6}\right) + \ln\left(5^4\right)$.

2. Etude et représentation graphique de la fonction logarithme népérien

2.1. Dérivée de la fonction logarithme népérien

Théorème

La fonction logarithme népérien est dérivable sur $]0, +\infty[$ et pour tout réel strictement positif x, $(\ln)'(x) = \dfrac{1}{x}$.

Activité 1

Soit la fonction $\ln : x \mapsto \ln x$.

Calculer $(\ln)'(1)$, $(\ln)'(2)$, $(\ln)'(3)$, $(\ln)'(0.5)$, $(\ln)'(0.01)$ et $(\ln)'(0.025)$.

Activité 2

Soit la fonction $\ln : x \mapsto \ln x$.

1. Déterminer son sens de variation.
2. Utiliser la touche ln de la calculatrice pour compléter le tableau suivant (on donnera des valeurs approchées).

x	10^{-50}	10^{-20}	10^{-10}	10	10^{20}	10^{50}
$\ln x$						

Que peut-on conjecturer sur $\ln x$ lorsque x tend vers $+\infty$?

Que peut-on conjecturer sur $\ln x$ lorsque x tend vers 0 et $x > 0$?

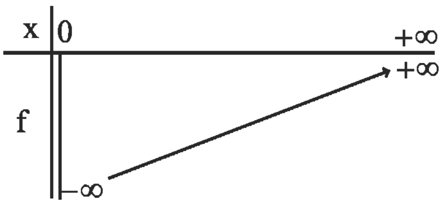
2.2. Tableau de variation et courbe représentative

Théorème

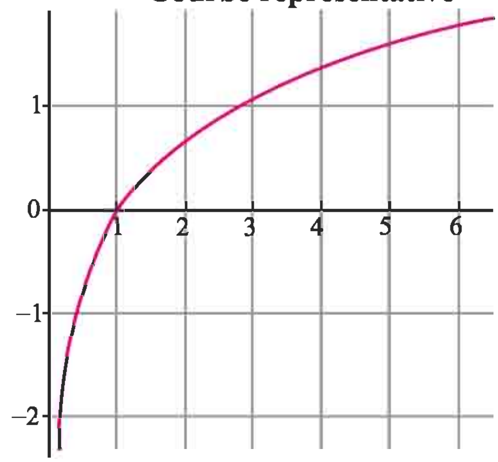
La fonction logarithme népérien est strictement croissante sur $]0, +\infty[$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$.

Tableau de variation



Courbe représentative

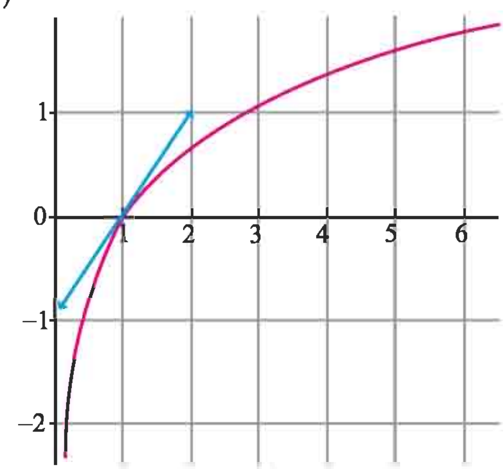


Activité 3

Le plan est muni d'un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

On a tracé la courbe C de la fonction logarithme népérien et la tangente T à C au point d'abscisse 1.

1. Résoudre graphiquement,
   a. $\ln x = 0$;
   b. $\ln x < 0$; $\ln x > 0$.
2. Donner une équation de T.
3. Etudier la position relative de C et T.



Théorème

Soit x et y deux réels strictement positifs.

- $\ln x = \ln y$, si et seulement si, $x = y$. • $\ln x = 0$, si et seulement si, $x = 1$.
- $\ln x < \ln y$, si et seulement si, $x < y$.
- $\ln x < 0$, si et seulement si, $x < 1$. • $\ln x > 0$, si et seulement si, $x > 1$.

Activité 4

Utiliser la calculatrice pour donner une valeur approchée à 10^{-6} près de

$\ln 2$; $\ln 2.5$; $\ln 2.71$; $\ln 2.7182$; $\ln 2.718281$.

Il existe un unique réel strictement positif, noté e tel que $\ln e = 1$.

Une valeur approchée à 10^{-9} près de e est 2.718281828.

Activité 5

1. Calculer

$\ln\left(\frac{1}{e}\right)$; $\ln\left(e^3\right)-\ln e$; $4\ln e-\ln\left(\frac{1}{e}\right)$.

2. Déterminer la valeur exacte du réel x dans chacun des cas suivants.

$\ln x=2$; $\ln x=4$; $\ln x=0.5$.

Activité 6

Un capital de 10000 dinars est placé à intérêts composés annuels de 3%.

1. Vérifier que la valeur acquise (en dinars) par ce capital au bout de n années est donnée par $V_n=10000(1.03)^n$.
2. On se propose de déterminer le nombre d'années n_0 nécessaire pour que la valeur acquise par le capital soit supérieure à 15000 dinars ?
   a. Vérifier que n_0 vérifie $(1.03)^{n_0}\geq\frac{15000}{10000}$.
   b. En déduire que $n_0\ln 1.03\geq\ln 1.5$.
   c. Vérifier, à l'aide de la calculatrice, que $n_0\geq 13.7$. Puis donner la valeur de n_0.

3. Fonctions du type $x\mapsto\ln(ax+b)$

Activité 1

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations ci–dessous.

   $2x>0$; $x+5>0$; $-3x+6>0$.

2. En déduire les réels x pour lesquels
   a. $\ln(2x)$ existe. b. $\ln(x+5)$ existe. c. $\ln(-3x+6)$ existe.

Soit a et b deux réels.

- Si $a>0$, alors la fonction $x\mapsto\ln(ax+b)$ est définie sur $\left]-\frac{b}{a},+\infty\right[$.
- Si $a<0$, alors la fonction $x\mapsto\ln(ax+b)$ est définie sur $\left]-\infty,-\frac{b}{a}\right[$.

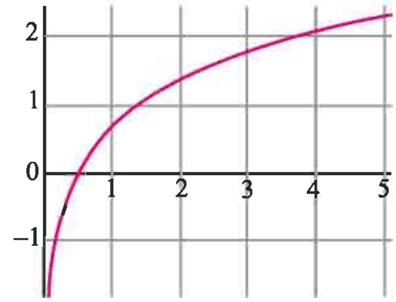
Activité 2

1. On a représenté la fonction f : $f : x \mapsto \ln(2x)$.

   a. Déterminer le sens de variation de f.

   b. Que peut-on conjecturer sur $\ln(2x)$ lorsque x tend vers $+\infty$?

   c. Que peut-on conjecturer sur $\ln(2x)$ lorsque x tend vers 0 ?

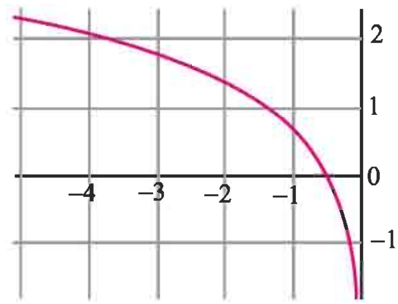


2. On a représenté la fonction g : $x \mapsto \ln(-2x)$.

   a. Déterminer le sens de variation de g.

   b. Que peut-on conjecturer sur $\ln(-2x)$ lorsque x tend vers $-\infty$?

   c. Que peut-on conjecturer sur $\ln(-2x)$ lorsque x tend vers 0 ?



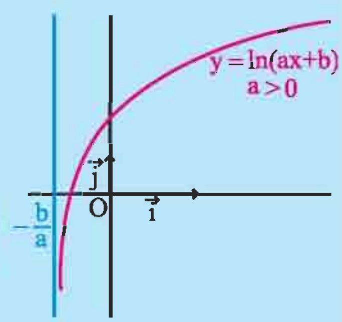
Théorème

Soit a et b deux réels et f la fonction $x \mapsto \ln(ax+b)$.

- Si $a > 0$, alors f est dérivable sur $\left]-\frac{b}{a}, +\infty\right[$ et pour tout $x > -\frac{b}{a}$,

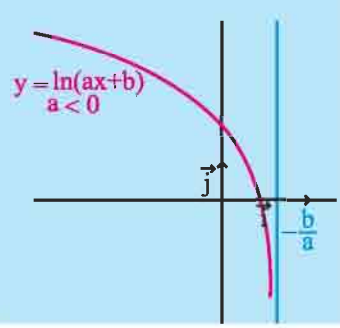
$$f'(x) = \frac{a}{ax+b},$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \; ; \; \lim_{x \to -\frac{b}{a}^+} f(x) = -\infty.$$



- Si $a < 0$, alors f est dérivable sur $\left]-\infty, -\frac{b}{a}\right[$ et pour tout $x < -\frac{b}{a}$, $f'(x) = \frac{a}{ax+b}$,

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty, \; \lim_{x \to -\frac{b}{a}^-} f(x) = -\infty.$$



Activité 3

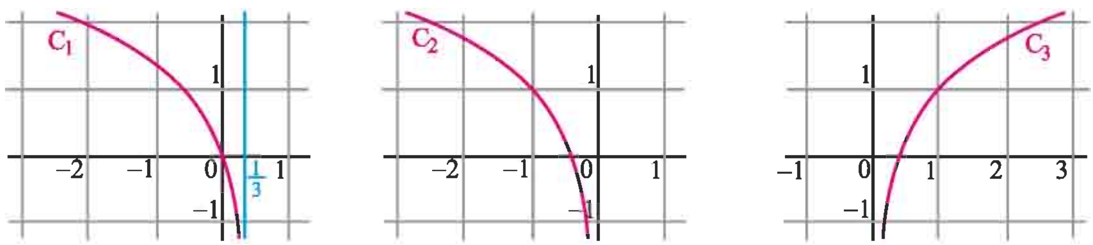
On considère les fonctions

$f\ :\ x\ \mapsto \ln(-3x+1)$; $g : x\ \mapsto \ln(3x)$ et $h : x\ \mapsto \ln(-3x)$.

1. Déterminer la fonction dérivée de chacune des fonctions f, g et h.
2. Le plan est muni d'un repère orthogonal $(O,\ \vec{i},\ \vec{j})$.

   On a représenté les fonctions f, g et h.

   Associer à chaque fonction sa courbe représentative.



Activité 4

Soit f la fonction définie sur $]1, +\infty[$ par $f(x) = \ln(2x-2)$ et C sa courbe dans un repère orthogonal $(O,\ \vec{i},\ \vec{j})$.

1. a. Déterminer f′.

   b. Déterminer $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$.

   c. Dresser le tableau de variation de f.
2. Déterminer une équation de la tangente T à C au point A d'abscisse 3.5.
3. Compléter le tableau suivant (on donnera des valeurs approchées).

x	1.5	2	3.5	4	5	6
f(x)						

4. Tracer T et C.
5. Résoudre graphiquement,

$\ln(2x-2) = 0$; $\ln(2x-2) = 1$.

Propriétés

Fonction logarithme népérien

- Pour tout réel strictement positif a, $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln a$.
- Pour tous réels strictement positifs a et b, $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$.
- Pour tout réel strictement positif a et tout entier n, $\ln\left(a^n\right) = n \ln a$.

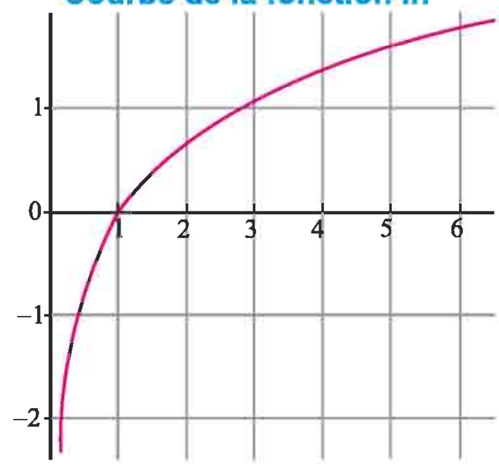
Théorème

La fonction logarithme népérien est dérivable sur $]0, +\infty[$ et pour tout réel strictement positif x, $(\ln)'(x) = \frac{1}{x}$.

Tableau de variation de la fonction ln

x	0		$+\infty$
f	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

Courbe de la fonction ln



Théorème

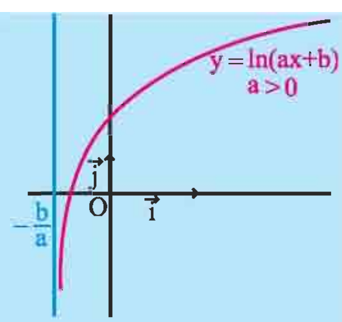
Soit a et b deux réels et f la fonction $x \mapsto \ln(ax+b)$.

- Si $a > 0$, alors

f est dérivable sur $\left]-\frac{b}{a}, +\infty\right[$ et pour tout $x > -\frac{b}{a}$,

$f'(x) = \frac{a}{ax+b}$,

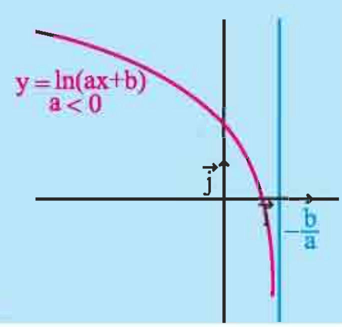
$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to -\frac{b}{a}^+} f(x) = -\infty$.



- Si $a < 0$, alors f est dérivable sur $\left]-\infty, -\frac{b}{a}\right[$ et pour

tout $x < -\frac{b}{a}$, $f'(x) = \frac{a}{ax+b}$,

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to -\frac{b}{a}} f(x) = -\infty$.



Exercice 1

Simplifier les écritures suivantes.

$\ln 10 - \ln 5$; $\ln 0.75 + \ln 4$; $\ln 9 + \ln 3 + \ln\left(\frac{1}{3}\right) + \ln\left(\frac{1}{9}\right)$;

$\ln\left(\frac{1}{2}\right) + \ln\left(\frac{2}{3}\right) + \ln 3$; $\ln 4 - \ln\left(\frac{1}{3}\right) - \ln\left(\frac{3}{4}\right)$.

Exercice 2

1. Trouver le réel x tel que $\ln(2x) = \ln 2$.
2. Trouver le réel x tel que $\ln x = -\ln e$.
3. Trouver le réel x tel que $\ln(3x) = 1$.

Exercice 3

1. Déterminer les réels x strictement positifs tels que $\ln(2x) \geq \ln 3$.
2. Déterminer les réels x strictement positifs tels que $\ln(3x) \leq \ln 2$.
3. Déterminer les réels x strictement positifs tels que $\ln x \geq 1$.

Exercice 4

Compte tenue de l'inflation, le prix d'une marchandise A augmente de 4% chaque année et celui d'une marchandise B augmente de 6% chaque année.
On suppose qu'actuellement la marchandise A coûte 100 dinars l'unité et la marchandise B coûte 50 dinars l'unité.

1. Déterminer les prix (en dinars) d'une unité de ces marchandises au bout de n années.
2. Au bout de combien d'années le prix d'une unité de la marchandise B sera-t-il supérieur à celui d'une unité de la marchandise A.

Exercice 5

Une ville compte 3000 habitants. Une étude statistique a montré que la population de cette ville diminue de 2% chaque année. On suppose que ce phénomène se poursuivra dans les années à venir.

On note P_n le nombre d'habitants de cette ville dans n années.

1. Vérifier que $P_n = 3000(0.98)^n$.
2. Au bout de combien d'années, la population de cette ville aura-telle pour la première fois un effectif inférieur à 2000 habitants ?

Exercice 6

Le plan est muni d'un repère orthogonal $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1. Tracer C_f la courbe de la fonction $f : x \mapsto \ln x$.
2. On considère la fonction $g : x \mapsto 1 + \ln x$.
   a. Calculer $g(1)$, $g(e)$, $g\left(e^2\right)$.
   b. Tracer la courbe C_g de g et donner son sens de variation.
   c. Résoudre graphiquement $g(x) = 0$, $g(x) > 0$ et $g(x) < 0$.

Exercice 7

Le plan est muni d'un repère orthogonal $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

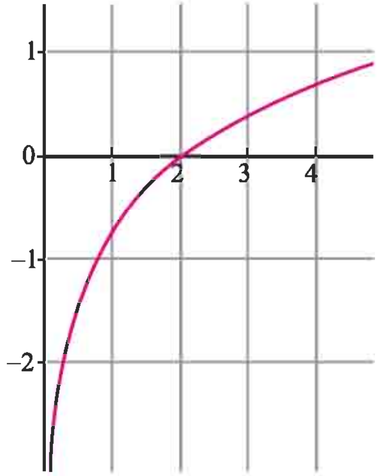
1. Tracer la courbe C_f de la fonction $f : x \mapsto -\ln x$.
2. On considère la fonction $g : x \mapsto 2 - \ln x$.
   a. Calculer $g(1)$, $g(e)$, $g\left(\frac{1}{e}\right)$.
   b. Tracer la courbe C_g de g et donner son sens de variation.
   c. Résoudre graphiquement $g(x) = 0$, $g(x) > 0$ et $g(x) < 0$.

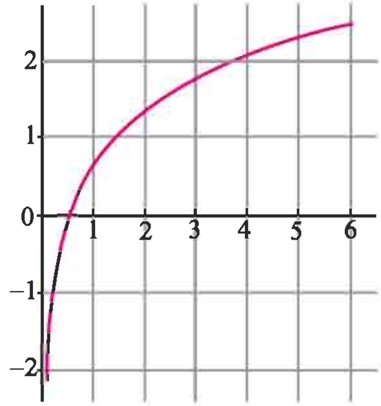
Exercice 8

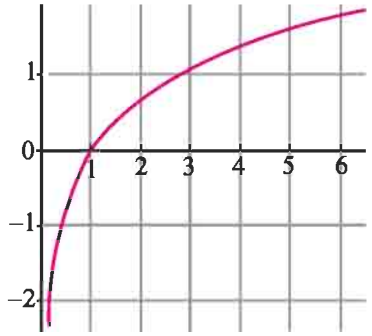
Le plan est muni d'un repère orthogonal $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

On a représenté les fonctions $f : x \mapsto \ln x$; $g : x \mapsto \ln(2x)$ et $h : x \mapsto \ln(0.5x)$.

Associer à chaque fonction sa courbe représentative.







Exercice 9

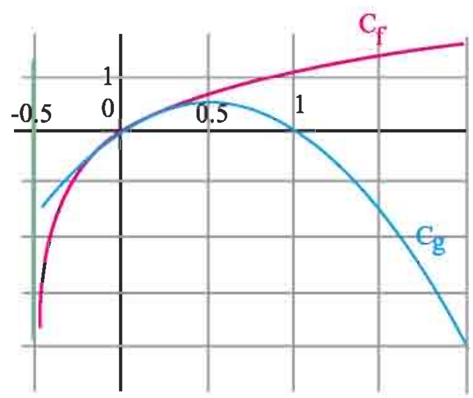
Soit la fonction $f : x \mapsto \ln(-3x+3)$ et C sa courbe dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. a. Déterminer l'ensemble de définition de f.
   b. Déterminer f'.
   c. Déterminer $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.
   d. Dresser le tableau de variation de f.
2. Tracer C.
3. Résoudre graphiquement, $\ln(-3x+3) = 0$; $\ln(-3x+3) = -1$.

Exercice 10

On considère les fonctions f et g définies sur $]-0.5, 2[$ par $f(x) = \ln(1+2x)$ et $g(x) = -2x^2 + 2x$.

On a tracé ci-contre leurs courbes dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.



1. a. Résoudre graphiquement $f(x) = g(x)$.

   b. Calculer $f(0)$ et $g(0)$.

   c. Résoudre $f(x) < g(x)$.

2. Donner les variations de f et g.

3. a. Déterminer une équation de la tangente D à C_f au point d'abscisse 0.

   b. Vérifier que D est aussi la tangente à C_g au point d'abscisse 0.

4. a. Utiliser la calculatrice pour compléter le tableau suivant par des valeurs approchées à 10^{-4} près.

x	– 0.1	– 0.05	– 0.01	– 0.001	0.001	0.01	0.05	0.1
$f(x)$								
$g(x)$								

   b. Vérifier que pour chaque valeur du tableau, $g(x)$ est une valeur approchée de $f(x)$ à 10^{-2} près.

Chapitre 5

Fonction exponentielle

Des questions telles que "Si le nombre d'habitants d'une province s'accroît tous les ans d'une trentieme, & qu'il y ait au commencement 100.000 habitants; on veut savoir combien il y en aura au bout de 100 ans ?" (Euler 1748, Introductio §110) ou "Un particulier doit 400.000 florins, dont il est convenu de payer tous les ans l'intérêt à 5 pour cent…"
En appliquant la formule du binôme, Euler dit sans la moindre hésitation, "Si N est un nombre plus grand qu'aucune quantité assignable la fraction $\left(\frac{N-1}{N}\right)$ égalera l'unité". […] si N tend vers l'infini, $\left(1+\frac{1}{N}\right)^{N}$ tend vers le nombre d'Euler e.

(E.Haier et al, L'analyse au fil de l'histoire, 2000)

Chapitre 5 Fonction exponentielle

Activité 1

Calculer

$$\frac{2^2 2^{-6}}{2^{-4}} \quad ; \quad \frac{10^{30}10^{-60}}{10^{-34}} \quad ; \quad \frac{(10^3)^{20}10^{-60}}{(10^0)^{34}}.$$

Activité 2

Simplifier les écritures ci-dessous où a, b et c sont des réels non nuls.

$$\left(a^{22}a^{-3}a^{-20}\right)^2 \quad ; \quad \left(ab^{-1}\right)^2 \times a^{-3}b^3 \quad ; \quad \frac{a^{-2}c^5}{(ac)^{-3} \times a^{-3}} \quad ;$$

$$\frac{\left(a^2b^3c\right)^2 \times a^3c^3}{(ab)^4 \times bc} \quad ; \quad \frac{\left(2a^2\right)^2 \times a^3c^4}{(ac)^4 \times a^3} \quad ; \quad \frac{\left(10a^{-1}b\right)^2 \times b^{-3}}{\left(10b^2\right)^2 \times (100b)^{-1}}.$$

Activité 3

Répondre par vrai ou faux.

a. $\ln(2+5) = \ln 2 + \ln 5$.

b. $\ln 20 = \ln 2 + \ln 10$.

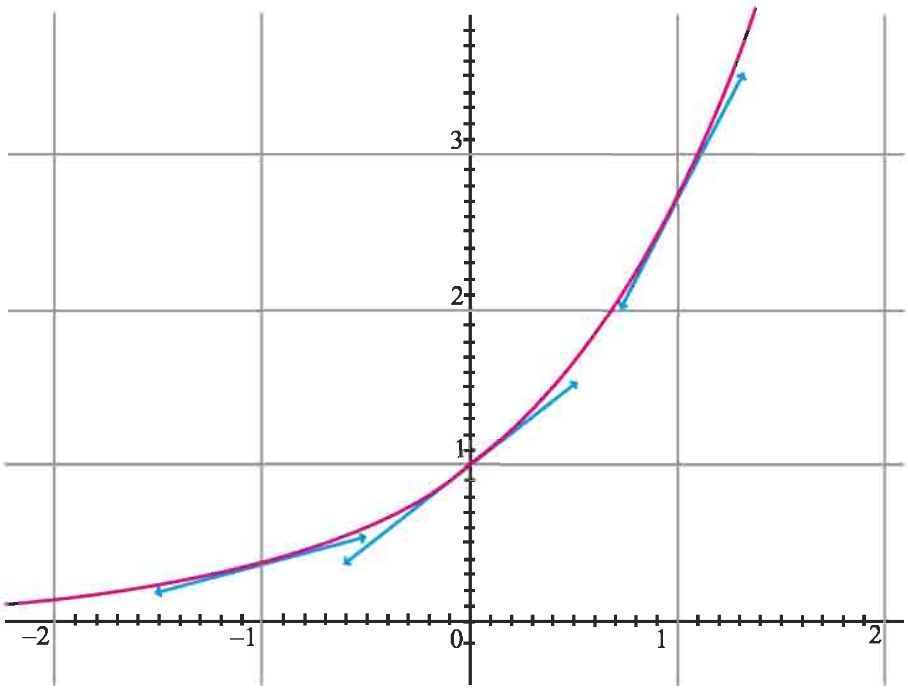
c. $\ln e = 1 + \ln 1$.

d. $\ln\left(e^3\right) + \ln\left(\frac{1}{e}\right) = 4$.

1. Définition et propriétés

Activité 1

On désigne par f la fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ représentée dans le graphique ci-dessous.



1. Déterminer $f(0)$ et $f'(0)$.

2. Donner des valeurs approchées à 10^{-1} près de $f(1)$ et $f(-1)$ ainsi que de $f'(1)$ et $f'(-1)$.

3. Déterminer le signe de f.

Activité 2

En utilisant la touche e^x de votre calculatrice,

1. Calculer e^0.

2. Donner des valeurs approchées à 10^{-6} près de e^1 ; e^2 ; e^{-2} ; e^3 ; e^{-3} et e^{-6}.

3. Comparer e^5 et $e^2 \times e^3$; e^0 et $e^2 \times e^{-2}$; e^0 et $e^3 \times e^{-3}$; e^{-6} et $e^{-2} \times e^3$.

Définition

On appelle fonction exponentielle, la fonction, notée exp, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que

- $\exp(0) = 1$ et $\exp'(0) = 1$,
- pour tous réels a et b, $\exp(a+b) = \exp(a) \times \exp(b)$.

On note pour tout réel x, $\exp(x) = e^x$. En particulier $e^0 = 1$ et $e^1 = e$.

Activité 3

Simplifier les écritures suivantes.

$$e^{\frac{1}{6}} \times e^{\frac{5}{6}} \ ; \ \frac{e^5 \times e^3}{e^8} \ ; \ \frac{e^{5000} \times e^3}{e^{5002}} \ ; \ \frac{e^{500} \times e^{30}}{e^{529}} \ ; \ \frac{e^{2008}}{e^{1907} \times e^{100}}.$$

Activité 4

Soit la fonction $\exp : x \mapsto e^x$.

1. Montrer que pour tout réel a, $e^0 = e^a e^{-a}$.

En déduire que pour tout réel a, $e^a \neq 0$ et $e^{-a} = \dfrac{1}{e^a}$.

2. Montrer que pour tous réels a et b, $e^{a-b} = \dfrac{e^a}{e^b}$.

3. Montrer que pour tout réel a, $e^a = \left(e^{\frac{a}{2}}\right)^2$.

En déduire que pour tout réel a, $e^a > 0$.

Propriétés

- Pour tout réel a, $e^{-a} = \dfrac{1}{e^a}$.
- Pour tous réels a et b, $e^{a-b} = \dfrac{e^a}{e^b}$.
- Pour tout réel a, $e^a > 0$.
- Pour tout réel a, et tout entier n, $(e^a)^n = e^{na}$.

Activité 5

Simplifier les écritures ci- dessous.

$$\frac{\left(e^2 e^{-3}\right)^2}{e^{-2}} \ ; \ \frac{\left(e^{2000} e^{-1000}\right)^{-2}}{e^{-2000}} \ ; \ \frac{\left(e^{-2000}\right)^{20}}{\left(e^{-2008} e^{8}\right)^{20}} \ ; \ \left(e^{-2}\right)^{-1} \ ; \ \left(e^{-\frac{2}{3}}\right)^3.$$

2. Etude et représentation graphique de la fonction exponentielle

2. 1. Dérivée de la fonction exponentielle

Théorème

La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x , $(\exp)'(x) = e^x$.

Activité 1

Soit la fonction $\exp : x \mapsto e^x$.

Utiliser la calculatrice pour donner des valeurs approchées à 10^{-6} près de $(\exp)'(1)$, $(\exp)'(2)$, $(\exp)'(3)$, $(\exp)'(-1)$, $(\exp)'(-2)$ et $(\exp)'(-3)$.

2.2. Tableau de variation et courbe représentative

Activité 2

Soit la fonction $\exp : x \mapsto e^x$.

1. Déterminer son sens de variation.
2. Utiliser la touche e^x pour compléter le tableau ci-dessous. (On donnera des valeurs approchées).

x	–200	–100	–10	10	100	200
e^x						

Que peut-on conjecturer sur e^x lorsque x tend vers $+\infty$, puis lorsque x tend vers $-\infty$?

Théorème

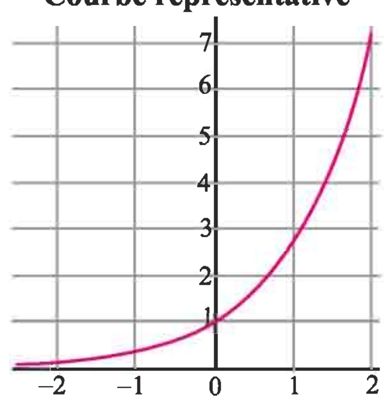
La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$.

Tableau de variation

x	$-\infty$ $\quad\nearrow\quad$ $+\infty$
exp	$0 \nearrow +\infty$

Courbe représentative

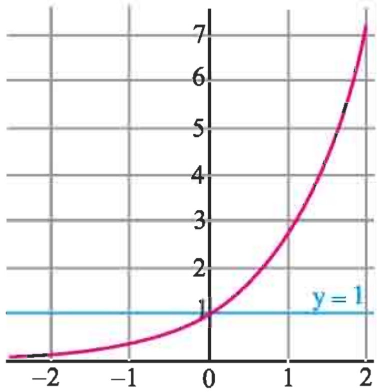


Activité 3

Le plan est muni d'un repère orthogonal $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

On a tracé la courbe C de la fonction exponentielle et la droite D d'équation $y = 1$.

1. Donner une équation de la tangente au point d'abscisse 0.
2. Résoudre graphiquement $e^x = 0$; $e^x = 1$.
3. Résoudre graphiquement, $0 < e^x < 1$; $e^x > 1$.



Propriétés

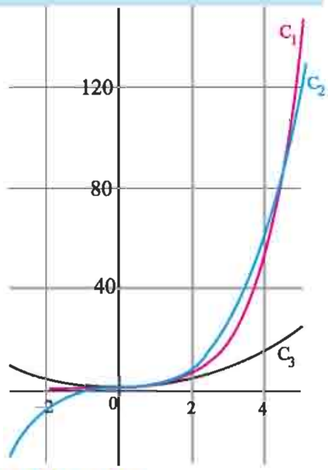
Soit x et y deux réels.

- $e^x = e^y$, si et seulement si, $x = y$.
- $e^x = 1$, si et seulement si, $x = 0$.
- $e^x < e^y$, si et seulement si, $x < y$.
- $e^x > 1$, si et seulement si, $x > 0$.
- $0 < e^x < 1$, si et seulement si, $x < 0$.

Activité 4

Le plan est muni d'un repère orthogonal $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

On a représenté les fonctions $f : x \mapsto e^x$,
$g : x \mapsto x^2 + 1$ et $h : x \mapsto x^3 + 1$.
Associer à chaque fonction sa courbe représentative.



3. Lien entre la fonction exponentielle et la fonction ln

Activité 1

1. Utiliser les touches ln puis e^x de votre calculatrice pour compléter le tableau suivant.

x	0.05	0.1	2	3.5	50	100	2000	100000
$e^{\ln x}$								

2. Utiliser les touches e^x puis ln de votre calculatrice pour compléter le tableau suivant.

x	−20	−3.5	−1.5	1	10	30	100	200
$\ln\left(e^x\right)$								

Cours

Théorème

- Pour tout réel strictement positif y, $e^{\ln y} = y$.
- Pour tout réel x , $\ln\left(e^x\right) = x$.

Activité 2

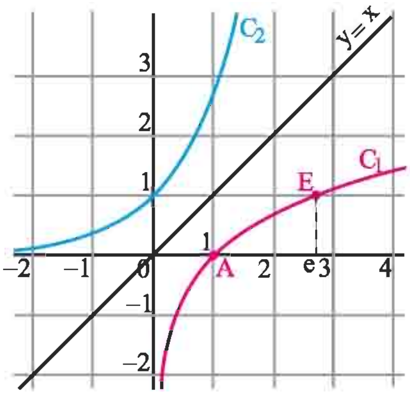
1. Calculer $\ln\left(e^{-1}\right)$; $\ln\left(e^{12}\right)$; $\ln\left(e^{-13}\right)$; $\ln\left(e^{-\frac{5}{9}}\right)$.

2. Calculer $e^{\ln 2}$; $e^{\ln 12}$; $e^{-\ln 1}$; $e^{-\ln 5}$; $e^{\ln\left(\frac{5}{6}\right)}$.

Activité 3

Le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

On a tracé la courbe C_1 de la fonction ln, la droite Δ d'équation $y = x$ et la courbe C_2 de la fonction exponentielle. Les points $A(1\ ,0)$ et $E(e\ ,1)$ sont deux points de C_1.



1. Vérifier que les points $A'(0,\ 1)$ et $E'(1,\ e)$ appartiennent à la courbe C_2.
2. Vérifier que A' et E' sont les symétriques respectifs des points A et E par rapport à la droite Δ d'équation $y = x$.

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$, les courbes représentatives des fonctions $x \mapsto \ln x$ et $x \mapsto e^x$ sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.

Activité 4

Déterminer la valeur exacte du réel x dans chacun des cas suivants.

1. a. $e^x = 2$. b. $e^x = 0.5$. c. $e^x = \frac{1}{3}$.

2. a. $\ln x = 2$. b. $\ln x = 0.5$ c. $\ln x = \frac{1}{3}$.

Activité 5

1. Montrer que pour tout réel x , $e^{2x} - 2e^{x} = e^{x}(e^{x} - 2)$.
2. En déduire les réels x tels que $e^{2x} - 2e^{x} = 0$.

Activité 6

Une population de bactéries évolue en milieu ouvert de sorte que rien ne s'oppose à sa multiplication.

On sait qu'au bout de t heures le nombre $P(t)$ de bactéries sera tel que $P(t) = e^{t}$.

1. Au bout de combien d'heures la population sera-t-elle égale à 10000 ? (On donnera une valeur approchée à 10^{-3} près).
2. Au bout de combien d'heures la population sera-t-elle égale à 10^{9} ? (On donnera une valeur approchée à 10^{-3} près).

4. Fonctions du type $x \mapsto e^{ax+b}$

Activité 1

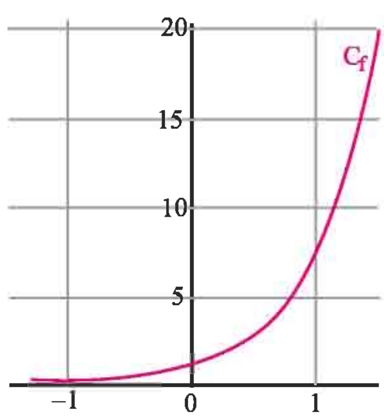
Utiliser la touche e^{x} pour compléter le tableau ci-dessous. (On donnera une valeur approchée à 10^{-3} près).

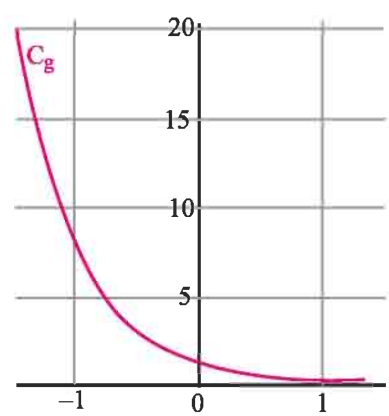
x	–1	0	0.5	1	2	10
e^{-2x}						
e^{2x}						
e^{2x-1}						

Activité 2

Le plan est muni d'un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

On a représenté les fonction $f : x \mapsto e^{2x}$ et $g : x \mapsto e^{-2x}$.





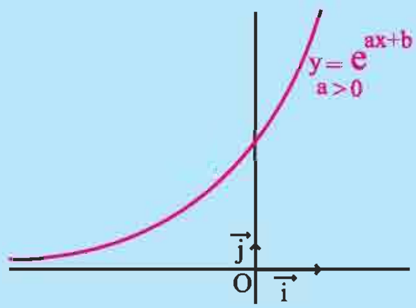
1. Déterminer le sens de variation de f et de g.
2. Que peut-on conjecturer sur e^{2x} lorsque x tend vers $+\infty$?
   Que peut-on conjecturer sur e^{2x} lorsque x tend vers $-\infty$?
3. Que peut-on conjecturer sur e^{-2x} lorsque x tend vers $+\infty$?
   Que peut-on conjecturer sur e^{-2x} lorsque x tend vers $-\infty$?

Théorème

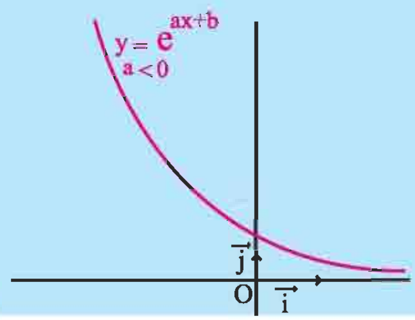
Soit a et b deux réels et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{ax+b}$.

- la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $(f)'(x) = a\,e^{ax+b}$.

- Si $a > 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$.



- Si $a < 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$; $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.

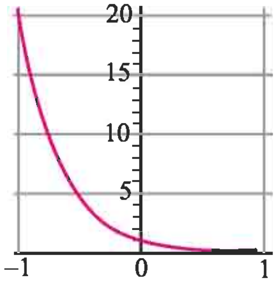


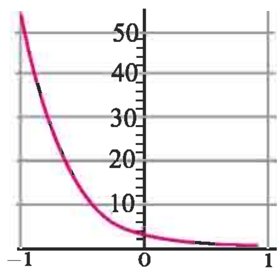
Activité 3

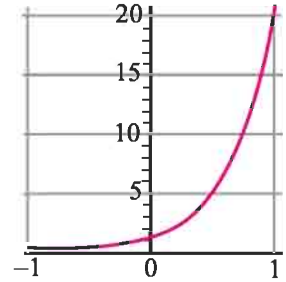
On considère les fonctions

$f : x \mapsto e^{-3x+1}$; $g : x \mapsto e^{3x+1}$ et $h : x \mapsto e^{-3x}$.

1. Calculer $f(0)$, $g(0)$ et $h(0)$.
2. Déterminer la fonction dérivée de chacune des fonctions f, g et h.
3. Le plan est muni d'un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
   On a représenté ci-après les fonctions f, g et h.
   Associer à chaque fonction sa courbe représentative.







Activité 4

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{4x}$ et C sa courbe dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. a. Déterminer $f'(x)$.

b. Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

c. Dresser le tableau de variation de f.

2. Déterminer une équation de la tangente T à C au point A d'abscisse 0.
3. Compléter le tableau ci-dessous. (On donnera des valeurs approchées).

x	–2	–1	–0.5	0	0.5	1
$f(x)$						

4. Tracer T et C.
5. Résoudre graphiquement $e^{4x} = 1$ et $e^{4x} \geq 4x + 1$.

5. Exemples de modèles de croissance exponentielle

Activité 1

Une étude démographique estime que dans les cinquante prochaines années à compter d'aujourd'hui, la population d'un certain pays sera donnée par $P(t) = 12\ e^{0.02\ t}$ où t désigne le nombre d'années et $P(t)$ le nombre d'habitants en millions.

1. Quelle est la population actuelle de ce pays ?
2. Donner une estimation de la population de ce pays dans 10 ans.
3. Dans combien d'années la population de ce pays dépassera-elle 20 millions d'habitants ?

Activité 2

On suppose que la population P d'un certain pays croît de façon exponentielle c'est à dire $P(t)=k\,e^{at}$, où t désigne l'année, k et a sont des réels.

On sait qu'en 2000, la population était de 9 millions d'habitants et qu'en 2005 elle était de 10 millions.

1. a. Que valent $P(2000)$ et $P(2005)$?

   b. Vérifier que le réel a est la solution de l'équation $e^{5x}=\frac{10}{9}$.

   c. Déterminer alors la valeur de a. (on donnera une valeur approchée à 10^{-2} près).

2. a. Vérifier que $\frac{P(2010)}{e^{2010a}}=\frac{P(2000)}{e^{2000a}}$.

   b. Que sera la population de ce pays en 2010 ?

Activité 3

1. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=5\,e^{-0.2x}$.

   a. Calculer $f'(x)$.

   b. Dresser le tableau de variation de f.

2. La concentration $C(t)$ en (mg/l) d'un certain médicament dans le sang en fonction du temps t (exprimé en heures) est donnée par $C(t)=5\,e^{-0.2t}$, $t\in[0,\ 48]$.

   a. Que représente $C(0)$?

   b. Donner une estimation du temps nécessaire pour que la concentration du médicament présent dans le sang soit inférieure à 1 mg/l.

   c. Donner une estimation du temps nécessaire pour que la concentration du médicament présent dans le sang soit inférieure à 0.1 mg/l.

Propriétés

- Pour tout réel a, $e^{-a} = \dfrac{1}{e^{a}}$.
- Pour tous réels a et b, $e^{a-b} = \dfrac{e^{a}}{e^{b}}$.
- Pour tout réel a, $e^{a} > 0$.
- Pour tout réel a, et tout entier n, $(e^{a})^{n} = e^{na}$.

Théorème

La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $(\exp)'(x) = e^{x}$.

Théorème

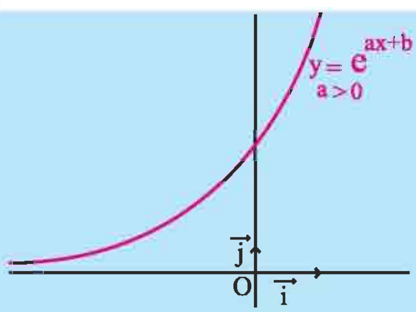
- Pour tout réel strictement positif y, $e^{\ln y} = y$.
- Pour tout réel x, $\ln(e^{x}) = x$.

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, les courbes représentatives des fonctions $x \mapsto \ln x$ et $x \mapsto e^{x}$ sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.

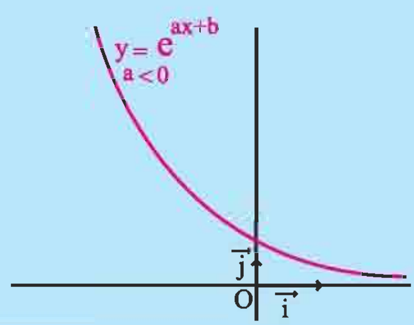
Théorème

Soit a et b deux réels et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{ax+b}$.

- la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $(f)'(x) = a\,e^{ax+b}$.



- Si $a > 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$.



- Si $a < 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$; $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.

Exercice 1

Simplifier les écritures suivantes.

$$e^2\left(e^{-2}e^4\right)^{-2} \quad ; \quad \left(e^{\frac{2}{3}}\right)^{-3} e^2e^{-3} \quad ; \quad \frac{\left(e^{2008}e^{-1008}\right)^2}{e^{2000}} \ .$$

Exercice 2

1. Trouver le réel x tel que $e^{3x} = e^2$.
2. Trouver le réel x tel que $e^{2-x} = 1$.
3. Trouver le réel x tel que $e^{-4x} = e$.

Exercice 3

1. Calculer $\ln\left(e^{-4}\right)$; $\ln\left(e^{2008}\right)$; $\ln\left(e^{-100000}\right)$; $\ln\left(e^{-\frac{11}{3}}\right)$.
2. Calculer $e^{\ln 4.5}$; $e^{\ln 100}$; $e^{-\ln 250}$; $e^{-\ln 0.001}$; $e^{\ln\left(\frac{6}{11}\right)}$.

Exercice 4

Déterminer les réels x tels que $e^{2x} \geq e^3$.

Déterminer les réels x tels que $e^{3x} \leq e^2$.

Déterminer les réels x strictement positifs tels que $e^{3x+2} \geq e^{-x}$.

Exercice 5

Le plan est muni d'un repère orthogonal $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1. Tracer C_f la courbe représentative de la fonction $f : x \mapsto e^x$.
2. On considère la fonction $g : x \mapsto 1 + e^x$.
   a. Calculer $g(0)$, $g(1)$, $g(-1)$.
   b. Tracer, à l'aide de C_f , la courbe C_g de g.
   c. Donner le sens de variation de g.
   d. Résoudre graphiquement $g(x) = 2$, $g(x) > 2$ et $g(x) < 2$.

Exercice 6

Le plan est muni d'un repère orthogonal $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1. Tracer la courbe C_f de la fonction $f : x \mapsto -e^x$.

2. On considère la fonction $g : x \mapsto 1 - e^x$.

a. Calculer $g(0)$, $g(1)$, $g(-1)$.

b. Tracer, à l'aide de C_f, C_g la courbe de g et donner son sens de variation.

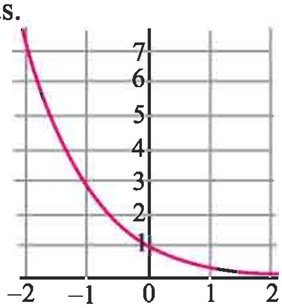
c. Résoudre graphiquement $g(x) = 0$, $g(x) > 0$ et $g(x) < 0$.

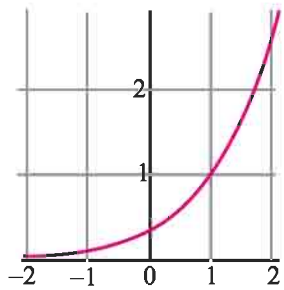
Exercice 7

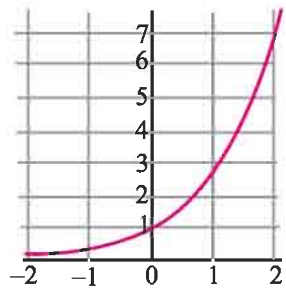
On considère les fonctions

$f : x \mapsto e^x$; $g : x \mapsto e^{-x}$ et $h : x \mapsto e^{x-1}$.

Retrouver pour chacune des fonctions f, g et h sa courbe parmi les courbes représentées ci-dessous.







Exercice 8

On considère la fonction $f : x \mapsto e^{x\ln 2}$.

1. a. Calculer $f'(t)$.

   b. Dresser le tableau de variation de f.

   c. Représenter f dans un repère orthogonal.

2. a. Calculer $f(2)$, $f(3)$.

   b. Vérifier que pour tout entier naturel $n \geq 1$, $f(n) = 2^n$.

3. a. A l'aide de la calculatrice, compléter le tableau suivant

x	0	0.1	1.5	2	2.5	3	3.5	4	6	8	10
$f(x)$											
$\ln(f(x))$											

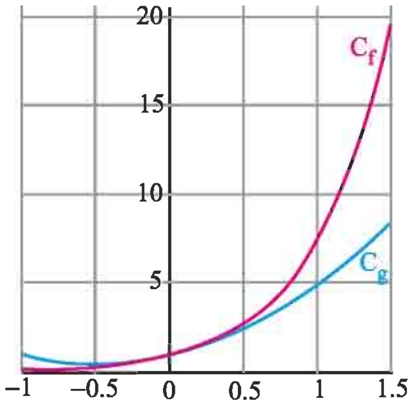
   b. Représenter les points de coordonnées $(x, \ln f(x))$ correspondants au tableau précédent.

   c. Vérifier que les points obtenus sont alignés.

Exercice 9

On considère les fonctions f et g définies sur $]-1, 1.5[$ par $f(x)=e^{2x}$ et $g(x)=1+2x+2x^2$.

On a tracé ci-contre leurs courbes dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.



1. a. Résoudre graphiquement $f(x)=g(x)$.

   b. Calculer $f(0)$ et $g(0)$.

   c. Résoudre $f(x)<g(x)$.

2. Donner les sens de variation de f et g.

3. a. Déterminer une équation de la tangente D à C_f au point d'abscisse 0.

   b. Vérifier que D est aussi la tangente à C_f au point d'abscisse 0.

4. a. Utiliser la calculatrice pour compléter le tableau suivant par des valeurs approchées à 10^{-3} près.

x	– 0.1	– 0.05	– 0.01	– 0.001	0.001	0.01	0.05	0.1
$f(x)$								
$g(x)$								

   b. Vérifier que pour chaque valeur du tableau, $g(x)$ est une valeur approchée de $f(x)$ à 10^{-2} près.

Exercice 10

1. On considère la fonction $f : x \mapsto e^{-1.2x}$ et on désigne par C sa courbe dans un repère orthogonal.

   a. Déterminer f'.

   b. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

   c. Dresser le tableau de variation de f.

   d. Tracer C.

2. a. Tracer la courbe de la fonction $g : x \mapsto -e^{-1.2x}$.

b. Donner le sens de variation de g.

c. Utiliser la calculatrice, pour compléter le tableau suivant par des valeurs approchées à 10^{-3} près.

x	0	1	2	3	4	5	8	10	15	20
$g(x)$										

3. Une forme de grippe est apparue dans une ville. Une étude a montré que la croissance de l'épidémie est donnée par $P(t) = 2 - e^{-1.2t}$ où t désigne le nombre de semaines écoulées depuis l'apparition de l'épidémie et $P(t)$ désigne le nombre d'habitants (en milliers).

Utiliser le tableau de la question 2.c. pour donner

a. le nombre d'habitants initialement atteints,

b. le nombre d'habitants atteints au bout de 5 semaines,

c. le nombre d'habitants atteints au bout de 15 semaines.

Chapitre 6

Suites réelles

Dans son traité d'Arithmétique, As- Samaw'al (1172) écrit : "Ce que l'on extrait par approximation des racines irrationnelles au moyen du calcul est ce par quoi on veut obtenir une quantité rationnelle proche de la racine irrationnelle. Il peut exister une quantité rationnelle plus proche de la racine irrationnelle que celle-là. Il peut ensuite exister une troisième quantité rationnelle, plus proche de la racine irrationnelle que la deuxième quantité et que la première, car pour toute quantité rationnelle supposée proche d'une racine irrationnelle, la différence entre elles est en vérité une ligne droite, et la ligne est susceptible d'être divisée et d'être partagée, indéfiniment. C'est pourquoi il devient possible de trouver continûment une quantité rationnelle proche de la racine irrationnelle, et de trouver une autre quantité rationnelle plus proche que la première de l'irrationnelle, indéfiniment."

(R. Rashed, Entre Arithmétique et Algèbre , 1984).

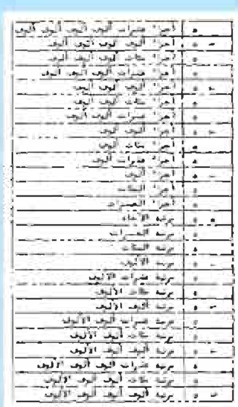


Tableau d'As-Samawal

Chapitre 6 Suites réelles

Vérifier vos acquis

Activité 1

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison -2 et de premier terme 3.

1. Calculer u_1, u_2 et u_3.

2. Répondre par vrai ou faux.

a. $u_{100} = -197$. b. $u_{100} = 203$. c. $u_{100} = 298$.

Activité 2

Soit (u_n) une suite géométrique de raison -2 et de premier terme 3.

1. Calculer u_1, u_2 et u_3.

2. Répondre par vrai ou faux.

a. $u_{10} = -3\times 2^{10}$. b. $u_{10} = 3\times(-2)^{10}$. c. $u_{10} = -2\times 3^{10}$.

Activité 3

Calculer les sommes suivantes

a. $1+2+3+ \ldots +50$.

b. La somme des nombres pairs de 4 jusqu' à 1000.

c. $3^2 + 3^3 + 3^4 + 3^5 + 3^6 + 3^7 + 3^8$.

Activité 4

Soit (u_n) une suite définie pour tout entier naturel n par $u_n = 3^n + 2$.

1. Calculer u_1, u_2, u_3 et u_{10}.

2. Répondre par vrai ou faux

a. (u_n) est une suite arithmétique.

b. (u_n) est une suite géométrique.

Cours

1. Suites arithmétiques

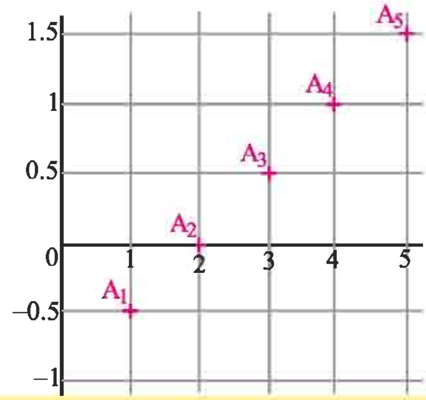
Activité 1

1. Soit (u_n) une suite arithmétique de raison 5 et de premier terme $u_0 = -2$.
Calculer u_{100}.
2. Reprendre la question précédente pour la suite arithmétique (u_n) de raison -10 et de premier terme $u_0 = 0.5$.

Soit (u_n) une suite. Lorsqu'il existe un réel r tel que $u_{n+1} = u_n + r$, pour tout $n \geq 0$, on dit que la suite (u_n) est arithmétique de premier terme u_0 et de raison r.
Dans ce cas, $u_n = u_0 + nr$, pour tout $n \geq 0$.

Activité 2

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0.
Le plan est muni d'un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On a représenté les points $A_n(n, u_n)$, $1 \leq n \leq 5$.



1. a. Déterminer r et u_0.
   b. Exprimer u_n en fonction de n.
2. Représenter les points A_8 et A_{10}.
3. A partir de quel rang n_1, $u_n \geq 10^9$?
4. Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

Soit (u_n) une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r.
- Si $r > 0$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.
- Si $r < 0$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$.
- Si $r = 0$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = u_0$.

Activité 3

On considère deux suites arithmétiques (u_n) et (v_n) de raisons respectives -2 et 0.5 et de même premier terme égal à 5.
1. Représenter, dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$, les points $A_n(n, u_n)$ et $B_n(n, v_n)$, $0 \leq n \leq 10$.
2. Exprimer u_n et v_n en fonction de n.
3. Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n$.

Activité 4

Dans chacun des cas ci-dessous, vérifier que (u_n) est une suite arithmétique puis calculer sa limite.

1. $u_n = 3n + 4$, $n \geq 0$. 2. $u_n = -0.0001n + 100$, $n \geq 0$. 3. $u_n = 3 - 2n$, $n \geq 0$.

Somme de n termes consécutifs d'une suite arithmétique

Activité 5

Calculer la somme de tous les entiers de 1 à 1000 inclus.
Calculer la somme de tous les entiers pairs de 2 à 2081.

Soit (u_n) une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r.
Soit $S_n = u_0 + u_1 + ... + u_{n-1}$, $n \geq 1$.
Alors $S_n = n\dfrac{u_0 + u_{n-1}}{2}$.

2. Suites géométriques

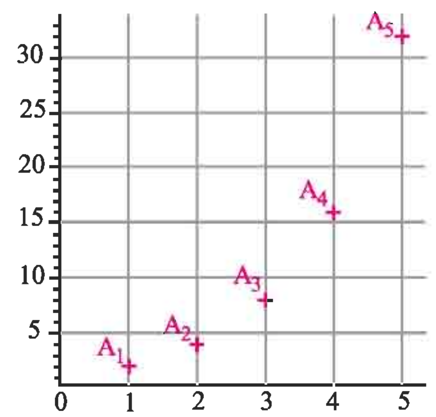
Activité 1

1. Soit (u_n) une suite géométrique de raison 2 et de premier terme $u_0 = -3$.
Calculer u_{10}.
2. Reprendre l'exercice précédent pour la suite géométrique (u_n) de raison -0.5 et de premier terme $u_0 = 2$.

Soit (u_n) une suite. Lorsqu'il existe un réel q tel que $u_{n+1} = qu_n$, pour tout $n \geq 0$, on dit que la suite (u_n) est géométrique de premier terme u_0 et de raison r.
Dans ce cas, $u_n = u_0 q^n$, pour tout $n \geq 1$.

Activité 2

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0.
Le plan est muni d'un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On a représenté les points $A_n(n, u_n)$, $1 \leq n \leq 5$.



1. a. Déterminer q et u_0.
   b. Exprimer u_n en fonction de n.
2. Représenter le point A_6.
3. En utilisant la calculatrice, déterminer le rang n_1 à partir duquel on a pour tout $n \geq n_1$, $u_n \geq 10^6$?
4. Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

Activité 3

Cours

On considère deux suites géométriques (u_n) et (v_n) de raisons respectives -1 et $\frac{1}{2}$ et de même premier terme égal à 10.

1. Représenter, dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$, les points $A_n(n, u_n)$ et $B_n(n, v_n)$, $0 \le n \le 5$.
2. Exprimer u_n et v_n en fonction de n.
3. Déterminer $\lim_{n\to+\infty} u_n$ et $\lim_{n\to+\infty} v_n$.

Soit (u_n) une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q.

- Si $q > 1$ et $u_0 > 0$, alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
- Si $q > 1$ et $u_0 < 0$, alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.
- Si $q = 1$, alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = u_0$.
- Si $|q| < 1$, alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.
- Si $q \le -1$ et $u_0 \ne 0$, alors la suite (u_n) n'a pas de limite.

Activité 4

Dans chacun des cas ci-dessous, vérifier que (u_n) est une suite géométrique puis étudier sa limite.

1. $u_n = \left(\frac{1}{5}\right)^n$, $n \ge 0$.
2. $u_n = 3\left(-\frac{2}{5}\right)^n$, $n \ge 0$.
3. $u_n = -2\left(\frac{23}{11}\right)^n$, $n \ge 0$.
4. $u_n = 2\left(\sqrt{2}\right)^n$, $n \ge 0$.
5. $u_n = -5(-0.9999999999)^n$, $n \ge 0$.
6. $u_n = (-2)^n$, $n \ge 0$.

Somme de n termes consécutifs d'une suite géométrique

Activité 5

Une personne loue actuellement un appartement à 4800 dinars par an
Le contrat stipule une augmentation annuelle de 5%.
On note L_0 le loyer annuel actuel et L_n le loyer annuel en l'année n

1. Déterminer L_1, L_3 et L_{10}.
2. Combien la personne aura-t-elle payé au bout de 5 ans ?

Soit (u_n) une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q.
Soit $S_n = u_0 + ... + u_{n-1}$, $n \ge 1$.

- Si $q = 1$, alors $S_n = nu_0$.
- Si $q \ne 1$, alors $S_n = u_0 \frac{1-q^n}{1-q}$.

Activité 6

Soit n un entier.
Calculer en fonction de n, les sommes ci-dessous.

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{2^n}.$$

$$K_n = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - ... + \left(-\frac{1}{3}\right)^n.$$

$$T_n = 1 + 10 + 100 + ... + 10^n.$$

3. Opérations sur les limites de suites

Théorème

Soit (u_n) une suite et a et b deux réels tels que $a \neq 0$.

- Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ alors $\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} (au_n + b) = +\infty, \text{ si } a > 0, \\ \lim\limits_{n\to+\infty} (au_n + b) = -\infty, \text{ si } a < 0. \end{cases}$
- Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$ alors $\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} (au_n + b) = -\infty, \text{ si } a > 0, \\ \lim\limits_{n\to+\infty} (au_n + b) = +\infty, \text{ si } a < 0. \end{cases}$
- Si la suite (u_n) n'a pas de limite alors la suite $(au_n + b)$ n'a pas de limite.

Activité 1

1. Soit (u_n) la suite définie par $u_n = \dfrac{5^n - 2^n}{5^n}$, $n \geq 0$.

   a. Vérifier que $u_n = 1 - \left(\dfrac{2}{5}\right)^n$.

   b. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

2. Soit (v_n) la suite définie par $v_n = \dfrac{2^n - 5^n}{2^n}$, $n \geq 0$.

   Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.

Activité 2

On considère la suite $(a_n)_{n\geq 1}$ définie de la manière suivante

$a_1 = 3.2$; $a_2 = 3.22$; $a_n = 3.\underbrace{22...2}_{\text{n chiffres}}$, $n \geq 1$.

1. En écrivant $a_n = 3.\underbrace{2...22}_{\text{n chiffres}} = 3 + 2(10^{-1} + 10^{-2} + ... + 10^{-n})$, montrer que

$a_n = 3 + \frac{2}{9} - \frac{2}{9}10^{-n}$.

2. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$.

Théorème

Soit deux suites (u_n) et (v_n) et deux réels L et L'.

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = L$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = L'$ avec $L' \neq 0$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{u_n}{v_n}\right) = \frac{L}{L'}$.

Activité 3

1. Déterminer les limites des suites ci-dessous.

a. $u_n = \dfrac{2-\left(-\frac{1}{4}\right)^n}{1+\left(\frac{2}{3}\right)^n}$, $n \geq 0$, b. $v_n = \dfrac{\left(\frac{8}{9}\right)^n + 2}{5+\left(-\frac{1}{5}\right)^n}$, $n \geq 0$.

2. Soit (w_n) la suite définie par $w_n = \dfrac{5^n - 2}{2\times(5^n)+1}$.

a. Vérifier que $w_n = \dfrac{1-2\left(\frac{1}{5}\right)^n}{2+\left(\frac{1}{5}\right)^n}$.

b. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n$.

4. Suites du type $u_{n+1} = au_n + b$

Activité 1

On considère les suites (a_n), (b_n), (c_n) et (d_n) définies par $a_1 = b_1 = c_1 = d_1 = 10$ et pour tout $n \geq 1$, $a_{n+1} = 2a_n + 1$, $b_{n+1} = 0.5b_n + 1$, $c_{n+1} = -0.5c_n + 1$ et $d_{n+1} = -2d_n + 1$.

1. On se propose de calculer les mille premiers termes de chacune de ces suites à l'aide d'un tableur.
   Programmer sur une feuille de calcul Excel en suivant les étapes suivantes.

Etape 1

Ecrire un tableau comme ci-dessous sur la feuille de calcul.

	A	B	C	D
1	10	10	10	10
2	=2*A1+1	=0,5*B1+1	=–0,5*C1+1	=–2*D1+1
3				
4				
.				
.				
.				
1000				

Etape 2

Sélectionner A2, déplacer le curseur jusqu'à ce que une croix noire s'affiche.
Tirer alors jusqu'à A100, il s'affiche alors les cent premiers termes de la suite (a_n).
Procéder de même pour afficher les cent premiers termes de chacune des suites (b_n), (c_n) et (d_n).

2. Que peut-on conjecturer quant à la convergence de chacune des suites (a_n), (b_n), (c_n) et (d_n)

Activité 2

1. On considère la suite (a_n) de premier terme a_1 et telle que pour tout $n \geq 1$,
   $a_{n+1} = -0.25a_n - 4$.
   Calculer, à l'aide d'un tableur, les mille premiers termes de la suite (a_n) puis conjecturer sa limite pour chacun des cas ci-dessous.
   • $a_1 = -4$ • $a_1 = 0.000000001$ • $a_1 = 1000000$.

2. On considère la suite (b_n) de premier terme b_1 et telle que pour tout $n \geq 1$,

$b_{n+1} = 3b_n + 4$.

Calculer, à l'aide d'un tableur, les mille premiers termes de la suite (b_n) puis conjecturer sa limite pour chacun des cas ci-dessous.

• $b_1 = -100$ • $b_1 = 100$ • $b_1 = -2$.

Activité 3

On a constaté que chaque année, une agence d'Internet garde 80% de ses anciens abonnés et qu'il y a 500 nouveaux abonnés.
On suppose que l'évolution du nombre des abonnés reste la même au fil des années.

On note u_n le nombre des abonnés au bout de n années.

On sait qu'au début l'agence comptait 100 abonnés.

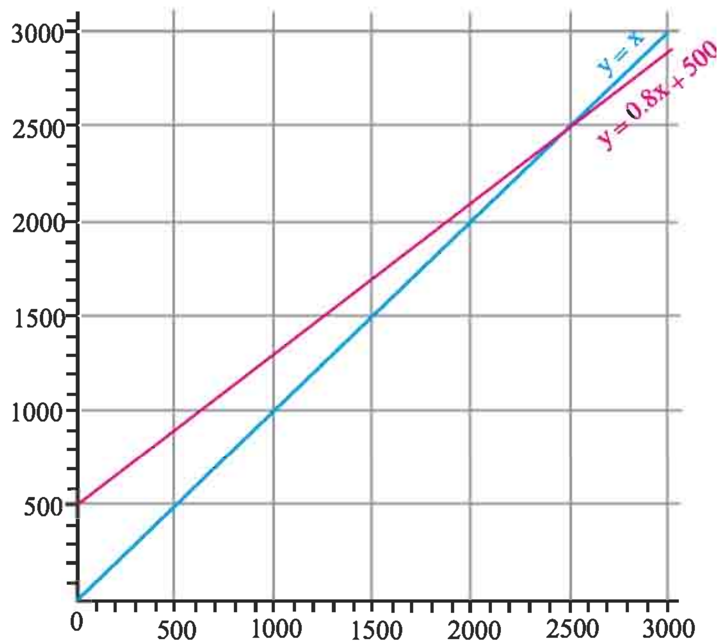
1. a. Calculer u_1 et u_2.

   b. Vérifier que $u_{n+1} = 0.8u_n + 500$, $n \geq 0$.

2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 0.8x + 500$.

   a. Vérifier que $u_{n+1} = f(u_n)$, $n \geq 0$.

   b. On a tracé dans un repère orthonormé, les droites d'équations $y = 0.8x + 500$ et $y = x$.



Placer sur l'axe des abscisses le point d'abscisse le réel $u_0 = 100$.

Placer alors sur l'axe des ordonnées le réel $u_1 = f(u_0)$.

Reporter u_1 sur l'axe des abscisses.

c. En réitérant le procédé décrit précédemment, placer sur l'axe des abscisses les réels u_2 et u_3.

3. Soit (v_n) la suite définie par $v_n = u_n - 2500$.

   a. Montrer que la suite (v_n) est géométrique, on précisera sa raison et son premier terme.

   b. Exprimer v_n en fonction de n.

   c. En déduire u_n en fonction de n.

4. a. Donner une estimation du nombre des abonnés au bout de 10 ans.

   b. Donner une estimation du nombre des abonnés au bout de 20 ans.

   c. Etudier la limite de la suite (u_n). Interpréter ce résultat.

Activité 4

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et pour tout $n \geq 0$, $u_{n+1} = 3u_n - 2$.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x - 2$.

1. Vérifier que pour tout $n \geq 0$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

2. a. Tracer, dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, les droites d'équations $y = 3x - 2$ et $y = x$ puis déterminer leur point d'intersection.

   b. Représenter sur l'axe des abscisses les points A_n d'abscisse u_n, $n = 0, 1, ..., 4$.

   c. Que suggère le graphique concernant la limite de la suite (u_n) ?

3. Soit (v_n) la suite définie par $v_n = u_n - 1$.

   a. Montrer que la suite (v_n) est géométrique, on précisera sa raison et son premier terme.

   b. Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n$.

   c. En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

Activité 5

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \geq 0$, $u_{n+1} = 0.75u_n + 2$.

1. Déterminer la solution α de l'équation $x = 0.75x + 2$.
2. Soit (v_n) la suite définie par $v_n = u_n - \alpha$.

a. Montrer que la suite (v_n) est géométrique, on précisera sa raison et son premier terme.

b. Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n$.

c. En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

5. Suites du type $u_{n+1} = \dfrac{au_n + b}{cu_n + d}$

Activité 1

On se propose d'étudier la convergence de la suite (u_n) définie par

$$\begin{cases} u_0 = 2, \\ u_{n+1} = \dfrac{2}{1 + u_n}, n \geq 0. \end{cases}$$

Soit la fonction f définie sur $[0, 2]$ par $f(x) = \dfrac{2}{1+x}$.

1. a. Etudier les variations de f.

   b. Tracer la courbe C de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

   c. Déterminer graphiquement, un encadrement de $f(x)$, $x \in [0, 2]$.

   d. Soit D la droite d'équation $y = x$.

   Tracer D et déterminer l'intersection de C et D.

2. a. Vérifier que $u_{n+1} = f(u_n)$, $n \geq 0$.

   b. Placer sur l'axe des abscisses le point d'abscisse le réel $u_0 = 2$.

   Placer alors sur l'axe des ordonnées le réel $u_1 = f(u_0)$.

   Reporter u_1 sur l'axe des abscisses.

   c. En réitérant le procédé décrit précédemment, placer sur l'axe des abscisses les réels u_2, u_3, u_4 et u_5.

d. Que suggère le graphique concernant la limite de la suite (u_n) ?

3. a. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $x = \dfrac{2}{1+x}$.

Soit (v_n) la suite définie par $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 2}$.

b. Montrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $-\dfrac{1}{2}$.

c. Exprimer v_n en fonction de n.

4. a. Vérifier que pour tout entier n, $u_n = \dfrac{1 + \frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{4} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n}$.

b. Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

Activité 2

On se propose d'étudier la convergence de la suite (u_n) définie par

$$\begin{cases} u_0 = 1.5, \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n + 6}{6 - u_n}, \ n \geq 0. \end{cases}$$

Soit la fonction f définie sur $[0, 2]$ par $f(x) = \dfrac{x+6}{6-x}$.

1. a. Etudier les variations de f.

b. Tracer la courbe C de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

c. Déterminer graphiquement, un encadrement de $f(x)$, $x \in [0, 2]$.

d. Soit D la droite d'équation $y = x$.

Tracer D et déterminer l'intersection de C et D.

2. a. Vérifier que $u_{n+1} = f(u_n)$, $n \geq 0$.

b. Placer sur l'axe des abscisses les réels u_0, u_1, u_2, u_3, u_4 et u_5.

c. Que suggère le graphique concernant la limite de la suite (u_n) ?

3. Soit (v_n) la suite définie par $v_n = \dfrac{u_n - 2}{u_n - 3}$.

a. Montrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $\dfrac{3}{4}$.

b. Exprimer v_n en fonction de n.

4. a. Vérifier que pour tout entier n, $u_n = \dfrac{\left(\frac{3}{4}\right)^n - 2}{\frac{1}{3} \times \left(\frac{3}{4}\right)^n - 1}$.

b. Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

Activité 3

On considère la suite (a_n) de premier terme a_1 et telle que pour tout $n \geq 1$, $a_{n+1} = \dfrac{4}{a_n - 3}$.

Calculer, à l'aide d'un tableur, lorsque c'est possible les mille premiers termes de la suite (a_n) puis conjecturer sa limite pour chacun des cas ci-dessous.

• $a_1 = 4$ • $a_1 = -1$ • $a_1 = 1000000$ • $a_1 = 3$.

Suites arithmétiques

Soit (u_n) une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r.

- $u_n = u_0 + nr$, pour tout $n \geq 0$.
- Si $r > 0$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$. • Si $r < 0$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$.
- Si $r = 0$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = u_0$.

Suites géométriques

Soit (u_n) une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q.

- $u_n = u_0 q^n$, pour tout $n \geq 1$.
- Si $q > 1$ et $u_0 > 0$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$. • Si $q > 1$ et $u_0 < 0$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$.
- Si $q = 1$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = u_0$. • Si $|q| < 1$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.
- Si $q \leq -1$ et $u_0 \neq 0$, alors la suite (u_n) n'a pas de limite.

Théorème

Soit (u_n) une suite et a et b deux réels tels que $a \neq 0$.

- Si $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ alors $\begin{cases} \lim\limits_{n \to +\infty} (au_n + b) = +\infty, \text{ si } a > 0, \\ \lim\limits_{n \to +\infty} (au_n + b) = -\infty, \text{ si } a < 0. \end{cases}$
- Si $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$ alors $\begin{cases} \lim\limits_{n \to +\infty} (au_n + b) = -\infty, \text{ si } a > 0, \\ \lim\limits_{n \to +\infty} (au_n + b) = +\infty, \text{ si } a < 0. \end{cases}$
- Si la suite (u_n) n'a pas de limite alors la suite $(au_n + b)$ n'a pas de limite.

Théorème

Soit deux suites (u_n) et (v_n) et deux réels L et L'.

Si $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = L$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = L'$ avec $L' \neq 0$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{u_n}{v_n}\right) = \dfrac{L}{L'}$.

Exercice 1

1. Dans chacun des cas ci-dessous, vérifier que (u_n) est une suite arithmétique puis étudier sa limite.

   a. $u_n = -2n+3,\ n \geq 0$.
   b. $u_n = 0.0000001n + 1,\ n \geq 0$.
   c. $u_n = 1 - \dfrac{3}{2008}n,\ n \geq 0$.
   d. $u_n = -0.25n + 0.2(1+n),\ n \geq 0$.

2. Dans chacun des cas ci-dessous, vérifier que (u_n) est une suite géométrique puis étudier sa limite.

   a. $u_n = 3\left(-\dfrac{4}{9}\right)^n,\ n \geq 0$.
   b. $u_n = 2(3.5)^n,\ n \geq 0$.
   c. $u_n = (-1.0001)^n,\ n \geq 0$.
   d. $u_n = -4 \times 3^{2n} \times 2^{-n},\ n \geq 0$.

Exercice 2

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par

$u_n = 3 - \dfrac{1}{2^n}$ et $v_n = 3 + \dfrac{1}{5^n},\ n \geq 0$.

1. Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n$.
2. A l'aide de la calculatrice, déterminer

   a. l'entier n_0 tel que $2.999999 \leq u_n,\ n \geq n_0$,
   b. l'entier n_1 tel que $v_n \leq 3.000001,\ n \geq n_1$.

Exercice 3

1. Soit (u_n) la suite définie par $u_n = \dfrac{3^n - 4^n}{3^n},\ n \geq 0$.

   En écrivant $u_n = 1 - \left(\dfrac{4}{3}\right)^n,\ n \geq 0$, déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

2. Soit (v_n) la suite définie par $v_n = \dfrac{4^n - 3^n}{3^n},\ n \geq 0$.

   Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n$.

3. Soit (w_n) la suite définie par $w_n = \dfrac{4^n - 3^n}{4^n},\ n \geq 0$.

   Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} w_n$.

Exercice 4

Dans chacun des cas ci-dessous, étudier la limite de la suite (u_n).

a. $u_n = \dfrac{10^n - 3^n}{10^n + 3^n}$, $n \geq 0$.   b. $u_n = \dfrac{3\times10^n - (-1)^n}{2\times10^n + (-1)^n}$, $n \geq 0$.

c. $u_n = \dfrac{2\times6^n - 11^n}{3\times11^n - 6^n}$, $n \geq 0$.   d. $u_n = \dfrac{2+1.1^n}{1-3\times1.1^n}$, $n \geq 0$.

Exercice 5

1. Soit $S_n = 1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + ... + \left(-\dfrac{1}{2}\right)^n$, $n \geq 0$.
   a. Calculer S_n en fonction de n.
   b. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.
2. Soit $K_n = 1 + 0.1 + 0.01 + 0.001 + ... + 10^{-n}$, $n \geq 0$.
   a. Calculer K_n en fonction de n.
   b. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} K_n$.
3. Soit $T_n = 3 + 30 + 300 + ... + 3\times10^n$, $n \geq 0$.
   a. Calculer T_n en fonction de n.
   b. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} T_n$.

Exercice 6

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = -2$ et pour tout $n \geq 0$, $u_{n+1} = 2u_n - 3$.
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x - 3$.

1. Vérifier que $u_{n+1} = f(u_n)$, $n \geq 0$.
2. a. Tracer, dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, les droites d'équations $y = 2x - 3$ et $y = x$ puis déterminer leur point d'intersection.
   b. Représenter sur l'axe des abscisses les points A_n d'abscisse u_n, $n = 0, 1, ..., 4$.
   c. Que suggère le graphique concernant la convergence de la suite (u_n) ?
3. Soit (v_n) la suite définie par $v_n = u_n - 3$.

a. Montrer que la suite (v_n) est géométrique, on précisera sa raison et son premier terme.

b. Exprimer u_n en fonction de n.

c. Etudier la limite de la suite (u_n).

Exercice 7

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = -2$ et pour tout $n \geq 0$, $u_{n+1} = -2u_n + 1$.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -2x + 1$.

1. Vérifier que pour tout $n \geq 0$, $u_{n+1} = f(u_n)$.
2. a. Tracer, dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, les droites d'équations $y = -2x + 1$ et $y = x$ puis déterminer leur point d'intersection.

   b. Représenter sur l'axe des abscisses les points A_n d'abscisse u_n, $n = 0, 1, ..., 4$.

   c. Que suggère le graphique concernant la convergence de la suite (u_n) ?
3. Soit (v_n) la suite définie par $v_n = u_n - \frac{1}{3}$.

   a. Montrer que la suite (v_n) est géométrique, on précisera sa raison et son premier terme.

   b. Exprimer u_n en fonction de n.

   c. Etudier la limite de la suite (u_n).

Exercice 8

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et pour tout $n \geq 1$, $u_{n+1} = -0.3u_n + 1$.

1. Déterminer la solution α de l'équation $x = -0.3x + 1$.
2. Soit (v_n) la suite définie par $v_n = u_n - \alpha$.

   a. Montrer que la suite (v_n) est géométrique, on précisera sa raison et son premier terme.

   b. Exprimer u_n en fonction de n.

   c. Etudier la limite de la suite (u_n).

Exercice 9

Soit la suite (u_n) définie par

$$\begin{cases} u_0 = 3, \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 2, \ n \geq 0. \end{cases}$$

1. Calculer u_1 et u_2.

2. On pose $v_n = u_n - 4,\ n \geq 0$.

   a. Calculer v_0 et montrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

   b. Calculer v_n en fonction de n, puis en déduire u_n en fonction de n.

3. a. Calculer la somme $S_n = v_0 + v_1 + ... + v_n$ en fonction de n.

   b. En déduire la somme $T_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$ en fonction de n.

Exercice 10

On a constaté que chaque année, un réseau privé de télévision garde 95% de ses anciens abonnés et qu'il y a 0.3 million nouveaux abonnés.

On suppose que l'évolution du nombre des abonnés reste la même au fil des années.

On note u_n le nombre des abonnés (en millions) au bout de n années.

On sait que $u_0 = 1$.

1. a. Calculer u_1 et u_2.

   b. Vérifier que pour tout $n \geq 0$, $u_{n+1} = 0.95u_n + 0.3$.

   c. Déterminer la solution α de l'équation $x = 0.95x + 0.3$.

2. Soit (v_n) la suite définie par $v_n = u_n - \alpha$.

   a. Montrer que la suite (v_n) est géométrique, on précisera sa raison et son premier terme.

   b. Exprimer u_n en fonction de n.

   c. Etudier la limite de la suite (u_n). Interpréter ce résultat.

3. a. Donner une estimation du nombre des abonnées au bout de 5 ans.

   b. Donner une estimation du nombre des abonnées au bout de 10 ans.

   c. A l'aide de la calculatrice, déterminer après combien d'années le nombre des abonnés dépassera-t-il 3 millions ?

Exercice 11

Pour étudier un marché on le divise en périodes.

La demande, l'offre et le prix d'un certain produit sont mesurés par les indices respectifs D, O et P (d_n, o_n et p_n sont les valeurs respectives de ces indices durant la $n^{ème}$ période).

Les trois indices D, O et P sont liés par les relations

$$\begin{cases} d_n = -4p_n + 46 \\ o_{n+1} = 3p_n - 10 \end{cases}$$

On suppose que $p_1 = 5$. On se propose d'étudier l'évolution de la suite (p_n) lorsque le marché est en équilibre, c'est à dire l'offre est égale à la demande.

1. Vérifier que pour tout $n \geq 1$, $p_{n+1} = -\frac{3}{4}p_n + 14$.
2. Calculer p_2, ..., p_5 puis représenter dans un repère les points $A_n(n\,,\,p_n)$, $1 \leq n \leq 5$.
   Quelle conjecture peut-on formuler quant-à la limite de la suite (p_n)?
3. a. Déterminer le réel α tel que $\alpha = -\frac{3}{4}\alpha + 14$.

   On considère la suite (u_n) définie par $u_n = p_n - \alpha$, $n \geq 1$.

   b. Montrer que la suite (u_n) est géométrique, on précisera sa raison et son premier terme.
4. a. Exprimer p_n en fonction de n.

   b. En déduire que la suite $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n = \alpha$.

   c. La valeur limite α est appelée prix d'équilibre de la denrée étudiée.
   Calculer les valeurs des indices O et D correspondant à ce prix d'équilibre.

Exercice 12

On se propose d'étudier la convergence de la suite (u_n) définie par

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \dfrac{2 + 3u_n}{2 + u_n}, \; n \geq 0. \end{cases}$$

Soit la fonction f définie sur $[0, 4]$ par $f(x) = \dfrac{2+3x}{2+x}$.

1. a. Etudier les variations de f .

   b. Tracer la courbe C de f dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

   c. Déterminer graphiquement, un encadrement de $f(x)$, $x \in [0, 4]$.

   d. Soit D la droite d'équation $y = x$.

   Tracer D et déterminer l'intersection de C et D.

2. a. Vérifier que $u_{n+1} = f(u_n)$, $n \geq 0$.

   b. Placer sur l'axe des abscisses le point d'abscisse le réel $u_0 = 3$.

   Placer alors sur l'axe des ordonnées le réel $u_1 = f(u_0)$.

   Reporter u_1 sur l'axe des abscisses.

   c. En réitérant le procédé décrit précédemment, placer sur l'axe des abscisses les réels u_2, u_3, u_4 et u_5.

   d. Que suggère le graphique concernant la convergence de la suite (u_n) ?

3. a. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $x = \dfrac{2+3x}{2+x}$.

   b. Soit (v_n) la suite définie par $v_n = \dfrac{u_n - 2}{u_n + 1}$.

   - Montrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $\dfrac{1}{4}$.
   - Exprimer v_n en fonction de n.

4. a. Vérifier que pour tout entier n, $u_n = \dfrac{2+\left(\dfrac{1}{4}\right)^{n+1}}{1-\left(\dfrac{1}{4}\right)^{n+1}}$.

   b. Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

Exercices

Chapitre 7

Statistiques

Huygens (1669) : Espérance de vie.

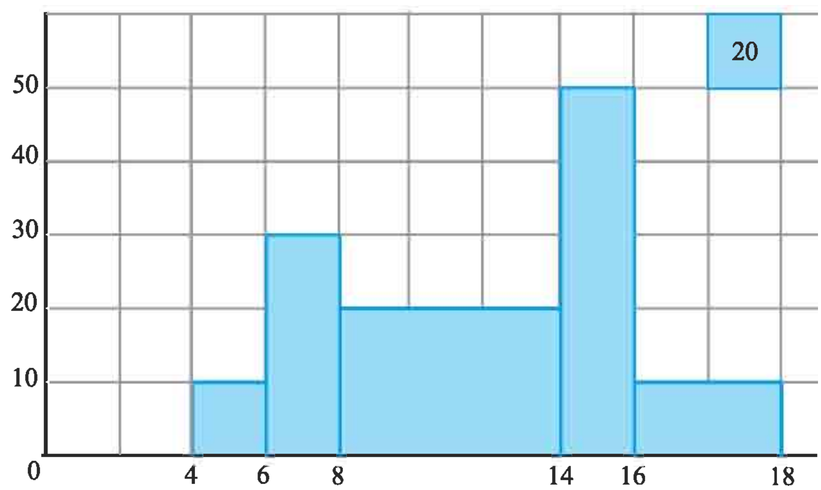
"Par les observations faites à Londres avec beaucoup d'exactitude de 100 personnes conçues, il en meurt [...].
Donc, de 100 personnes, ceux qui atteignent l'âge de 6 ans sont 64, de 16 ans sont 40, de 26 ans sont 25, de 36 ans sont 16, de 46 ans sont 10, de 56 ans sont 6, de 66 ans sont 3, de 76 ans est 1 et de 86 ans est 0.
Qui gagerait qu'un enfant conçu vivrait jusqu'à 6 ans, peut mettre 64 contre 36 ou 16 contre 9. Et qui gagerait [...].
De 100 enfants conçus, il en meurt 36 avant l'âge de 6 ans, lesquels on peut dire ont vécu l'un portant l'autre 3 ans.
Des 64 restants, il en meurt 24 avant l'âge de 16 ans [...]."
Une correspondance de Huygens sur la statistique démographique
Huygens aboutit au total 1822 en multipliant 36 par 3, 24 par 11, jusqu'à 1 par 81 et en ajoutant tous les produits ainsi obtenus puis calcule le quotient de 1822 par 100 et déclare : " Et le quotient qui est ici 18 ans et environ 2 mois et demi, ce n'est pas à dire qu'il soit apparent qu'il vivra si longtemps, car il est beaucoup plus apparent qu'il mourra avant ces termes."

(J Dhombres et al,
Mathématiques au fil des âges,
1987).

Chapitre 7 Statistiques

Activité 1

Déterminer, la classe modale, la médiane, l'écart interquartile et la moyenne de la série statistique représentée par l'histogramme ci-dessous.



Activité 2

On a simulé 10000 lancers d'une pièce de monnaie puis on a organisé les résultats dans le tableau ci-desous.

Nombre de lancers	Nombre d'apparitions de 'pile'	Fréquence de l'issue 'pile'
100	52	0.52
500	242	
1000	502	
2000	1002	
3000	1513	
4000	2034	
5000	2513	
6000	3035	
7000	3544	
8000	4020	
9000	4518	
10000	5008	

1. Compléter le tableau.
2. Tracer dans un repère orthogonal la courbe de fréquence de l'issue 'pile' et la droite d'équation $y = 0.5$.
3. Vers quelle valeur la fréquence de l'issue 'pile' tend-t- telle à se stabiliser ?

1. Série statistique à une variable

1.1. Médiane et quartiles

Lorsqu'une série statistique comprend des valeurs extrêmes, (c'est-à-dire des valeurs très faibles ou très élevées par rapport aux autres valeurs de la série), il est préférable de l'étudier à l'aide de la médiane et de l'écart interquartile, car ces valeurs sont insensibles aux valeurs extrêmes.

Activité 1

Dans le tableau ci-contre on a relevé le nombre de jours de pluie par station durant 14 mois.

133	106	99	123	114	81	111
123	104	60	108	113	77	114

1. Ranger les valeurs de la série dans l'ordre croissant.
2. Déterminer la médiane de la série.
3. Déterminer le premier quartile Q_1 , le troisième quartile Q_3 et l'écart interquartile de la série.

La médiane d'une série est tout réel tel que au moins 50% des valeurs de la série lui sont inférieures et au moins 50% des valeurs de la série lui sont supérieures.

Le premier quartile d'une série statistique est tout réel Q_1 tel que au moins 25% des valeurs de la série lui sont inférieures et au moins 75% des valeurs de la série lui sont supérieures.

Le troisième quartile d'une série statistique est tout réel Q_2 tel que au moins 75% des valeurs de la série lui sont inférieures et 25% des valeurs de la série lui sont supérieures.

L'écart interquartile est une mesure de dispersion égale à la différence entre le troisième quartile et le premier quartile.

Soit une série statistique de valeurs $x_1, \dots ,x_n$ rangées dans l'ordre croissant.

Si n est impair alors le réel $x_{\frac{n+1}{2}}$ est une valeur convenable de la médiane.

Si n est pair, alors tout réel de l'intervalle $\left]x_{\frac{n}{2}}, x_{\frac{n+1}{2}}\right[$ est une valeur convenable de la médiane.

Activité 2

1. Le tableau ci-dessous donne les relevés pluviométriques (en millimètre) des principales stations de la Tunisie pendant l'année agricole 2002 – 2003.

1245.2	626.4	540.7	352.8	214.1
769.9	489.7	290.0	160.3	126.3
752.0	571.0	352.4	148.6	101.2
848.0	601.5	275.6	207.0	114.0
707.3	759.2	426.2	95.8	39.9

a. Regrouper les données en classes d'amplitude 300.
b. Déterminer les centres des classes.
c. Représenter le polygone des fréquences cumulées croissantes.
d. Déterminer la médiane, le premier quartile Q_1, le troisième quartile Q_3 et l'écart interquartile de la série.

2. Reprendre les questions précédentes pour l'année agricole 2003 – 2004.

1106.2	808.7	751.9	663.6	624.7
695.1	627.6	986.4	694.9	758.5
661.7	221.0	356.0	313.3	359.7
320.8	238.9	205.1	182.6	153.1
333.5	206.5	116.0	154.3	69.7

Etant donnée une série à une variable statistique dont les valeurs sont groupées en classes.
L'abscisse du point de la courbe des fréquences cumulées croissantes d'ordonnée 0.5 est une valeur convenable de la médiane de cette série.
L'abscisse du point de la courbe des fréquences cumulées croissantes d'ordonnée 0.25 est une valeur convenable du premier quartile de cette série.
L'abscisse du point de la courbe des fréquences cumulées croissantes d'ordonnée 0.75 est une valeur convenable du troisième quartile de cette série.

1.2. Moyenne et écart-type

Lorsqu'une série statistique semble présenter une distribution symétrique, on l'analyse à l'aide de la moyenne et de l'écart- type.
La moyenne et l'écart- type se prêtent facilement au traitement mathématique.
A l'inverse de la médiane et de l'écart interquartile, la moyenne et l'écart- type prennent en compte toutes les valeurs d'une variable statistique, en particulier, les valeurs extrêmes.

Activité 1

On a mesuré la durée de vie (en heures) de 1000 composants électroniques produits par une usine.
On a obtenu le tableau ci-contre.

1. Déterminer les centres des classes et représenter le polygone des effectifs de cette série.
2. Calculer la moyenne $\overline{X}$ et l'écart-type σ de la série.
3. Déterminer le pourcentage de composants dont la durée de vie appartient à l'intervalle :
$\left[\overline{X}-\sigma,\ \overline{X}+\sigma\right]$; $\left[\overline{X}-2\sigma,\ \overline{X}+2\sigma\right]$; $\left[\overline{X}-3\sigma,\ \overline{X}+3\sigma\right]$.

Durée de vie	Effectifs
[100, 300[	12
[300, 500[	35
[500, 700[	43
[700, 900[	65
[900, 1100[	102
[1100, 1300[	181
[1300, 1500[	205
[1500, 1700[	173
[1700, 1900[	91
[1900, 2100[	70
[2100, 2300[	23

Définition

Soit X une série statistique sur un échantillon de taille n.

On désigne par $x_1, x_2, ..., x_p$,

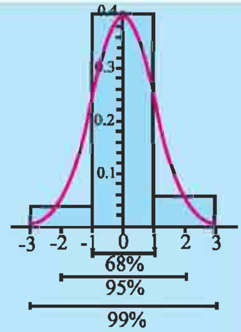
- les valeurs distinctes prises par la variable X si elle est discrète,
- les centres des classes si la variable X est continue.

Alors la moyenne $\overline{X}$, la variance $V(X)$ et l'écart-type σ_X de la série sont les réels définis par $\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{p}n_i x_i$, $V(X)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{p}n_i\left(x_i-\overline{X}\right)^2$, $\sigma_X=\sqrt{V(X)}$, où n_i est l'effectif de la valeur x_i.

Définition

On dit qu'une série statistique X, de moyenne $\overline{X}$ et d'écart-type σ, est une distribution normale ou gaussienne lorsque le polygone des effectifs est tel que environ

- 68% des effectifs sont situés dans l'intervalle $\left[\overline{X}-\sigma, \overline{X}+\sigma\right]$,
- 95% des effectifs sont situés dans l'intervalle $\left[\overline{X}-2\sigma, \overline{X}+2\sigma\right]$
- 99% des effectifs sont situés dans l'intervalle $\left[\overline{X}-3\sigma, \overline{X}+3\sigma\right]$



Dans ce cas, le polygone des effectifs a la forme d'une cloche symétrique par rapport à la moyenne.

Activité 2

On a relevé dans le tableau ci-contre, les tailles (en cm) de 200 personnes.

1. Construire l'histogramme de la série.
2. On donne ci-dessous le mode d'emploi d'une calculatrice pour le calcul de la moyenne $\overline{X}$ et l'écart-type σ de cette série.

Durée de vie	Effectifs
[150, 155[	7
[155, 160[	14
[160, 165[	24
[165, 170[	37
[170, 175[	42
[175, 180[	35
[180, 185[	23
[185, 190[	13
[190, 195[	5

- Choisir le mode de fonctionnement 'statistique', en appuyant sur $\boxed{\text{MODE}}$ $\boxed{1}$.

- Appuyer sur $\boxed{0}$ pour sélectionner le sous mode statistique à une variable.

- Entrer les données en tapant $\boxed{x_i}$ $\boxed{STO}$ $\boxed{n_i}$ $\boxed{M+}$.

(Par exemple pour $x_i = 152.5$ et $n_i = 7$ taper $\boxed{152.5}$ $\boxed{STO}$ $\boxed{7}$ $\boxed{M+}$).

Pour déterminer n, $\overline{X}$ et σ, appuyer successivement sur,

$\boxed{RCL}$ $\boxed{n}$; $\boxed{RCL}$ $\boxed{\overline{X}}$; $\boxed{RCL}$ $\boxed{\sigma_X}$.

3. Déterminer les intervalles de tailles, centrés en $\overline{X}$, dans lesquels se situent 68%, 95% et 99% des élèves.
4. Cette série est-elle une distribution normale ?

Activité 3

Dans un lycée secondaire, la moyenne des QI de 1200 élèves est égale à 100 et l'écart- type est égal à 15.

Le quotient intellectuel $QI = \frac{\text{âge mental}}{\text{âge exact}}$ est exprimé sous forme d'un pourcentage.

On suppose que la série des QI est une distribution normale.
Déterminer le pourcentage des élèves qui ont un QI
a. compris entre 85 et 115.
b. compris entre 70 et 130.
c. compris entre 55 et 145.

2. Série statistique à deux variables

Il arrive que l'on soit amené à effectuer deux séries de mesure sur un même échantillon composé de n individus et que l'on s'interroge sur les relations possibles entre ces mesures.
On dit alors que l'on a une série statistique double (X, Y).

2. 1. Distributions marginales

Définition

Soit (X, Y) une série statistique double sur un échantillon de taille n et soit $(x_i, y_i)_{1\leq i\leq n}$ les valeurs numériques prises respectivement par les variables X et Y.
La distribution marginale de la variable X est la distribution des valeurs $(x_i)_{1\leq i\leq n}$ prises par la variable X.
La distribution marginale de la variable Y est la distribution des valeurs $(y_i)_{1\leq i\leq n}$ prises par la variable Y.

Activité 1

On a relevé dans le tableau ci-dessous, l'âge X et le salaire Y (en dinars) de quatorze employés d'une société.

X(ans)	25	26	28	32	33	33	33	34	36	37	38	48	51	55
Y(dinars)	300	300	700	820	450	820	500	250	460	1500	1500	1900	2800	2200

1. a. Déterminer la distribution marginale de X.
   b. Calculer la moyenne $\overline{X}$ et l'écart- type σ_X.
2. a. Déterminer la distribution marginale de Y.
   b. Calculer la moyenne $\overline{Y}$ et l'écart- type σ_Y.

Activité 2

Dans le tableau suivant, on a reproduit les effectifs d'individus d'un échantillon selon leur poids X (en kg) et leur taille Y(en cm).

Y \ X	[40,45[	[45,50[	[50,55[	[55,60[	Effectif de X selon la taille	Fréquence de X selon la taille
[120,155[	20	9	1	0	30	0.30
[155,160[	2	18	4	1	25	0.25
[160,165[	0	5	12	6	23	0.23
[165,170[	0	1	7	14	22	0.22
Effectif de Y selon le poids	22	33	24	21	100	1
Fréquence de Y selon le poids	0.22	0.23	0.24	0.21	1	

1. Déterminer la distribution marginale de X et celle de Y.
2. Calculer la moyenne $\overline{X}$ et l'écart- type σ_X de la variable X.
3. Calculer la moyenne $\overline{Y}$ et l'écart- type σ_Y de la variable Y.

2.2. Covariance d'une série statistique double

Activité 1

Dans le tableau ci-contre, on a relevé les exportations (en million de dinars) et les importations (en million de dinars) mensuelles de la Tunisie pour l'année 2006.

1. a. Calculer la moyenne $\overline{X}$ et l'écart- type σ_X de la variable X.
   b. Calculer la moyenne $\overline{Y}$ et l'écart- type σ_Y de la variable Y.

Mois	exportations (X)	importations (Y)
Janvier	1081.1	1312.1
Février	1225.6	1367.6
Mars	1378.6	1641.6
Avril	1193.7	1613.1
Mai	1205.8	1827.3
Juin	1374.6	1705.8
Juillet	1283.8	1713.4
Août	1157.8	1494.1
Septembre	1349.4	1859.8
Octobre	1230.1	1668.1
Novembre	1488.5	1902.6

Décembre	1347.3	1660.6

2. Calculer $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \overline{X}\ \overline{Y}$.

Définition

Soit (X, Y) une série statistique double sur un échantillon de taille n. On appelle covariance de (X, Y) le réel, noté $\text{cov}(X, Y)$ défini par

$\text{cov}(X, Y) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \overline{X}\ \overline{Y}$, où le couple (x_i, y_i) est
- la valeur observée pour l'individu i si X et Y sont discrètes,
- le centre des classes si les variables X et Y sont continues.

Il découle de la définition que $\text{cov}(X, Y) = \text{cov}(Y, X)$.

Interprétation de la covariance

La covariance mesure la tendance qu'ont les variables X et Y à varier ensemble.

La covariance est positive si X et Y ont tendance à varier dans le même sens.

La covariance est négative si X et Y ont tendance à varier en sens contraire.

2.3. Ajustement d'une série statistique double

Lorsqu'un statisticien étudie une série statistique double, l'une des questions qu'il se pose est : peut-on prévoir la valeur de Y lorsqu'on connaît la variable X?

Pour répondre à une telle question, le statisticien essaiera de trouver une fonction f qui modélise le phénomène étudié, grâce à la relation $Y = f(X)$.

Dans ce cas, on dit que X est la variable explicative et Y est la variable expliquée.

La fonction f cherchée dépendra de l'allure du nuage de points.

Si le nuage de point a l'allure d'une droite, le statisticien essaiera de trouver une fonction affine f qui sera la plus proche des points du nuage. On dit que le statisticien effectue un ajustement affine. Par conséquent faire un ajustement affine consiste à déterminer deux réels a et b tels que $Y = aX + b$ soit un modèle acceptable du phénomène étudié. La droite d'équation $y = ax + b$ sera appelée droite d'ajustement affine de Y en X.

a. Méthode de Mayer

Activité 1

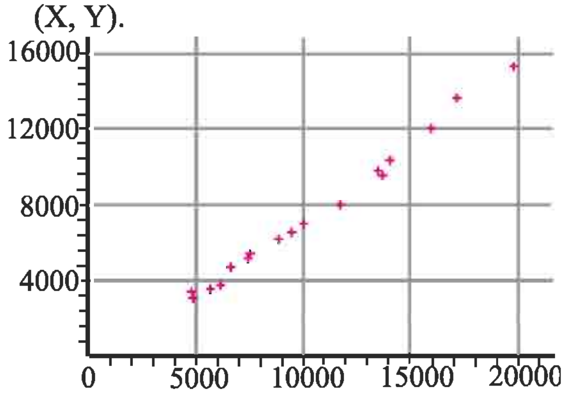
On a relevé dans le tableau ci-après, le montant total (en million de dinars) du commerce extérieur en Tunisie (importations et exportations) depuis l'année 1990 jusqu'à l'année 2004.

Année	Importations (X)	Exportations (Y)
1990	4826.4	3087.4
1991	4788.9	3417.1
1992	5688.8	3549.7
1993	6172.1	3760
1994	6647.3	4696.6
1995	7464.3	5172.5
1996	7498.8	5372
1997	8793.5	6147.9
1998	9489.5	6518.3
1999	10070.5	6966.9
2000	11738	8004.8
2001	13697.3	9536.2
2002	13510.9	9748.6
2003	14038.9	10342.6
2004	15960.3	12054.9
2005	17101.6	13607.6
2006	19766.1	15316.3

1. a. Calculer la moyenne $\overline{X}$ et l'écart- type σ_X de la variable X.

   b. Calculer la moyenne $\overline{Y}$ et l'écart- type σ_Y de la variable Y.

2. On a représenté ci-dessous, dans un repère, le nuage de points de la série double (X, Y).



Soit (X, Y) une série statistique double de valeurs $(x_i, y_i)_{1 \le i \le n}$.
L'ensemble des points M_i de coordonnées (x_i, y_i) dans un repère orthogonal est appelé nuage de points représentant la série statistique.
Le point moyen du nuage est le point dont les coordonnées sont les moyennes $\overline{X}$ et $\overline{Y}$.

Placer le point moyen $G\left(\overline{X}, \overline{Y}\right)$.

3. On scinde l'ensemble des 17 points du nuage en deux parties. La première partie (I) correspond aux valeurs observées entre 1990 et 1998 et la deuxième partie (II) correspond

aux valeurs observées entre 1999 et 2006.

On désigne par G_1 et G_2 les points moyens respectifs de la partie (I) et de la partie (II).

a. Déterminer les coordonnées de G_1 et G_2.

Vérifier que G, G_1 et G_2 sont alignés et tracer la droite (G_1G_2).

b. Comment semblent se répartir les points du nuage autour de la droite (G_1G_2).

c. Donner alors un ajustement affine de la série double (X, Y).

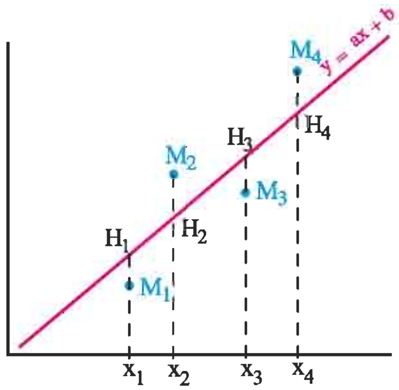
d. Donner une estimation du montant des exportations si le montant de l'importation est égal à 17000 millions de dinars.

Principe de la méthode de Mayer

Soit un nuage de points représentant une série statistique double (X, Y) et G son point moyen.
On scinde le nuage en deux nuages de points et on considère alors les points moyens G_1 et G_2 de ces deux nuages. La droite (G_1G_2) définit un ajustement affine du nuage de points représentant la série statistique double (X, Y).
La droite (G_1G_2) est appelée droite de Mayer et passe par le point moyen G du nuage global.

b. Méthode d'ajustement par les moindres carrés

Nous avons représenté ci-dessous le nuage de points $M_i(x_i, y_i)$, $1 \le i \le n$ d'une série statistique double, ainsi qu'une droite D d'équation $y = ax + b$.
Pour tout entier $1 \le i \le n$, on note $H_i(x_i, z_i)$ le point de la droite D de même abscisse que M_i.



Le principe de la méthode d'ajustement par les moindres carrés consiste à déterminer les réels a et b tels que la somme $\sum_{i=1}^{n} M_iH_i^2$ soit minimale.

Définition

Soit (X,Y) une série statistique double sur un échantillon de taille n.

La droite d'équation $y = \dfrac{\text{cov}(X,Y)}{\sigma_X^2}(x - \overline{X}) + \overline{Y}$ est appelée droite des moindres carrés de Y en X, ou droite de régression de Y en X.

La droite d'équation $x = \dfrac{\text{cov}(X,Y)}{\sigma_Y^2}(y - \overline{Y}) + \overline{X}$ est appelée droite des moindres carrés de X en Y, ou droite de régression de X en Y.

Activité 2

Dans le tableau ci-contre, on a relevé le nombre de jours de pluie X et la quantité de pluie Y (en mm) correspondants dans huit villes durant le mois de janvier 2006.

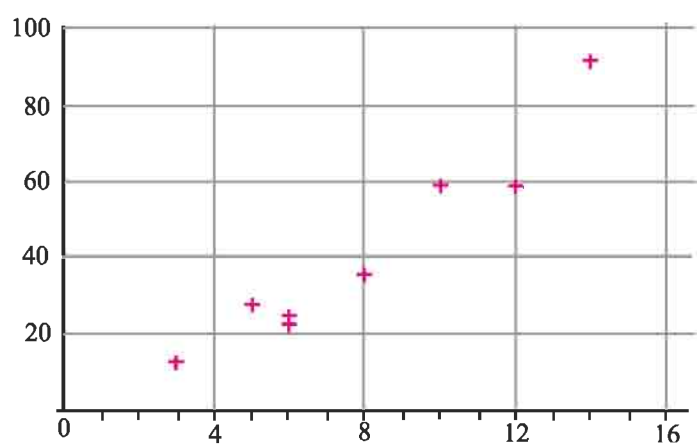
Nombre de jours (X)	Quantité (Y)
14	92
12	59
10	59
6	24
8	36
6	23
5	28
3	13

1. a. Calculer la moyenne $\overline{X}$ et l'écart- type σ_X de la variable X.

   b. Calculer la moyenne $\overline{Y}$ et l'écart- type σ_Y de la variable Y.

2. Déterminer la covariance la série (X, Y).

3. On a représenté ci-dessous les points $M(x_i, y_i)$.



a. Placer le point $G(\overline{X}, \overline{Y})$.

b. Comment semblent se répartir les points du nuage ?

c. Donner alors un ajustement affine par les moindres carrés de la série double (X, Y).

4. Donner une estimation de la quantité de pluie pour 13 jours de pluie.

c. Coefficient de corrélation linéaire

On peut toujours au vu des formules précédentes construire une droite de régression.
Mais parfois cette dernière n'est d'aucune efficacité, dans la mesure où les prédictions que l'on fait à partir de cette droite ne sont pas raisonnables.
C'est le cas lorsqu'il n'existe pas réellement de corrélation entre les deux variables.
Pour savoir si il est pertinent d'ajuster un nuage de point par les moindres carrés, on calcule un réel appelé coefficient de corrélation linéaire.

Définition

Soit (X, Y) une série statistique double. On appelle coefficient de corrélation linéaire le réel noté ρ_{XY} défini par $\rho_{XY} = \dfrac{\text{cov}(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$.

Propriétés

Soit (X,Y) une série statistique double. Alors $-1 \leq \rho_{XY} \leq 1$.
Le coefficient de corrélation linéaire est invariant par changement d'unité ou d'origine.

Interprétation du coefficient de corrélation linéaire.

Les statisticiens conviennent que lorsque $|\rho_{XY}| > \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, l'ajustement affine est justifié et les prédictions faites au moyen de cet ajustement sont raisonnables.

Activité 3

On a relevé ci- dessous les observations météologiques du 07-05-2007 à 14 : 00.

Ville	Force du vent (en km/h)(X)	Humidité(%) (Y)	Nébulosité (Z)
Jendouba	28	77	7
Bizerte	32	91	6
Tunis	22	60	7
Nabeul	20	84	5
Monastir	28	52	6
Kairouan	16	40	6
Sfax	12	30	5
Gabès	12	65	3

Nébulosité
0 : Ciel clair
1-2 : Peu nuageux
3-4 : Nuageux
5-6 : Très nuageux
7-8 : Couvert
9: Invisible.

Tozeur	8	33	3
Gafsa	24	31	6

1. a. Calculer la moyenne $\overline{X}$ et l'écart- type σ_X de la variable X.
   b. Calculer la moyenne $\overline{Y}$ et l'écart- type σ_Y de la variable Y.
   c. Calculer la moyenne $\overline{Z}$ et l'écart- type σ_Z de la variable Z.
2. a. Déterminer la covariance de la série (X, Y).
   b. Calculer le coefficient de corrélation linéaire de la série (X, Y).
   c. Un ajustement par les moindres carrés de la série (X, Y) est-il justifié ?
3. a. Déterminer la covariance de la série (X, Z).
   b. Calculer le coefficient de corrélation linéaire de la série (X, Z).
   c. Un ajustement par les moindres carrés de la série (X, Z) est-il justifié ?

Activité 4

Une entreprise fabrique un produit de grande diffusion.
On se propose de déterminer la fonction de demande à partir d'une étude statistique des ventes.
Dans le tableau ci-contre on a relevé, la quantité demandée Y(exprimée en milliers d'unités) correspondante au prix unitaire X (en dinars)

Prix	Quantité demandée
0.65	363
1.3	260
1.1	292
1.05	295
0.95	315
0.95	309

1. On donne ci-dessous le mode d'emploi d'une calculatrice pour le calcul du coefficient de corrélation linéaire.

- Choisir le mode de fonctionnement 'statistique', en appuyant sur $\boxed{\text{MODE}}$ $\boxed{1}$.
- Appuyer sur $\boxed{1}$ pour sélectionner le sous mode statistique à deux variables.
- Entrer les données en tapant $\boxed{x_i}$ $\boxed{\text{STO}}$ $\boxed{y_j}$ $\boxed{\text{M+}}$

(Par exemple pour le couple $(0.65, 363)$ taper $\boxed{0.65}$ $\boxed{\text{STO}}$ $\boxed{363}$ $\boxed{\text{M+}}$).

- Pour déterminer, par exemple, n et $\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ appuyer successivement sur,

$\boxed{\text{RCL}}$ $\boxed{n}$; $\boxed{\text{RCL}}$ $\boxed{\sum xy}$.

- Pour déterminer la valeur de $\mathrm{cov}(X,Y)$, appuyer sur

$\boxed{\mathrm{RCL}}\ \boxed{\sum xy}\ \boxed{\div}\ \boxed{6}\ \boxed{-}\ \boxed{\mathrm{RCL}}\ \boxed{\overline{X}}\ \boxed{\times}\ \boxed{\mathrm{RCL}}\ \boxed{\overline{Y}}$.

2. a. Déterminer un ajustement par les moindres carrés de la série double (X, Y).

   c. Tracer dans un repère orthogonal la droite D d'ajustement affine correspondante.

   d. Donner une estimation du prix de vente correspondant à 300 milles unités demandées.

3. On suppose que la quantité offerte $f(x)$ (exprimée en milliers d'unités) en fonction du prix est donnée par $f(x) = 320x$.

   a. Tracer dans le même repère la droite D' d'équation $y = 320x$.

   b. Déterminer le prix d'équilibre c'est à dire le prix pour lequel l'offre est égale à la demande.

Série statistique à une variable

Soit une série statistique de valeurs $x_1, \dots, x_n$ rangées dans l'ordre croissant.

Si n est impair alors le réel $x_{\frac{n+1}{2}}$ est une valeur convenable de la médiane.

Si n est pair, alors tout réel de l'intervalle $\left]x_{\frac{n}{2}}, x_{\frac{n+1}{2}}\right[$ est une valeur convenable de la médiane.

Soit X une série statistique sur un échantillon de taille n.
On désigne par $x_1, x_2, \dots, x_p$.
- les valeurs distinctes prises par la variable X si elle est discrète,
- les centres des classes si la variable X est continue.

Alors la moyenne $\overline{X}$, la variance $V(X)$ et l'écart-type σ_X de la série sont les réels définis par $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{p} n_i x_i$, $V(X) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{p} n_i\left(x_i - \overline{X}\right)^2$, $\sigma_X = \sqrt{V(X)}$, où n_i est l'effectif de la valeur x_i.

Série statistique à deux variables

Soit (X, Y) une série statistique double sur un échantillon de taille n. On appelle covariance de (X, Y) le réel, noté $\operatorname{cov}(X, Y)$ défini par

$\operatorname{cov}(X, Y) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \overline{X}\,\overline{Y}$, où le couple (x_i, y_i) est
- la valeur observée pour l'individu i si X et Y sont discrètes,
- le centre des classes si les variables sont continues.

Soit (X, Y) une série statistique double sur un échantillon de taille n.

La droite d'équation $y = \frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sigma_X^2}\left(x - \overline{X}\right) + \overline{Y}$ est appelée droite des moindres carrés de Y en X, ou droite de régression de Y en X.

La droite d'équation $x = \frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sigma_Y^2}\left(y - \overline{Y}\right) + \overline{X}$ est appelée droite des moindres carrés de X en Y, ou droite de régression de X en Y.

Soit (X, Y) une série statistique double. On appelle coefficient de corrélation linéaire le réel noté ρ_{XY} défini par $\rho_{XY} = \dfrac{\text{cov}(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$.

Exercice 1

On a mesuré la fluorescence de la chlorophylle (en millivolts) dans un océan.

Dans le tableau ci-contre, on a regroupé en classes ces mesures de fluorescence.

fluorescence	Effectif
[15, 20[	8
[20, 25[	13
[25, 30[	21
[30, 35[	20
[35, 40[	14
[40, 45[	4

1. Déterminer le centre de chaque classe et représenter le polygone des effectifs de cette série.
2. Calculer la moyenne $\overline{X}$ et l'écart-type σ de la série.
3. a. Déterminer le pourcentage de chlorophylle dont la fluorescence appartient à l'intervalle
$\left[\overline{X}-\sigma,\ \overline{X}+\sigma\right]$; $\left[\overline{X}-2\sigma,\ \overline{X}+2\sigma\right]$; $\left[\overline{X}-3\sigma,\ \overline{X}+3\sigma\right]$
b. Interpréter les résultats trouvés.

Exercice 2

On a effectué des prélèvements sanguins sur un échantillon d'individus, en vue de mesurer les taux de cholestérol et de glycémie. On admet que les taux suivent une distribution normale.

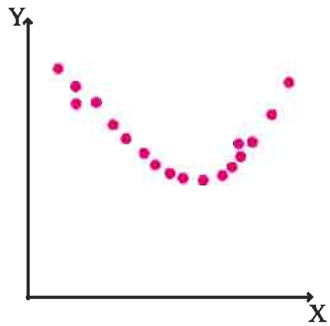
1. Sachant que pour le cholestérol, 95% des taux observés se trouvent entre 0.5 et 1.5g/l.
   a. Calculer la moyenne et l'écart- type de l'échantillon.
   b. Dans quel intervalle se trouvent 99% des taux ?
2. Sachant que pour la glycémie, la moyenne observée est de 0.97g/l et l'écart- type est de 0.09g/l.
   a. Déterminer le pourcentage des individus dont le taux de glycémie est compris entre 0.88 et 1.06 g/l.
   b. Déterminer le pourcentage des individus dont le taux de glycémie est compris entre 0.79 et 1.15 g/l.
   c. Déterminer le pourcentage des individus dont le taux de glycémie est compris

entre 0.7 et 1.24 g/l.

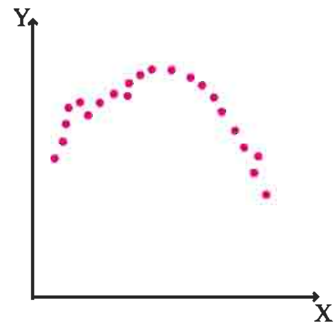
Exercice 3

Pour chacun des graphiques suivants, indiquer si le nuage de points justifie la recherche d'un ajustement affine.

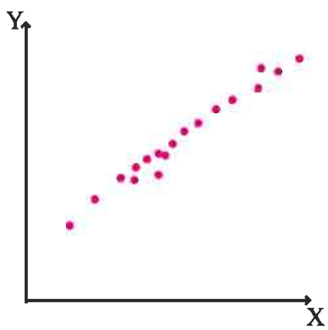
1.



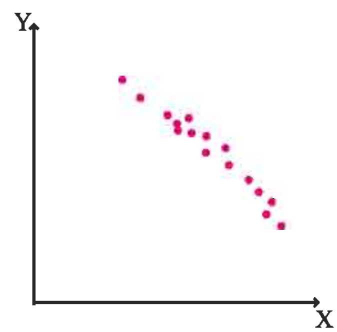
2.



3.



4.



Exercice 4

Une agence bancaire effectue une étude pour savoir s'il existe une relation entre le montant mensuel des chèques émis et le solde moyen mensuel des comptes concernés. Les résultats sont donnés dans le tableau ci-contre.

Montant mensuel des chèques X (en dinars)	Solde moyen mensuel Y (en dinars)
200	700
450	920
800	1100
1100	1330
1350	1800
1500	2100

1. Représenter dans un repère orthogonal le nuage de points de la série double (X, Y).

2. a. Calculer la moyenne $\overline{X}$ et l'écart- type σ_X de la variable X.

b. Calculer la moyenne $\overline{Y}$ et l'écart- type σ_Y de la variable Y.

c. Calculer la covariance de la série (X, Y).

d. Calculer le coefficient de corrélation linéaire.

3. Un ajustement par les moindres carrés de la série (X, Y) est-il justifié ?

Exercice 5

Dans le tableau ci-contre, on a relevé le nombre d'heures d'insolation X et la quantité de pluie Y (en mm) correspondants à neuf villes durant le mois de janvier 2006.

Insolation X	Quantité Y
149	92
146	59
133	59
121	141
186	24
167	36
198	23
208	28
202	13

1. a. Calculer la moyenne $\overline{X}$ et l'écart- type σ_X de la variable X.

   b. Calculer la moyenne $\overline{Y}$ et l'écart- type σ_Y de la variable Y.

2. Déterminer la covariance de la série (X, Y).

3. Calculer le coefficient de corrélation linéaire.
   Un ajustement par les moindres carrés est-il justifié ?

Exercice 6

Dans le tableau ci-contre on a relevé le montant des ventes Y (en dinars) d'un produit en conséquence des frais de publicité X (en dinars) engagés par une entreprise durant les six dernières années.

X	Y
1700	250 000
2500	281 000
2800	292 000
2200	278 000
2700	295 000
2500	290 000

1. Représenter dans un repère orthogonal le nuage de points de la série double (X, Y).

2. a. Calculer la moyenne $\overline{X}$ et l'écart- type σ_X de la variable X.

   b. Calculer la moyenne $\overline{Y}$ et l'écart- type σ_Y de la variable Y.

   c. Calculer la covariance de la série (X, Y).

   d. Calculer le coefficient de corrélation linéaire.

3. Déterminer un ajustement affine par la méthode de Meyer.
4. Déterminer un ajustement affine par les moindres carrés.
5. Donner une estimation des ventes correspondantes à 3000 dinars de frais de publicité.

Exercice 7

Le tableau ci-contre donne l'effectif des ménages X et l'effectif des logements Y de huit gouvernorats en 2004.

Gouvernorat	Ménages	Logements
Tunis	244018	265585
Ariana	101327	117100
Ben Arous	117901	136064
Manouba	70750	74266
Nabeul	162691	186584
Zaghouan	33532	34959

1. Calculer le coefficient de corrélation linéaire.

2. Déterminer un ajustement par les moindres carrés de la série double (X, Y) puis donner une estimation des logements pour 5000 ménages.

Bizerte	119976	137176
Béja	68584	72058

Exercice 8

Le tableau ci-contre indique l'évolution du nombre de médecins en Tunisie de l'année 1990 à l'année 2003.

1. Tracer le nuage de la série (X, Y).
2. Déterminer le point moyen $G(\overline{X}, \overline{Y})$.
3. Déterminer un ajustement affine par la méthode de Mayer.
4. Donner une estimation du nombre de médecins en Tunisie dans l'année 2010 ?

Année	Rang de l'année (X)	Nombre de médecins (Y)
1990	1	4425
1991	2	4500
1992	3	5099
1993	4	5257
1994	5	5344
1995	6	5965
1996	7	6177
1997	8	6464
1998	9	6819
1999	10	7149
2000	11	7444
2001	12	7767
2002	13	7964
2003	14	8189

Exercice 9

Une entreprise envisage la fabrication d'un nouveau produit.

X	350	400	450	500	550	600
Y	140	120	100	95	85	70

Une étude a permis d'établir le tableau ci-contre où, pour différentes observations, X désigne la quantité du produit que la clientèle est disposée à acheter, et Y le prix de vente (en dianrs) d'une unité.

1. Calculer le coefficient de corrélation ρ_{XY}.
2. Déterminer une équation de la droite de régression de Y en X. (les coefficients seront arrondis à 10^{-1} prés).
3. Soit $r(X)$ la recette correspondant à la vente de y articles au prix unitaire x.

   a. Montrer que $r(x) = (226.5 - 0.3x)x$.

   b. Etudier le variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = -0.3x^2 + 226.5x$.

   c. En déduire le prix de vente pour lequel la recette est maximale.

Calculer cette recette maximale.

Exercice 10

Dans certains cas l'ajustement linéaire n'est pas adapté à une série (X, Y), mais il est possible de l'adapter à la série $(X, \ln Y)$.

Le tableau ci-dessous indique l'évolution du personnel paramédical tunisien dans le secteur public (techniciens supérieurs, infirmiers, auxiliaires de santé) de 1995 à 2004

Année	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004
Paramédicaux	25874	26130	26369	26676	27050	27392	30292	28629	29976	29584

1. En numérotant les années de 1 à 10, compléter le tableau suivant

Rang de l'année X	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Paramédicaux (Y)	25874	26130	26369	26676	27050	27392	30292	28629	29976	29584
$Z = \ln(Y)$ (à 10^{-3} près)										

2. a. Calculer le coefficient de corrélation et justifier que l'on peut procéder à un ajustement affine par les moindres carrés de la série (X, Z).

   b. Donner la droite de régression de Z en X.

3. a. Donner une estimation de Z en 1010.

   b. Déterminer alors une estimation du nombre de paramédicaux en 2010.

Chapitre 8

Probabilités

Un homme du monde a proposé deux problèmes à Pascal et Roberval,
le second fut à l'origine des calculs de probabilité.
C'est le problème "des points" ou "des parties" ou "de division".
Le prix d'un tournoi est gagné par le premier des participants qui obtient un certain nombre de points.
Comment partager ce prix si le tournoi est interrompu ?
Toutes les solutions qui en furent ensuite données étaient fausses.
Le calcul des probabilités fut présenté au monde en 1657 par Huyghens.
Pour la première fois, les concepts fondamentaux, énoncés et correctement utilisés, sont dans le domaine public.

(Dieudonné,
Abrégé d'histoire des mathématiques,
1978).

Chapitre 8 Probabilités

Activité 1

Pour numéroter les 30 appartements d'une résidence, on utilise des plaques à un chiffre.

1. Combien faut- il de plaques portant le chiffre 0 ?
2. Combien faut- il de plaques portant le chiffre 1 ?
3. Combien faut- il de plaques portant le chiffre 2 ?
4. Combien faut- il de plaques portant le chiffre 8 ?
5. Combien faut- il de plaques portant le chiffre 9 ?

Activité 2

Un sac contient des boules numérotées comme l'indique le tableau suivant

N°	1	2	3	4	5	6
Nombre de boules	17	16	16	18	17	16

1. a. Combien y a t-il de boules dans le sac ?
   b. Combien de boules ont un numéro pair?
   c. Combien de boules ont un numéro impair ?
2. On tire au hasard une boule.
   Répondre par vrai ou faux à chacune des affirmations suivantes.
   a. Il y a plus de chances d'obtenir un numéro pair que d'obtenir un numéro impair.
   b. Il y a 4 chances sur 25 de tirer une boule numérotée 6.

Activité 3

Dans un jeu de 32 cartes, on tire au hasard une carte.
Répondre par vrai ou faux.

1. Il y a une chance sur quatre de tirer une carte carreau.
2. Il y a une chance sur deux de tirer une carte trèfle ou carreau.
3. Il y a une chance sur trente deux de tirer un roi cœur.

1. Dénombrement

Activité 1

Dénombrer toutes les compositions c'est compter leur nombre.

1. Une famille a deux enfants.
   Combien y a-t-il de compositions possibles selon le sexe des enfants.
2. Une famille a trois enfants.
   A l'aide d'un arbre de choix, déterminer toutes les compositions possibles de cette famille.
3. Une famille a quatre enfants.
   A l'aide d'un arbre de choix dénombrer toutes les compositions possibles de cette famille.

Tirages successifs avec remise

Activité 2

Une urne contient quatre jetons numérotés 2, 4, 5, 6.

1. On tire successivement et avec remise deux jetons et on note leurs numéros dans l'ordre où on les a tirés.
   a. A l'aide d'un arbre de choix, dénombrer tous les tirages possibles.
   b. Dénombrer tous les tirages commençant par 2.
   c. Dénombrer tous les tirages ne contenant pas 5.
2. On tire successivement et avec remise quatre jetons et on note leurs numéros dans l'ordre où on les a tirés.
   a. Dénombrer tous les tirages possibles.
   b. Dénombrer tous les tirages commençant par 2.
   c. Dénombrer tous les tirages ne contenant pas 5.

Activité 3

Soit l'ensemble E = {●, ▬} des deux symboles utilisés dans le code morse.

1. A l'aide d'un arbre de choix, dénombrer tous les signaux morse à trois symboles.
2. Parmi les signaux morse à trois symboles,
   a. combien ne contiennent aucune fois le symbole ● ?
   b. combien contiennent au moins une fois le symbole ● ?
   c. combien contiennent exactement une fois le symbole ● ?
   d. combien commencent par le symbole ▬ ?

Tirages successifs sans remise

Activité 4

Une urne contient quatre jetons numérotés 2, 4, 5, 6.

1. On tire successivement et sans remise deux jetons et on note leurs numéros dans l'ordre où on les a tirés.
   a. A l'aide d'un arbre de choix, dénombrer tous les tirages possibles.
   b. Dénombrer tous les tirages commençant par 2.
   c. Dénombrer tous les tirages ne contenant pas 5.
2. On tire successivement et sans remise trois jetons et on note leurs numéros dans l'ordre où on les a tirés.
   a. Dénombrer tous les tirages possibles.
   b. Dénombrer tous les tirages commençant par 2.
   c. Dénombrer tous les tirages contenant 2.
   d. Dénombrer tous les tirages ne contenant pas 5.

Activité 5

Un code comporte quatre chiffres distincts choisis parmi les chiffres 0, 1, 2, …, 9.

1. Dénombrer les codes possibles.
2. Dénombrer les codes commençant par 1.
3. Dénombrer les codes commençant par 31.
4. Dénombrer les codes contenant des chiffres inférieurs ou égaux à 2.
5. Dénombrer les codes contenant des chiffres inférieurs ou égaux à 3.

Activité 6

Dans une association, un bureau est composé de 10 personnes, 8 hommes et 2 femmes. Ils se réunissent pour choisir au hasard un président, un trésorier et un secrétaire.

1. Dénombrer les choix possibles.
2. Dénombrer les choix comportant 3 hommes.
3. Dénombrer les choix comportant au moins une femme.
4. Dénombrer les choix où le président est un homme et le trésorier est une femme.

Tirages simultanés

Activité 7

On extrait au hasard 4 cartes d'un jeu de 32 cartes, on obtient une « main ».

1. Dénombrer les mains possibles.
2. Dénombrer les mains contenant quatre dames.
3. Dénombrer les mains contenant quatre piques.
4. Dénombrer les mains contenant un valet, une dame, un roi et un as.

Activité 8

On considère l'ensemble $E = \{a, b, c, d\}$.

1. Déterminer puis dénombrer toutes les parties de E à quatre éléments.
2. Déterminer puis dénombrer toutes les parties de E à trois éléments.
3. Déterminer puis dénombrer toutes les parties de E à deux éléments.
4. Déterminer puis dénombrer toutes les parties de E à un élément.

Soit $E = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ un ensemble à n éléments et p un entier naturel tel que $0 \leq p \leq n$.
Le nombre de parties à p éléments de E est l'entier $\frac{n!}{(n-p)!p!}$, noté C_n^p, (on lit « C, n, p »), ou $\binom{n}{p}$, égal à $\frac{n!}{(n-p)!p!}$.

Activité 9

Pour calculer C_{25}^6, à l'aide de la calculatrice, on appuie sur les touches $\boxed{25}$ $\boxed{\text{nCr}}$ $\boxed{6}$ $\boxed{=}$, la calculatrice affiche le nombre 177100.

Utiliser la calculatrice pour calculer C_{30}^{26}, C_{40}^{35} et C_{110}^{3}.

Activité 10

Une urne contient douze boules blanches, six boules rouges et deux boules vertes.
On extrait simultanément trois boules de l'urne.

1. Dénombrer les tirages possibles.
2. Dénombrer les tirages contenant trois boules blanches.
3. Dénombrer les tirages contenant trois boules rouges.
4. Dénombrer les tirages contenant trois boules vertes.

2. Espace probabilisé fini

Activité 1

Une expérience consiste à lancer une pièce de monnaie deux fois de suite.
On note à chaque fois le côté exposé (P pour pile et F pour face).

1. Dénombrer les issues de cette expérience.
2. Déterminer le cardinal de chacun des événements ci-dessous.

A : « La face pile apparaît une seule fois ».
B : « Obtenir P pour la première fois au deuxième lancer ».

3. Déterminer le cardinal de $A \cap B$ et de $A \cup B$.

Une expérience aléatoire est une expérience dont le résultat est soumis au hasard et est donc imprévisible.
L'ensemble E des issues d'une expérience aléatoire est appelé univers.
Les éléments de E sont appelés événements élémentaires.
Une partie A de E est appelée événement.

Définition

Soit E l'univers fini d'une expérience aléatoire et $\mathscr{P}(E)$ l'ensemble des événements de E.
On appelle probabilité sur E, toute application p, de $\mathscr{P}(E)$ dans $[0,1]$ vérifiant les conditions ci-dessous.

- L'image $p(E)$ de E est égale à 1.
- L'image $p(\varnothing)$ de l'ensemble vide est égale à 0.
- L'image $p(A)$ d'un événement A, est la somme des images des événements

élémentaires de A, c'est-à-dire $p(A)=\sum_{a_i \in A} p(a_i)$.

En particulier $p(E)=\sum_{a_i \in E} p(a_i)=1$.

Vocabulaire

Le triplet $(E, \mathscr{P}(E), p)$ est appelé espace probabilisé fini.

L'événement E est appelé événement certain.
L'événement vide est appelé événement impossible.
L'événement contraire d'un événement A est noté $\overline{A}$.
Deux événements sont dits incompatibles si leur intersection est vide.

Activité 2

On lance un dé cubique dont les faces sont numérotées de 1 à 6.
On suppose que la probabilité d'apparition de 6 est le triple de la probabilité d'apparition de chacun des nombres 1, 2, 3, 4 et 5.
1. Déterminer la probabilité de chaque événement élémentaire.
2. Déterminer la probabilité de chacun des événements ci-dessous.

A « obtenir un nombre pair »,
$\overline{A}$ « obtenir un nombre impair »,
B « obtenir un nombre impair inférieur ou égal à 3 »,
$\overline{B}$ « obtenir un nombre impair strictement supérieur à 3»,
D « obtenir un multiple de 3 ou un nombre pair ».

Propriétés

Soit E l'univers fini d'une expérience aléatoire et p une probabilité sur E.
Pour tout événement A, $p(\overline{A}) = 1 - p(A)$.
Pour tous événements A et B, $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$.
Pour tous événements incompatibles A et B, $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$.

Activité 3

Un centre de loisir accueille 200 enfants. Deux sports sont proposés : le football et le tennis.
A la question : Qui pratique du football ? 120 enfants ont levé la main.
A la question : Qui pratique du tennis ? 90 enfants ont levé la main.
A la question : Qui pratique du football et du tennis ? 30 enfants ont levé la main.

1. Compléter le tableau ci-dessous.

Pourcentage des enfants pratiquant seulement du football	
Pourcentage des enfants pratiquant seulement du tennis	
Pourcentage des enfants pratiquant du football et du tennis	
Pourcentage des enfants ne pratiquant aucun sport	
Total	100

2. On choisit un enfant au hasard.
   a. Quelle est la probabilité qu'il ne pratique aucun sport ?
   b. Quelle est la probabilité qu'il pratique seulement du football ?
   c. Quelle est la probabilité qu'il pratique du football et du tennis ?

3. Equiprobabilité

Lorsqu'on lance une pièce de monnaie bien équilibrée, ou on jette un dé non pipé ou on effectue un tirage au hasard, les issues ont la même probabilité de réalisation, on dit qu'on est en présence d'une situation d'équiprobabilité.

Définition et théorème

Soit E l'univers fini d'une expérience aléatoire dans une situation d'équiprobabilité et $\mathscr{P}(E)$ l'ensemble des parties de E.

L'application p définie de $\mathscr{P}(E)$ dans $[0,1]$ par $p(a) = \dfrac{1}{\text{card}(E)}$, pour tout événement élémentaire a de E est une probabilité sur E, appelée probabilité uniforme.

Propriété

Si $(E, \mathscr{P}(E), p)$ est un espace probabilisé fini tel que la probabilité p est uniforme, alors $p(A) = \dfrac{card(A)}{card(E)}$, pour tout événement A de E.

Activité 1

La production d'une usine est assurée par deux machines A et B.
Dans un lot de 10 000 pièces,

- 8 % des pièces sont défectueuses.
- 25% des pièces proviennent de la machine B
- 4% des pièces provenant de la machine A sont défectueuses.

1. Compléter le tableau ci-dessous.

	Pièces défectueuses	Pièces non défectueuses	Total
Machine A			
Machine B			
Total			10 000

2. On choisit une pièce au hasard.
   a. Quelle est la probabilité qu'elle soit défectueuse ?
   b. Quelle est la probabilité qu'elle soit défectueuse et provienne de la machine A ?
   c. Quelle est la probabilité qu'elle soit défectueuse et provienne de la machine B ?

Activité 2

On lance deux dés un rouge et un vert, dont les faces sont numérotées de 1 à 6.

1. a. Compléter le tableau suivant.

Dé rouge / Dé vert	1	2	3	4	5	6
1	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)
2						
3						
4						
5						
6						

b. Déterminer la probabilité de chaque événement élémentaire.

2. Déterminer la probabilité de chacun des événements ci-dessous.
   A « obtenir un nombre pair et un nombre impair »,
   B « obtenir deux nombres pairs»,
   C « obtenir deux nombres impairs »,
   D « obtenir deux nombres supérieurs ou égaux à 4 »,
   E « obtenir deux nombres distincts ».

Activité 3

On lance trois fois de suite une pièce de monnaie non truquée dont les faces sont notées P et F.

1. a. A l'aide d'un arbre de choix, déterminer toutes les issues possibles.
   b. Déterminer la probabilité de chaque événement élémentaire.
2. Déterminer la probabilité de chacun des événements ci-dessous.
   A « obtenir trois fois pile »,
   B « obtenir au moins une fois face »,
   C « obtenir pile au premier lancer »,
   D « obtenir une seule fois face».

4. Loi binomiale

Activité 1

A une loterie la probabilité de gagner est égale à 0.2 et cette probabilité reste identique à chaque jeu.

1. On joue une fois. Quelle est la probabilité de perdre ?
2. On joue deux fois.
   a. Quelle est la probabilité de gagner la première fois et de perdre la deuxième ?
   b. Quelle est la probabilité de perdre la première fois et de gagner la deuxième ?
   c. Quelle est la probabilité de gagner exactement une fois ?
3. On joue trois fois.
   a. Quelle est la probabilité de gagner la première fois et de perdre les deux autres ?
   b. Quelle est la probabilité de gagner exactement une fois ?

Théorème

Soit E une expérience aléatoire constituée de n épreuves identiques, indépendantes et n'ayant que deux issues : succès ou échec.
Soit p la probabilité de l'événement succès.
La probabilité d'obtenir k succès est le réel $p(k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$, $k \in \{0, 1, \dots, n\}$.
L'application $p : \{0, 1, 2, \dots, n\} \to [0, 1]$

$$k \mapsto C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$$

est appelée loi binomiale de paramètres (n, p) que l'on note B(n, p).

Activité 2

Une urne contient 4 boules blanches et 6 boules noires.

1. On tire au hasard une boule de l'urne.
   a. Quelle est la probabilité d'obtenir une boule blanche ?
   b. Quelle est la probabilité d'obtenir une boule noire ?
2. On répète l'expérience deux fois.
   a. Quelle est la probabilité de n'obtenir aucune boule blanche ?
   b. Quelle est la probabilité d'obtenir exactement une boule blanche ?
   c. Quelle est la probabilité d'obtenir deux boules blanches ?
3. On répète l'expérience trois fois.
   a. Quelle est la probabilité d'obtenir aucune boule blanche ?
   b. Quelle est la probabilité d'obtenir exactement une boule blanche ?
   c. Quelle est la probabilité d'obtenir exactement deux boules blanches ?
   d. Quelle est la probabilité d'obtenir exactement trois boules blanches ?

Activité 3

La probabilité qu'un joueur de fléchettes atteigne sa cible est égale à 0.8.

On suppose que le joueur effectue trois tirs.

1. Déterminer la probabilité de l'événement « le joueur atteint trois fois sa cible ».
2. Déterminer la probabilité de l'événement « le joueur n'atteint aucune fois sa cible ».
3. Déterminer la probabilité de l'événement « le joueur atteint au moins une fois sa cible ».

Activité 4

Un magasin emploie 80 personnes. La probabilité que l'une quelconque d'entre elles s'absente est égale à 0.1.

1. Quelle la probabilité qu'aucun des employés ne s'absente ?
2. Quelle la probabilité que 8 employés s'absentent ?
3. Quelle la probabilité que 10 employés s'absentent ?
4. Quelle est la probabilité que tous les employés s'absentent ?

Activité 5

On lance n fois ($n \geq 1$) un dé non truqué dont les faces sont numérotées de 1 à 6.
On note A l'événement « obtenir au moins un 6 ».

1. a. Calculer p(A) pour $n = 2$.
   b. Calculer p(A) pour $n = 3$.
2. a. Montrer que la probabilité de n'obtenir aucun 6 est égale à $\left(\frac{5}{6}\right)^n$.
   b. En déduire p(A) en fonction de n.
3. Combien de fois au moins faut-il lancer le dé pour que la probabilité de A soit supérieure ou égale à 0.8.

5. Loi exponentielle

Activité 1

La probabilité que la durée de vie X (en années) d'un appareil électronique soit comprise entre deux réels a et b ($0 \leq a \leq b$) est donnée par $P(a \leq X \leq b) = e^{-0.5a} - e^{-0.5b}$.

A l'aide de la calculatrice, calculer

1. la probabilité que la durée de vie soit entre 0 et 4 ans.
2. la probabilité que la durée de vie soit entre 4 et 6 ans.
3. la probabilité que la durée de vie soit entre 6 et 10 ans.

Définition

Soit λ un réel strictement positif, a et b deux réels positifs.
On dit que X est une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle P de paramètre λ si :

- la probabilité que X soit compris entre a et b est donnée par
  $P(a \leq X \leq b) = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}$
- la probabilité que X soit supérieure à a est donnée par $P(X \geq a) = e^{-\lambda a}$.

Conséquences

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle P de paramètre λ et c un réel positif.

- $P(X = c) = 0$.
- $P(0 \leq X \leq c) = P(0 < X < c) = 1 - e^{-\lambda c}$.
- $P(X \geq c) = P(X > c) = e^{-\lambda c}$.

Activité 2

Une variable aléatoire X suit une loi exponentielle de paramètre λ.

1. Déterminer le réel λ sachant que $P(X \geq 10) = 0.5$.

2. Déterminer alors $P(0 \leq X \leq 10)$, $P(100 \leq X \leq 300)$ et $P(X > 300)$.

Activité 3

On suppose que la durée de vie X, exprimée en années d'une machine suit une loi exponentielle de paramètre 0.2.

1. a. Calculer la probabilité que $X = 10$.
   b. Calculer la probabilité que $X \leq 10$.
   c. Calculer la probabilité que $X \geq 10$.
2. Déterminer le réel c tel que $P(X \leq c) = P(X \geq c)$.

Propriétés

Soit E l'univers fini d'une expérience aléatoire et p une probabilité sur E.

Pour tout événement A, $p(\overline{A}) = 1 - p(A)$.

Pour tous événements A et B, $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$.

Pour tous événements incompatibles A et B, $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$.

Propriété

Si $(E, \mathscr{P}(E), p)$ est un espace probabilisé fini tel que la probabilité p est uniforme,

alors $p(A) = \dfrac{\text{card}(A)}{\text{card}(E)}$, pour tout événement A de E.

Loi binomiale

Soit E une expérience aléatoire constituée de n épreuves identiques, indépendantes et n'ayant que deux issues : succès ou échec.
Soit p la probabilité de l'événement succès.

La probabilité d'obtenir k succès est le réel $p(k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$, $k \in \{0, 1, ..., n\}$.

L'application $p : \{0, 1, 2, ..., n\} \to [0, 1]$

$$k \mapsto C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$$

est appelée loi binomiale de paramètres (n, p) que l'on note B(n, p).

Loi exponentielle

Soit λ un réel strictement positif, a et b deux réels positifs.
On dit que X est une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle P de paramètre λ si la probabilité que X soit compris entre a et b est donnée par

$P(a \leq X \leq b) = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}$

la probabilité que X soit supérieure à a est donnée par $P(X \geq a) = e^{-\lambda a}$.

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle P de paramètre λ et c un réel positif.

- $P(X = c) = 0$.
- $P(0 \leq X \leq c) = P(0 < X < c) = 1 - e^{-\lambda c}$.
- $P(X \geq c) = P(X > c) = e^{-\lambda c}$.

Exercice 1

Un entraîneur dispose de 20 joueurs pour constituer une équipe de football.

Combien a-t-il de possibilités si on suppose

1. qu'une équipe est déterminée par la donnée des onze joueurs.
2. qu'une équipe est déterminée par la donnée des onze joueurs avec une position pour chaque joueur.

Exercice 2

Cinq personnes choisissent chacun un chiffre entre 1 et 5.

1. Combien y a t-il de choix possibles ?
2. Combien y a t-il de choix à chiffres distincts ?
3. Combien y a t-il de choix ne contenant que des chiffres pairs ?
4. Combien y a t-il de choix ne contenant que des chiffres impairs ?

Exercice 3

Une urne contient six boules blanches portant chacune le numéro 1 et quatre boules noires portant chacune le numéro 0.

Toutes les boules sont indiscernables au toucher.

On tire simultanément et au hasard trois boules de l'urne.

Calculer la probabilité de chacun des événements suivants

A : « les trois boules tirées sont blanches »

B : « les trois boules tirées sont de même couleur »

C : « la somme des chiffres marqués sur les trois boules tirées est égale à 2 ».

Exercice 4

Dans une urne, une boule est numérotée 1, deux boules sont numérotées 2, trois boules sont numérotées 3, quatre boules sont numérotées 4, …et enfin neuf boules sont numérotées 9.

1. Combien y a-t-il de boules dans l'urne.
2. On tire deux boules simultanément et au hasard.
   a. Quelle est la probabilité que les deux numéros soient pairs ?
   b. Quelle est la probabilité que la somme des deux numéros obtenus soit supérieure ou égale à 3 ?
   c. Quelle est la probabilité que la somme des deux numéros obtenus soit inférieure ou égale à 16 ?
3. On tire quatre boules successivement, sans les remettre dans l'urne, et on les aligne dans l'ordre où on les a tirées.
   La probabilité d'obtenir 1983 est elle la même que celle d'obtenir 1389 ?
4. On tire quatre boules successivement, en les remettant dans l'urne, et on les aligne dans l'ordre où on les a tirées.
   La probabilité d'obtenir 1983 est elle la même que celle d'obtenir 1389 ?

Exercice 5

Le personnel d'une grande entreprise est réparti en trois catégories : les ingénieurs, les techniciens et le personnel administratif.
10% des employés sont des ingénieurs et 80 % sont des techniciens.
70% des employés sont des femmes, 60% des des ingénieurs sont des hommes et 75% des techniciens sont des femmes.
On interroge un employé au hasard.

1. a. Quelle est la probabilité d'interroger une femme ingénieur ?
   b. Quelle est la probabilité d'interroger un homme technicien ?
   c. Quelle est la probabilité d'interroger une femme du personnel administratif ?
2. On sait que l'employé interrogé est une femme.
   a. Quelle est alors la probabilité qu'elle soit technicienne ?
   b. Quelle est alors la probabilité qu'elle soit ingénieur ?
3. On sait que l'employé interrogé est un ingénieur.
   a. Quelle est alors la probabilité que ce soit une femme ?
   b. Quelle est alors la probabilité que ce soit un homme ?

Exercice 6

Le programme d'une épreuve d'examen comporte 100 questions. Un candidat n'en étudie que 60. Lors d'un examen, le candidat tire au sort trois questions.
Quelle est la probabilité qu'il ait étudié :

1. les trois questions proposées ?
2. deux questions seulement ?
3. une seule question ?
4. aucune des trois questions ?
5. au moins une des trois questions ?

Exercice 7

Un dé cubique a trois faces portant le numéro 1, deux faces portant le numéro 2 et une face portant le numéro 3.
On lance le dé deux fois et on calcule la somme des nombres obtenus.
Déterminer la probabilité de chacun des événements ci-dessous.

1. Obtenir une somme égale à 2.
2. Obtenir une somme égale à 3.
3. Obtenir une somme égale à 4.
4. Obtenir une somme égale à 5.
5. Obtenir une somme égale à 6.

Exercice 8

Dans une production d'ampoules, la probabilité qu'une ampoule soit défectueuse est égale à 0.1.

Dans un lot de 500 ampoules.

1. Déterminer la probabilité de n'obtenir aucune ampoule défectueuse ?
2. Déterminer la probabilité d'obtenir au moins une ampoule défectueuse ?

Exercice 9

On jette 20 fois une pièce de monnaie.

1. Déterminer la probabilité d'obtenir un nombre de faces égal à 10.
2. Déterminer la probabilité d'obtenir un nombre de faces compris entre 9 et 11.
3. Déterminer la probabilité d'obtenir un nombre de faces compris entre 8 et 12.
4. Déterminer la probabilité d'obtenir un nombre de faces compris entre 7 et 13.

Exercice 10

On dispose de deux tétraèdres parfaitement équilibrés.

Chacun d'eux a une face peinte en bleu, une face peinte en jaune et deux faces peintes en rouge.

On lance simultanément les deux tétraèdres.

1. Quelle est la probabilité qu'aucune face bleue ne soit visible ?
2. Quelle est la probabilité qu'aucune face rouge ne soit visible ?
3. Soit A l'événement « les quatre faces rouges sont visibles .»
   Calculer p(A).
4. On répète 5 fois l'expérience qui consiste à lancer les deux tétraèdres.
   Calculer la probabilité que l'événement A soit réalisé au moins une fois.

Exercice 11

Dans une loterie, on suppose que chaque billet a une chance sur 100 d'être gagnant.

On suppose qu'on achète n billets et on note A l'événement « avoir au moins un billet gagnant ».

1. a. Calculer p(A) pour $n = 2$.
   b. Calculer p(A) pour $n = 3$.
2. a. Exprimer en fonction de n la probabilité de l'événement $\overline{A}$.
   b. En déduire la probabilité de l'événement A.

3 Combien de billets faut-il acheter pour que la probabilité d'avoir au moins un billet gagnant soit supérieur à 0.5 ?

Exercice 12

La durée de vie exprimée en années, d'un robot jusqu'à ce que survienne la première panne suit une loi exponentielle de paramètre 0.0005.

1. Calculer la probabilité qu'un robot dépasse 5 ans de durée de vie.
2. Calculer la probabilité qu'un robot dépasse 8 ans de durée de vie.
3. Calculer la probabilité qu'un robot ait une durée de vie comprise entre 5 et 8 ans.

Exercice 13

La durée de vie d'une machine, exprimée en années, jusqu'à ce que survienne la première panne est une variable aléatoire X qui suit une loi exponentielle de paramètre λ.

1. Déterminer λ à 10^{-1} prés, pour que $P(X > 6) = 0.3$.

Dans la suite de l'exercice on prendra $\lambda = 0.2$.

2. A quel instant t, à un mois prés, la probabilité qu'une machine tombe en panne pour la première fois est-elle de 0.5 ?
3. Calculer la probabilité qu'une machine n'ait pas de panne au cours des deux premières années de sa vie.
4. On considère un lot de cinq machines fonctionnant de manière indépendante. Déterminer la probabilité que dans ce lot, il y ait au moins une machine qui n'ait pas eu de panne au cours des deux premières années.