

## Exemples d'étude de fonctions



### Sommaire

- I. Exemples d'étude de fonctions polynômes du second degré
- II. Exemples d'étude de fonctions polynômes du 3<sup>ème</sup> degré.
- III. Exemples d'étude de fonctions



## Pour démarrer

### Activité 1

Etudier le signe de chacune des expressions suivantes :

a)  $A(x) = 2x^2 + 5x + 4$ ;    b)  $B(x) = x^2 - 5x + 6$ ;    c)  $C(x) = x^2 - 4x + 4$

### Activité 2

Déterminer pour chacune des fonctions suivantes la tangente à sa courbe représentative au point d'abscisse  $x_0$ .

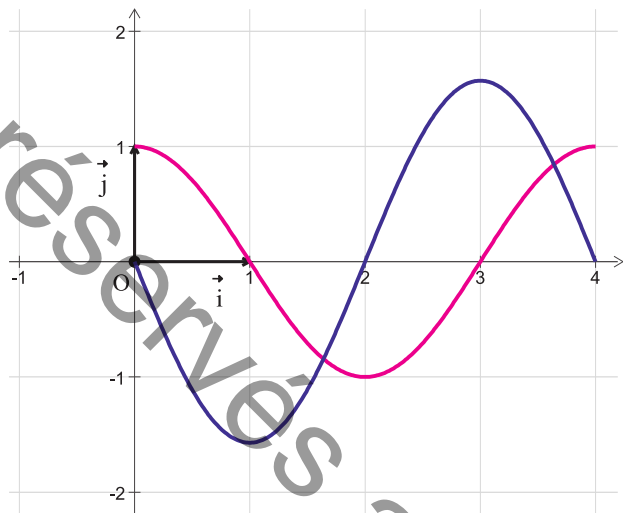
1)  $f : x \mapsto x^2 + x + 3$ ,  $x_0 = -1$

2)  $g : x \mapsto -x^3 + 3x^2 + 1$ ,  $x_0 = 1$

3)  $h : x \mapsto \frac{x+3}{x-2}$ ,  $x_0 = -2$

### Activité 3

La figure ci-contre comporte la représentation graphique  $C_1$  d'une fonction définie et dérivable sur  $[0, 4]$  ainsi que la représentation graphique  $C_2$  de sa fonction dérivée. Identifier  $C_1$  et  $C_2$ .

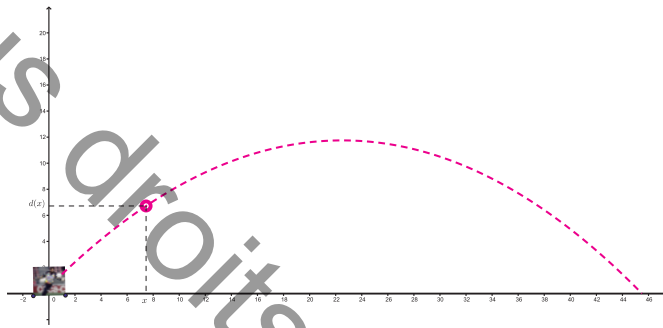




## I) Exemples d'étude de fonctions polynômes du second degré

### Activité 1

Le gardien de but d'une équipe de football dégage le ballon pour relancer le jeu. La trajectoire du ballon est un arc d'une parabole d'équation  $h(x) = -\frac{1}{45}x^2 + x + 1$  où  $x$  et  $h(x)$  sont exprimées en mètres.



- 1) Déterminer en utilisant le graphique ci-dessus, représentant la trajectoire du ballon, la hauteur maximale atteinte par le ballon.
- 2) A quelle distance du gardien le ballon heurte-t-il le sol ?

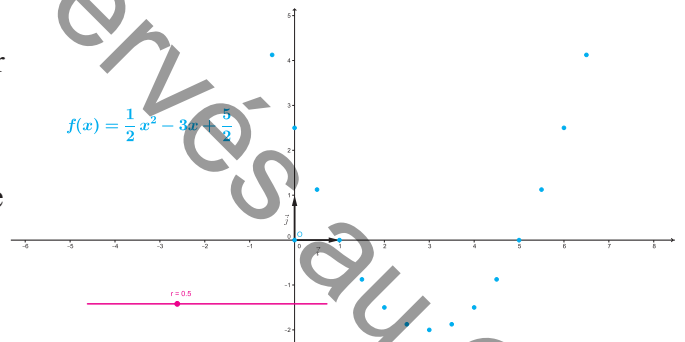


### Activité 2

On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x + \frac{5}{2}.$$

On désigne par  $C$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .



- 1) Calculer  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .
- b) Montrer que pour tout réel  $x$ ,  $f'(x) = x - 3$ .
- c) Dresser le tableau de variation de  $f$ .
- d) Que représente  $f(3)$  pour  $f$  ?  
En déduire la nature du point  $S(3, f(3))$  pour la courbe  $C$



## LE COURS

- 2) Ouvrir le fichier « [parabole1.ggb](#) » et remarquer qu'on a placé sur le graphique une liste de points de C .
  - a) Déplacer le curseur **r** pour varier ses valeurs.  
La courbe sur laquelle varie cette liste de points est appelée *une parabole*
  - b) Donner une allure de cette parabole.

### Activité 3

Soit la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = -3x^2 + 6x + 2$ .

On désigne par  $C$  la parabole représentant  $f$  dans le plan muni d'un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

- 1) a) Déterminer  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .
- 2) a) Déterminer  $f'(x)$  et étudier son signe suivant les valeurs de  $x$ .  
b) Dresser alors le tableau de variation de  $f$ .
- 3) a) Recopier et compléter le tableau suivant :

x	-1	0	1	2	3
f(x)					

- b) Déterminer une équation de l'axe de symétrie  $\Delta$  de  $C$ .
- c) Tracer  $\Delta$  et  $C$ .

### Activité 4

Soient les fonctions  $f$  et  $g$  définies sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = x^2 + x + 1$  et  $g(x) = -x^2 - 2x + 3$ .

On désigne par  $C_f$  et  $C_g$  leurs courbes représentatives respectives dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

- 1) a) Déterminer  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .
- b) Etudier le sens de variation de  $f$ .
- c) Dresser alors le tableau de variation de  $f$ .
- d) En déduire le signe de  $f(x)$  sur  $\mathbb{R}$ .

Soit la fonction

$$f : x \mapsto ax^2 + bx + c, \text{ où } a \neq 0.$$

La représentation graphique de  $f$  dans un repère orthonormé

$(O, \vec{i}, \vec{j})$  est une parabole de

sommet  $S\left(\frac{-b}{2a}, f\left(\frac{-b}{2a}\right)\right)$  et d'axe

de symétrie la droite d'équation

$$\Delta : x = \frac{-b}{2a}.$$

Soit  $C$  la courbe représentative d'une fonction  $f$  définie sur  $D_f$  dans un

repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

On dit que la droite  $\Delta$  d'équation  $x = a$  est un axe de symétrie de  $C$  lorsque pour tout  $x$  de  $D_f$  on a :

$$\begin{cases} (2a - x) \in D_f \\ f(2a - x) = f(x) \end{cases}$$



- 2) Etudier les variations de  $g$ .
- 3) a) Etudier la position relative de  $C_f$  et  $C_g$ .
- b) Construire  $C_f$  et  $C_g$ .

## II) Exemples d'étude de fonctions polynômes du troisième degré



### Activité 1

Le plan est rapporté à un repère orthogonal  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

Dans le fichier « cube.ggb », on considère les points  $A(0; -1)$ ,  $I(1; 0)$  et  $P(x; 0)$  où  $x$  est un réel donné. La perpendiculaire à  $[AP]$  en  $P$  coupe  $(O; \vec{j})$  en un point  $B$ .

- 1) Démontrer que  $OB = x^2$ .
- 2) a) Placer le point  $Q$ , intersection de  $(O; \vec{j})$  avec la parallèle à  $(BI)$  passant par  $P$ .
- b) Justifier que le point  $Q$  a pour coordonnées  $(0; x^3)$ .
- c) En déduire alors une construction du point  $M(x; x^3)$ .
- 3) Déplacer le point  $P$  sur l'axe des abscisses pour faire apparaître la courbe représentative de la fonction  $f : x \mapsto x^3$ .

### Activité 2

On considère la fonction  $g$  définie sur  $\mathbb{R}$  par

$f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$ . On note  $C$  sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

- 1) Dresser le tableau de variation de  $f$ .
- 2) On désigne par  $A$  et  $B$  les points de  $C$  d'abscisses respectives 0 et 2.
  - a) Donner les coordonnées du milieu  $I$  de  $[AB]$ .
  - a) Déterminer une équation de la tangente  $(T)$  à  $C$  en  $I$ .
  - b) Etudier la position relative de  $C$  et  $(T)$
- 3) a) Tracer la droite  $(T)$  et la courbe  $C$ .
- b) Que représente le point  $I$  pour  $C$ ? Justifier

Soit  $C$  la courbe représentative d'une fonction  $f$  définie sur  $D_f$  dans un repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

On dit que le point  $\Omega(a, b)$  est un centre de symétrie de  $C$  lorsque pour tout  $x$  de  $D_f$  on a :

$$\begin{cases} (2a - x) \in D_f \\ f(2a - x) + f(x) = 2b \end{cases}$$



## Activité 3

1) Soit la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = x^2 + x - 2$ .

- Résoudre l'équation  $f(x) = 0$ .
- En déduire le signe, pour tout  $x$  réel, de  $f(x)$ .

2) On considère la fonction  $g$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $g(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x - 3$ .

On note  $C$  sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal  $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$  où  $OI = 2$  cm et  $OJ = 2$  mm

- Déterminer la fonction dérivée  $g'$  de  $g$  et montrer que le signe de  $g'(x)$  est celui de  $f(x)$
  - Dresser le tableau de variation de  $g$ .
- 3) Soit le point  $A$  de  $C$  d'abscisse  $-\frac{1}{2}$ .
- Donner les coordonnées de  $A$ .
  - Déterminer une équation de la tangente  $(T)$  à  $C$  en  $A$ .
  - Etudier la position relative de  $C$  et  $(T)$ .
- 4) Construire  $C$  et  $(T)$ .

## III) Exemples d'étude de fonctions homographiques



### Activité 1

On considère la fonction  $f : x \mapsto \frac{2x-1}{x+1}$ .

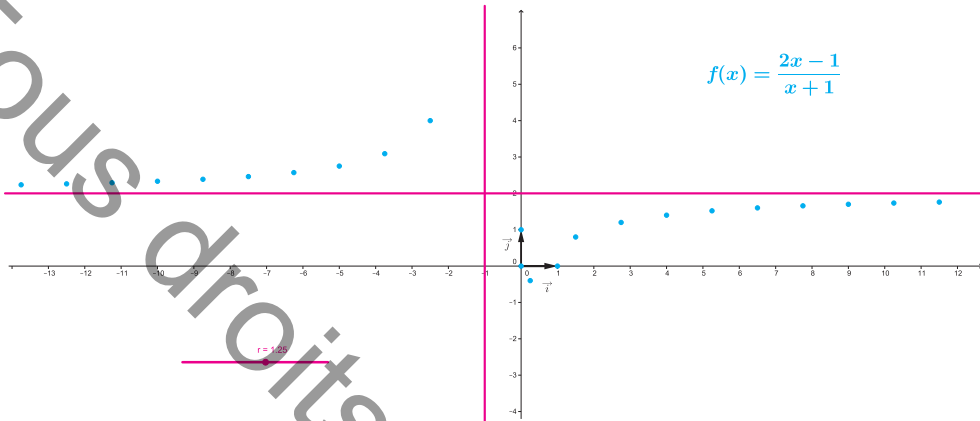
On désigne par  $C$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

- Justifier que l'ensemble de définition de  $f$  est  $]-\infty, -1[ \cup ]-1, +\infty[$ .
- Calculer  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ . Interpréter graphiquement ces limites.
  - Calculer  $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$ . Interpréter graphiquement ces limites.
- Montrer que pour tout  $x \in ]-\infty, -1[ \cup ]-1, +\infty[$ ,  $f'(x) = \frac{3}{(x+1)^2}$ .
  - Dresser le tableau de variation de  $f$ .



## LE COURS

- 4) Ouvrir le fichier « [homographique1.ggb](#) » et remarquer qu'on a placé sur le graphique une liste de points de C dont les abscisses sont dans l'intervalle  $]-1, +\infty[$ .
- a) Déplacer le curseur **r** pour varier ses valeurs de 2 à 0,25.  
La courbe sur laquelle varie cette liste de points est appelée *une branche d'hyperbole*.
- b) Donner une allure de cette hyperbole.



- 5) Soit  $\Omega$  le point intersection des deux asymptotes de C.
- a) Que représente le point  $\Omega$  pour la courbe C ?
- b) Vérifier que le point  $\Omega$ , a pour coordonnées  $(-1; 2)$ .
- c) Montrer que pour tout  $x \in ]-\infty, -1[ \cup ]-1, +\infty[$ , on a :  
 $(2 \times (-1) - x) \in ]-\infty, -1[ \cup ]-1, +\infty[$  et  $f(2 \times (-1) - x) + f(x) = 2 \times 2$
- d) Montrer que  $\Omega$  est un centre de symétrie de C.

### Activité 2

Au cours d'une épreuve de marathon, un athlète a parcouru la moitié du trajet à la vitesse de 18 km/h. Soudain, une violente averse de pluie se mit à tomber, ce qui a causé un ralentissement lors de la seconde moitié du trajet qui a été effectuée par cet athlète à une vitesse 9 km/h . On désigne par  $V(9)$  la vitesse moyenne de cet athlète sur tout le trajet.



- 1) Justifier que  $V(9) = \frac{369}{18+9}$ .



2) Soit la fonction  $f : x \mapsto \frac{36x}{18+x}$ . On désigne par C sa courbe représentative dans un

repère orthogonal  $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$ , ( $OI = 0,5 \text{ cm}$  et  $OJ = 0,25 \text{ cm}$ )

a) Etudier les variations de  $f$ .

b) Montrer que le point  $\Omega(-18; 36)$  est un centre de symétrie de la courbe C.

c) Tracer C ainsi que ses asymptotes.

3) a) Tracer avec un autre couleur la partie de C correspondante à la fonction

$$v : \vartheta \mapsto \frac{36\vartheta}{18+\vartheta}.$$

b) Déterminer la vitesse  $\vartheta$  en km/h de l'athlète, sachant que sa vitesse moyenne sur tout le trajet est 12 km/h.

### Activité 3

Soit la fonction  $f$  définie sur  $\left] -\infty; -\frac{1}{2} \right[ \cup \left] -\frac{1}{2}; +\infty \right[$  par  $f(x) = \frac{x-4}{2x+1}$ .

On désigne par  $\mathcal{C}$  sa courbe représentative dans un repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

1) Montrer que la courbe  $\mathcal{C}$  est symétrique par rapport au point  $O' \left( -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right)$ .

2) Etudier les variations de  $f$  sur l'intervalle  $\left] -\frac{1}{2}; +\infty \right[$ .

3) a) Tracer la branche de  $\mathcal{C}$  correspondante à  $\left] -\frac{1}{2}; +\infty \right[$ .

b) En déduire le tracé de la courbe  $\mathcal{C}$ .

c) Dresser alors le tableau de variation de  $f$  sur son ensemble de définition.



## EXERCICES RÉVOLUS

### Enoncé 1 :

Soit la fonction  $f : x \mapsto -\frac{x^2}{2} - 2x + 5$ . On désigne par  $\Gamma$  la courbe représentative de  $f$  dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

- 1) Étudier les variations de  $f$  et dresser son tableau de variation.
- 2) a) Montrer que  $\Gamma$  admet la droite  $\Delta : x = -2$  pour axe de symétrie.  
b) Tracer soigneusement la courbe  $\Gamma$ .
- 3) Soit  $A$  et  $B$  les points de  $\Gamma$  d'abscisses respectives  $-4$  et  $2$ .  
a) Donner l'équation réduite de la droite  $(AB)$ .  
b) Déterminer un point  $M$  de  $\Gamma$  où la tangente à  $\Gamma$  est parallèle à la droite  $(AB)$ .

### Corrigé 1

$$1) \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x^2}{2} = -\infty; \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^2}{2} = -\infty.$$

$f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f'(x) = -x - 2$ .

$f'(x) \leq 0$  si et seulement si  $x \geq -2$ . D'où le tableau de variation de  $f$ :

$x$	$-\infty$	$-2$	$+\infty$
$f'(x)$		$0$	
$f$	$-\infty$	$7$	$-\infty$

- 2) a) Soit  $\Delta : x = -2$ . Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on a :

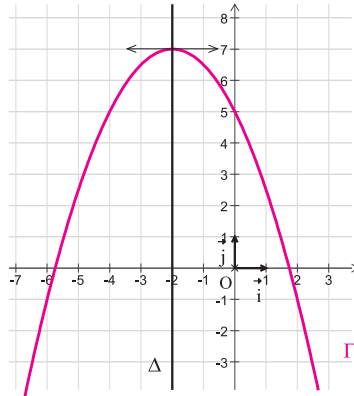
$$f(2 \times (-2) - x) = -\frac{1}{2}(-4 - x)^2 - 2(-4 - x) + 5 = -\frac{1}{2}x^2 - 8 - 4x + 8 + 2x + 5 = f(x).$$

Ainsi la droite  $\Delta : x = -2$  est un axe de symétrie pour la courbe  $\Gamma$ .



# EXERCICES RÉVOLUS

b)



3) a)  $A(-4, 5)$  et  $B(2, -1)$ , alors  $\overline{AB} \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \end{pmatrix}$ , donc  $(AB) : y + 1 = -(x - 2)$ .

D'où  $(AB) : y = -x + 1$

b) Le coefficient directeur de la droite  $(AB)$  est égal à  $-1$ . La tangente à  $\Gamma$  en un point d'abscisse  $x$  est parallèle à  $(AB)$  si et seulement si  $f'(x) = -1$ , soit  $x = -1$ .

Ainsi  $M \left( -1, \frac{13}{2} \right)$ .

## Enoncé 2 :

Soit la fonction  $g : x \mapsto x^3 - 3x + 1$ .

On désigne par  $C$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O, \overline{OI}, \overline{OJ})$ .

- 1) a) Déterminer les limites de  $g(x)$  en  $-\infty$  et en  $+\infty$ .
- b) Dresser le tableau de variation de  $g$ .
- 2) a) Montrer que le point  $J$  est un centre de symétrie de la courbe  $C$ .
- b) Déterminer une équation de la tangente  $(T)$  à  $C$  en  $J$ .
- c) Etudier la position relative de  $(T)$  et  $C$ .
- 3) Tracer  $C$  et  $(T)$ .

## Corrigé 2

1) a)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$ ;  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$ .

$g$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $g'(x) = 3(x^2 - 1) = 2(x - 1)(x + 1)$ .

b) D'où le tableau de variation de  $f$ :



# EXERCICES RÉVOLUS

$x$	$-\infty$	$-1$	$1$	$+\infty$	
$g'(x)$	+	0	-	0	+
$g$	$-\infty$	$3$	$-1$	$+\infty$	

2) a) Soit  $J(0,1)$ . Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on a :  $g(-x) + g(x) = (-x)^3 + x^3 - 3(-x+x) + 2 = 2$ .

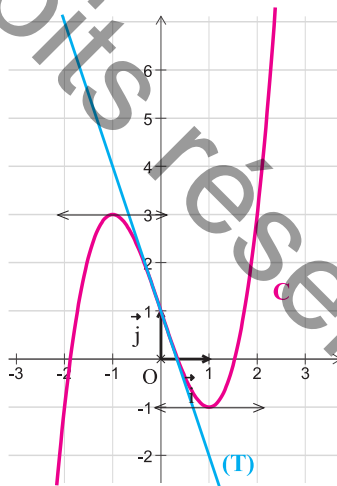
Donc le point  $J$  est centre de symétrie de  $C$ .

b)  $g'(0) = -3$ . D'où une équation de  $(T)$  :  $y = -3x + 1$ .

c) L'étude de la position relative de  $C$  et  $(T)$  est obtenue à partir du signe de  $g(x) - (-3x + 1) = x^3$ .

$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$
$g(x) - (-3x + 1)$	-	0	+
Positions relatives	$(T)$ est au dessus de $C$		$(T)$ est en dessous de $C$

3)



### Enoncé 3 :

On considère la fonction  $f$  définie par  $] -\infty, 1[ \cup ] 1, +\infty[$  par  $f(x) = \frac{3x-4}{x-1}$ . On désigne par  $H$  sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

- 1) a) Etudier les limites de  $f$  aux bornes de son ensemble de définition.  
b) Préciser les équations des asymptotes à  $H$ .
- 2) Etudier les variations de  $f$  et dresser son tableau de variation.
- 3) Déterminer la position relative de  $H$  par rapport à son asymptote horizontale
- 4) Construire  $H$ .



# EXERCICES RÉSOLUS

## Corrigé 3

1) a)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3$ ,  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-1}{x-1} = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-1}{x-1} = -\infty$

b) H admet deux asymptotes D et  $\Delta$  d'équations :  $D : y = 3$  et  $\Delta : x = 1$ .

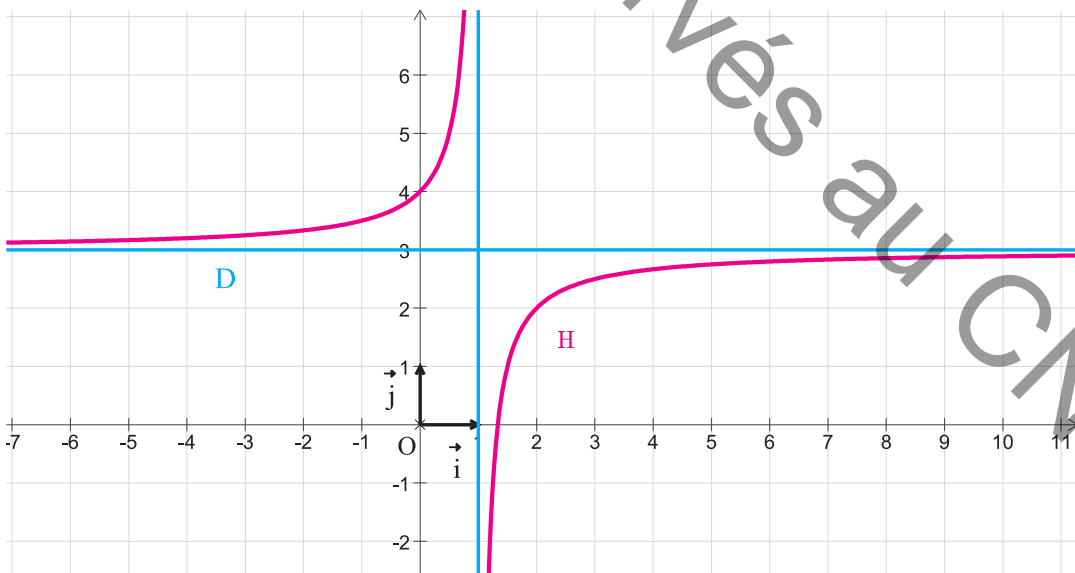
2)  $f$  est dérivable sur chacun des intervalles  $]-\infty, 1[$  et  $]1, +\infty[$  et on a  $f'(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$ .

D'où le tableau de variation de  $f$ .

$x$	$-\infty$	$1$	$+\infty$
$f'(x)$	+		+
$f$	↗ $+\infty$		↘ $3$

3) Pour tout  $x \in ]-\infty, 1[ \cup ]1, +\infty[$ ,  $f(x) - 3 = \frac{(3x-4) - 3(x-1)}{x-1} = \frac{-1}{x-1}$ . D'où le tableau de signe :

$x$	$-\infty$	$1$	$+\infty$
$-\frac{1}{x-1}$	+		-
Position relative de H et D	H est au dessus de D		H est en dessous de D





## Etapes de l'étude d'une fonction $f$ .

- Déterminer l'ensemble de définition de  $f$ .
- Etudier la parité de  $f$ , si c'est nécessaire.
- Calculer les limites de  $f$  aux bornes de son ensemble de définition et préciser la nature des branches infinies de sa courbe représentative.
- Calculer la dérivée  $f'$  de  $f$ .
- Etudier le signe de  $f'(x)$  et en déduire le sens de variation de  $f$ .
- Dresser le tableau de variation de  $f$ .
- Déterminer les équations de certaines tangentes à la courbe de  $f$ .
- Construire la courbe représentative de  $f$  en utilisant le tableau de variation, les asymptotes, les tangentes, d'éventuels éléments de symétrie, ..

## Éléments de symétrie de la représentation graphique d'une fonction.

Soit  $f$  une fonction définie sur  $D_f$ . On désigne par  $C$  sa courbe représentative dans un repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

- La droite d'équation  $x = a$  est un axe de symétrie de  $C$  lorsque pour tout  $x$  de  $D_f$  on a :

$$\begin{cases} (2a-x) \in D_f \\ f(2a-x) = f(x) \end{cases}$$

- Le point  $\Omega(a,b)$  est un centre de symétrie de  $C$  lorsque pour tout  $x$  de  $D_f$  on a :

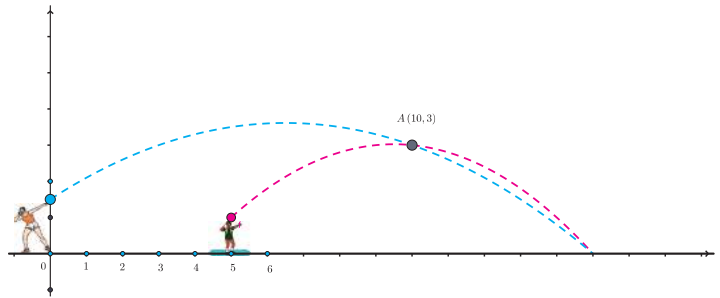
$$\begin{cases} (2a-x) \in D_f \\ f(2a-x) + f(x) = 2b \end{cases}$$



# MOBILISER SES COMPÉTENCES

## Situation 1

Deux frères Amine et Aymen jouent au lancement du poids. Voulant encourager son frère cadet, Amine s'est placé à 5 mètres derrière Aymen, au point O du plan muni d'un repère orthonormé  $(O, \vec{OI}, \vec{OJ})$ .



Le poids lancé par Aymen décrit une trajectoire parabolique d'équation  $y = -0,1x^2 + 1,9x - 6$ . Lorsque à son tour Amine lance son poids, il décrit aussi une trajectoire parabolique et heurte le sol à une distance 1,5 fois plus grande que celle de son frère et atteint son hauteur maximale au point d'abscisse 6,5. Les deux trajectoires passent par le même point A(10,3).

- 1) Déterminer l'équation de la trajectoire du poids lancé par Amine.
- 2) Construire les deux trajectoires et déterminer la hauteur à partir du sol pour laquelle Amine a lancé son poids.

## Situation 2

Une station de jeux, désire construire un toboggan d'une piscine en respectant les contraintes suivantes :

- Le profil du toboggan est la courbe C d'une fonction définie sur  $[0,6]$  par  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ .
- Dans un plan muni d'un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ , le toboggan passe par les points  $S(0,8)$  et  $E(6,0)$  et admet en chacun de ces points une tangente horizontale.



Déterminer l'expression de  $f$  et tracer le profil du toboggan.

## Situation 3

On considère la fonction  $f$  définie par  $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$ .

Etudier les variations de  $f$  et tracer sa courbe représentative C dans un repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

### Stratégie de résolution

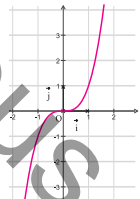
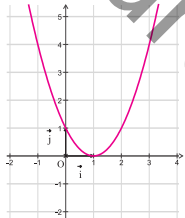
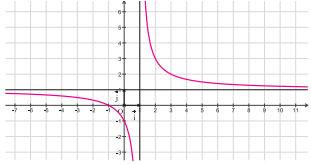
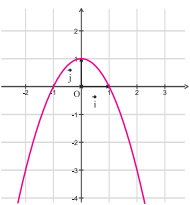
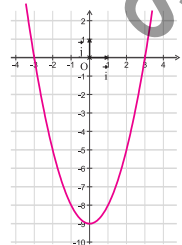
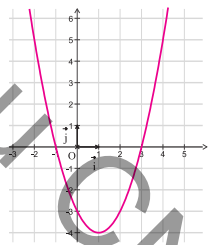
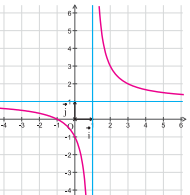
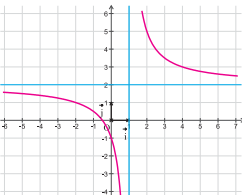
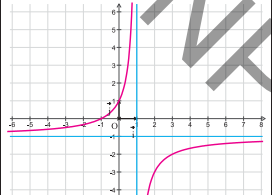
- Etudier la parité de  $f$  et réduire l'étude de ses variations à  $[0, +\infty[$ .



# S'AUTO-ÉVALUER

QCM

Pour chacune des questions suivantes, trois réponses sont proposées parmi lesquelles une seule est correcte. Indiquer la lettre qui lui correspond.

	A	B	C								
<p>1</p> <p>La representation graphique suivante</p>  <p>est celle de la fonction :</p>	$x \mapsto x^2$	$x \mapsto x^3$	$x \mapsto \frac{1}{x}$								
<p>2</p> <p>La representation graphique suivante</p>  <p>est celle de la fonction :</p>	$x \mapsto (x-1)^2$	$x \mapsto x^2 - 1$	$x \mapsto x^2 + x - 2$								
<p>3</p> <p>La representation graphique suivante</p>  <p>est celle de la fonction</p>	$x \mapsto \frac{x-1}{x+1}$	$x \mapsto \frac{x+1}{x-1}$	$x \mapsto \frac{x+1}{1-x}$								
<p>4</p> <p>La représentation graphique de la fonction <math>f : x \mapsto x^2 - 2x - 3</math> est</p>											
<p>5</p> <p>On donne ci-dessous le tableau de variation d'une fonction <math>f</math>.</p> <table border="1" data-bbox="208 1604 559 1696"> <tr> <td><math>x</math></td> <td><math>-\infty</math></td> <td><math>1</math></td> <td><math>+\infty</math></td> </tr> <tr> <td><math>f</math></td> <td><math>1</math></td> <td><math>-\infty</math></td> <td><math>1</math></td> </tr> </table> <p>Sa représentation graphique est :</p>	$x$	$-\infty$	$1$	$+\infty$	$f$	$1$	$-\infty$	$1$			
$x$	$-\infty$	$1$	$+\infty$								
$f$	$1$	$-\infty$	$1$								



## S'AUTO-ÉVALUER

### Vrai-Faux

*Indiquer si les propositions suivantes sont vraies ou fausses ou on ne peut pas décider.*

1. La représentation graphique de la fonction  $f : x \mapsto x^2 + x + 1$  est une parabole de sommet S d'abscisse  $\frac{-1}{2}$ .
2. La représentation graphique d'une fonction polynôme est une parabole.
3. La courbe représentative de la fonction  $f : x \mapsto \frac{x-3}{x-1}$  est symétrique par rapport au point  $\Omega(3,1)$ .



# EXERCICES D'ENTRAINEMENT

1

Etudier les variations de chacune des fonctions suivantes et tracer sa courbe représentative dans un repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

a)  $f : x \mapsto x^2 - 4x - 5$ ;    b)  $g : x \mapsto -x^2 - x + 6$   
 c)  $h : x \mapsto 2x^2 + 3x - 2$ ;    d)  $k : x \mapsto -3x^2 + x + 4$

2

Le plan est rapporté à un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

Soit la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = x^2 + 1$ .  
Donner le sommet et l'axe de symétrie de sa courbe représentative.

3

Le plan est rapporté à un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

Soit la fonction  $g$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $g(x) = -2x^2 + 3x + 1$ .  
Donner le sommet et l'axe de symétrie de sa courbe représentative.

4

Etudier les variations de chacune des fonctions suivantes et tracer sa courbe représentative dans un repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

a)  $f : x \mapsto \frac{1}{3}x^3 - x$ ;    b)  $g : x \mapsto -x^3 + 3x^2$   
 c)  $h : x \mapsto x^3 - x^2 + 2x + 1$ ;    d)  $k : x \mapsto 2x^3 - 9x^2 + 15$

5

Etudier les variations de chacune des fonctions suivantes et tracer sa courbe représentative dans un repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

a)  $f : x \mapsto \frac{1}{1-x}$ ;    b)  $g : x \mapsto \frac{x-1}{2x-3}$   
 c)  $h : x \mapsto \frac{x+1}{3-x}$ ;    d)  $k : x \mapsto \frac{3-2x}{x-1}$

6

On considère la fonction  $f : x \mapsto 4x^3 - 3x + 1$ . Soit  $C$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$

- 1) Dresser le tableau de variation de  $f$ .
- 2) a) Montrer que  $C$  admet le point  $O'(0, 1)$  pour centre de symétrie.  
b) Donner une équation de la droite  $(T)$  tangente à  $C$  en  $O'$ .  
c) Etudier la position relative de  $C$  et  $(T)$ .
- 3) Tracer  $(T)$  et  $C$ .

7

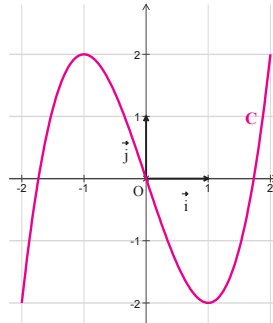
On considère la fonction  $f$  définie par  $f(x) = \frac{2x-1}{x-2}$ .

On désigne par  $C$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

- 1) Déterminer les équations de chacune des asymptotes à  $C$ .
- 2) Donner les coordonnées du centre de symétrie de  $C$ .

8

On donne ci-dessous la représentation graphique d'une fonction  $f$  définie et dérivable sur  $[-2, 2]$ .



- 1) Utiliser ce graphique pour :
  - a) déterminer les valeurs  $f(0)$ ,  $f(1)$  et  $f'(1)$ .
  - b) résoudre l'équation  $f(x) = 0$ .
  - c) dresser le tableau de variation de  $f$ .
- 2) On suppose que  $f(x)$  est de la forme  $ax^3 + bx + c$ .  
A l'aide des valeurs trouvées en 1)a) donner l'expression de  $f$ .

9

On considère les fonctions définies sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = x^3 - 3x + 1$  et  $g(x) = x^2 - 2x + 3$ .

On désigne par  $C_f$  et  $C_g$  leurs courbes représentatives respectives dans un même repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$

- 1) Etudier les variations de  $f$  et tracer  $C_f$ .
- 2) Etudier les variations de  $g$  et tracer  $C_g$ .
- 3) Déterminer graphiquement  $C_f \cap C_g$ .
- 4) Utiliser  $C_f$  et  $C_g$  pour résoudre l'équation  $x^3 - x^2 - x - 2 = 0$ .



## EXERCICES D'ENTRAINEMENT

**10**

On considère les fonctions  $f_1 : x \mapsto 1+x$ ,

$$f_2 : x \mapsto 1+x+\frac{1}{2}x^2 \quad \text{et} \quad f_3 : x \mapsto 1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3.$$

- 1) Etudier les variations de chacune de ces trois fonctions.
- 2) On désigne par  $C_1, C_2$  et  $C_3$  les courbes représentatives respectivement de  $f_1, f_2$  et  $f_3$  dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .
  - a) Préciser les positions relatives de  $C_1, C_2$  et  $C_3$ .
  - b) Montrer que  $C_2$  et  $C_3$  ont  $C_1$  pour tangente commune au point d'abscisse 0.
  - c) Tracer  $C_1, C_2$  et  $C_3$ .

**11**

On considère la fonction  $f : x \mapsto \frac{x-1}{x+1}$ . On désigne par C sa représentation graphique dans un repère orthonormé.

- 1) a) Déterminer  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .  
Interpréter graphiquement les résultats.  
b) Déterminer  $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$ .  
Interpréter graphiquement les résultats.
- 2) a) Déterminer  $f'(x)$ .  
b) Dresser le tableau de variation de  $f$ .
- 3) a) Déterminer les coordonnées du centre de symétrie de C.  
b) Tracer C.

**12**

On considère les fonctions :

$$f : x \mapsto x^2 - x + 1; \quad \text{et} \quad g : x \mapsto \frac{1}{x+1}.$$

On désigne par  $C_f$  et  $C_g$  les courbes représentatives respectives de  $f$  et  $g$  dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$

- 1) a) Etudier les variations de  $f$ .  
b) Tracer  $C_f$ .
- 2) a) Etudier les variations de  $g$ .  
b) Tracer  $C_g$ .
- 3) a) Montrer que  $C_f$  et  $C_g$  se coupent en un point unique J d'abscisse 0.  
b) Montrer que  $C_f$  et  $C_g$  admettent en J une tangente commune dont on donnera une équation.

**13**

Soit la fonction  $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$  où  $a, b$  et  $c$  sont trois réels avec  $a \neq 0$ . On désigne par (P) la parabole représentant  $f$  dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

On sait que le sommet  $S$  de (P) a pour abscisse  $-\frac{1}{2}$  et que la tangente  $\Delta$  au point d'abscisse 0 a pour équation  $y = x + 1$ .

1. Déterminer  $f'(x)$  en fonction de  $a$  et  $b$ .
2. a) Calculer  $f'(0)$  et  $f(0)$ .  
b) En déduire les valeurs de  $b$  et  $c$ .  
c) Déterminer alors  $a$ .
3. Etudier  $f$  et tracer sa courbe représentative  $C_f$ .

**14**

On désigne par C sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$

Déterminer  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

- 1) a) Déterminer  $f'(x)$  et étudier son signe.  
b) Dresser le tableau de variation de  $f$ .
- 2) a) Donner le sommet et l'axe de symétrie de C.  
b) Tracer la branche de C correspondant à l'intervalle  $[-1, +\infty[$ .  
c) En déduire le tracé de C.

**15**

Le mathématicien et poète arabe Omar Al Khayam a mis au point une technique pour résoudre des équations du troisième degré. Voici un exemple :

Soit à résoudre l'équation (E) :  $x^3 - 3x^2 + 2x + 1 = 0$

Omar Al Khayam déclare que

- 0 n'est solution de (E),
- (E) est équivalente à

$$(E) : x^2 - 3x + 2 = -\frac{1}{x},$$

- Tracer les courbes représentatives de chacune des fonctions

$$f : x \mapsto x^2 - 3x + 2 \quad \text{et} \quad g : x \mapsto -\frac{1}{x}$$

donner une valeur approchée des abscisses des points d'intersections éventuels des deux courbes.

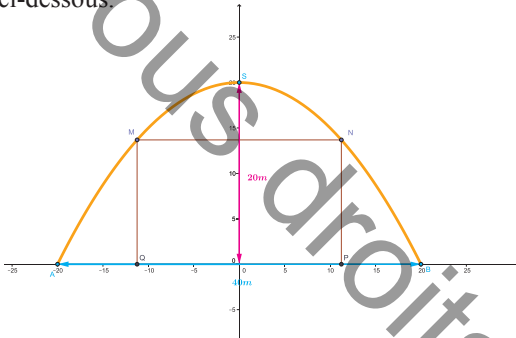


## EXERCICES D'ENTRAINEMENT

- 1) Donner une valeur approchée de(s) solutions de (E).
- 2) Utiliser la méthode de Omar Al Khayam pour résoudre l'équation (E) :  $x^3 - 4x^2 + 4x - 2 = 0$ .

16

La toiture d'une salle de sport a pour section transversale une arche de parabole comme c'est indiqué sur la figure ci-dessous.



On veut partager la salle en 2 parties par un rideau de toile vertical MNPQ touchant le sol et suspendu à une poutre horizontale MN. Pour des raisons pratiques, la longueur de la poutre MN ne peut qu'être comprise entre deux valeurs extrêmes : 20m et 30m.

Dans un repère orthonormal  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ , on considère la parabole ayant pour sommet  $S(0;20)$  et passant par les points  $A(-20;0)$  et  $B(20;0)$ .

Déterminer la longueur de la poutre qui permet de mettre en place le rideau nécessitant le moins de tissu possible.



## MATHS & SPORT

Les mathématiques jouent un rôle très important dans la modélisation de phénomènes sportifs à partir d'une analyse des données statistiques.

En Basketball, comme pour d'autres disciplines telles que le lancement du poids ou celui du javelot, ... etc, on a montré que la hauteur d'un objet ( poids, ballon, ...) en mètres est gérée en fonction de sa portée  $x$  par la

$$f(x) = \left( \frac{-16}{v_0^2 \cos^2 \alpha} \right) x^2 + (\tan \alpha) x + h_0$$

relation où  $v_0$

désigne la vitesse initiale de l'objet,  $\alpha$  l'angle sous lequel l'objet a été lancé et  $h_0$  la hauteur à partir de laquelle l'objet a été lancé.



On peut trouver dans la nature plusieurs phénomènes en mouvement qui décrivent des trajectoires hyperboliques.

Ainsi la courbe que dessine le sillage d'un voilier ou une régata sur l'eau est une hyperbole.

# Chapitre 6

## Suites réelles



### Sommaire

- I. Définition et vocabulaire
- II. Principe de récurrence
- III. Suites arithmétiques
- IV. Suites géométriques



## Pour démarrer

### Activité 1

Chacune des listes suivantes obéit à une règle. La compléter par deux termes :

- 1) 1, 3, 5, 7, 9, ...      2) 1, 3, 6, 10, ...      3) 1, 3, 7, 15 ...

### Activité 2

On considère l'algorithme suivant pour générer des nombres réels :

- 1) Choisir un nombre ,
- 2) L'élever au carré ,
- 3) Multiplier par 3 le résultat obtenu ,
- 4) Retrancher 1 au résultat obtenu.

Recopier et compléter le tableau suivant :

Nombre choisi	-1				
Nombre généré	2				

### Activité 3

On considère l'algorithme suivant pour générer des nombres réels

- 1) Choisir un nombre, appelé nombre initial ,
- 2) Le multiplier par 2 ,
- 3) Additionner 5 au résultat ,
- 4) Le nombre ainsi obtenu devient le nouveau nombre initial

Recopier et compléter le tableau suivant :

Nombre choisi	-2				
Nombre généré	1				

### Activité 4

On considère la liste des multiples positifs de 13, ordonnés suivant l'ordre croissant.

Donner le premier nombre de cette liste, son cinquième nombre, le 2015<sup>ème</sup> nombre de cette liste.

### Activité 5

Chaque être humain a deux parents. Combien avez-vous de grands-parents? D'arrière-grands-parents? D'arrière- arrière -grands-parents?

### Activité 6

- 1) Calculer chacun des nombres suivants      a)  $1-2^6$ ,      b)  $\sqrt{2}^5$       c)  $3^5-2^5$ .
- 2) Simplifier les nombres suivants       $3^5 \times 3^7$ ,       $\frac{5^6}{5^3}$ ,       $(13^2)^4$  et  $\frac{1-\sqrt{3}^5}{1-\sqrt{3}}$ .



## I) Définition et vocabulaire

### Activité 1

La fraction  $\frac{1}{7}$  admet une écriture décimale périodique et illimitée. La première décimale de cette écriture, notée  $d_1$ , et elle est égale à 1, la seconde, notée  $d_2$  et elle est égale à 4, etc...

Pour tout entier naturel  $n$ , on note  $d_n$  la  $n^{\text{ème}}$  décimale de la fraction  $\frac{1}{7}$ .

- 1) Déterminer  $d_3, d_4, d_5$  et  $d_6$ .
- 2) a) Vérifier à l'aide d'une calculatrice que pour tout entier naturel  $n$ , on a  $d_{n+6} = d_n$ .  
b) En déduire la valeur de  $d_{2015}$ .

Le réel  $d_n$  se lit «  $d$  indice  $n$  » ou «  $d n$  » où  $n$  est un entier naturel non nul.

### Activité 2

On considère la fonction  $f : x \mapsto \frac{1}{x+1}$ . Pour tout entier naturel  $n$ , on note  $I_n = f(n)$ .

- 1) Déterminer  $I_0, I_1, I_2 \dots I_5$ .
- 2) A quel indice  $n$  correspond le réel  $10^{-2}$  ?

### Activité 3

On considère la liste des nombres pairs, on note  $P_0$  le premier terme de la liste et pour tout entier naturel non nul  $n$ ,  $P_n$  son  $(n+1)^{\text{ème}}$  terme.

- 1) Donner  $P_0, P_1$  et  $P_{15}$ .
- 2) Exprimer  $P_n$  en fonction de  $n$ .

### Définition:

Soit  $n_0$  un entier naturel.

Lorsqu'à tout entier  $n$  supérieur ou égal à  $n_0$ , on associe un réel unique  $U_n$ , on dit qu'on a défini une suite réelle.

Le réel  $U_n$  s'appelle le terme général de la suite.

Cette suite est notée  $(U_n)_{n \geq n_0}$  ou  $(U_n)$  ou simplement  $U$ .



## Activité 4

On considère la suite  $(U_n)$  définie par son terme général  $U_n = n^2 + n + 1$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

1) Calculer  $U_0, U_1$  et  $U_8$

2) Soit  $k$  un entier naturel non nul. Exprimer en fonction de  $k$  chacun des nombres suivants :  
 $U_{k-1}, U_{k+1}, U_{2k}$  et  $U_{3k+1}$ .

## II) Le principe de récurrence

### Activité 1

On considère la suite  $U$  définie pour tout  $n \in \mathbb{N}$  par  $U_n = 1 + 3 + 5 + \dots + (2n + 1)$ .

1) Vérifier que  $U_0 = 1^2$ .

2) Soit  $k \in \mathbb{N}$ . On suppose que  $U_k = (k + 1)^2$ .

a) Vérifier que  $U_{k+1} = U_k + (2k + 3)$ .

b) En déduire que  $U_{k+1} = (k + 2)^2$ .

3) Utiliser ce qui précède pour calculer de proche en proche  $U_1, U_2, U_3, \dots$

### Principe de récurrence:

Soit  $n_0$  un entier naturel et  $\mathcal{P}$  une propriété dépendant d'un entier naturel  $n$  supérieur ou égal à  $n_0$

Si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

1-  $\mathcal{P}$  est vraie pour  $n = n_0$ .

2- Soit un entier  $k \geq n_0$ . Si  $\mathcal{P}$  est vraie pour  $n = k$  alors  $\mathcal{P}$  est vraie pour  $n = k + 1$ .

Alors  $\mathcal{P}$  est vraie pour tout  $n$  supérieur ou égal à  $n_0$ .

### Activité 2

On considère la suite  $U$  définie par  $U_0 = 1$  et pour tout entier naturel  $n$ ,  $U_{n+1} = \frac{1}{2}U_n + 1$ .

1) Montrer par récurrence que pour tout  $n \in \mathbb{N}, U_n \leq 2$ .

2) Montrer par récurrence que pour tout  $n \in \mathbb{N}, U_n = 2 - \frac{1}{2^n}$ .



## III) Suites arithmétiques

### 1) DEFINITION

#### Activité 1

Un cycliste décide d'augmenter chaque jour de 5 km la distance parcourue lors de son entraînement.

Il parcourt 50 km le premier jour.

Combien de kilomètres parcourt-il :

- a) le deuxième jour?
- b) le troisième jour?
- c) le 10<sup>ème</sup> jour?



#### Activité 2

Le nombre d'adhérents d'un club sportif augmente de 30 adhérents par an. En 2014 on compte 400 adhérents.

On note  $U_0$  le nombre d'adhérents en 2014 et  $U_n$  le nombre d'adhérents en 2014+n.

Compléter le schéma suivant :

$$400 \xrightarrow{+30} 430 \xrightarrow{+30} 460 \xrightarrow{+30} \dots$$

$$U_0 \xrightarrow{+30} U_1 \xrightarrow{+30} \dots \xrightarrow{+30} \dots$$

#### Définition:

Une suite  $(U_n)$  est dite arithmétique si et seulement si , il existe un réel  $r$  tel que pour tout entier naturel  $n$ ,  $U_{n+1} - U_n = r$ . Le réel  $r$  s'appelle raison de la suite  $(U_n)$ .

#### Activité 3

On considère la suite arithmétique de premier terme

$U_0 = 2$  et de raison  $r = 3$ .

Calculer  $U_1, U_2$  et  $U_4$ .



Pour passer d'un terme d'une suite arithmétique au terme suivant, on lui ajoute la raison  $r$ .



## Activité 4

Soit  $(U_n)$  la suite de premier terme  $U_0 = -1$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = U_n + 2$ .

Justifier que  $(U_n)$  est une suite arithmétique, puis donner ses cinq premiers termes.

## 2) TERME GENERAL D'UNE SUITE ARITHMETIQUE

### Activité 1



Une partie des gradins d'une salle polyvalente est constituée de 20 rangées. La première rangée compte 30 sièges, la deuxième en compte 34, la troisième en compte 38 et ainsi de suite. On désigne par  $N_1, N_2, N_3, \dots$  le nombre de sièges respectif de la 1<sup>ère</sup>, 2<sup>ème</sup>, 3<sup>ème</sup>, ...rangée.

Recopier et compléter :

$$N_6 = N_5 + 4 = N_4 + 2 \times 4 = N_3 + \dots = N_2 + \dots = N_1 + \dots \text{ et } N_{10} = N_9 + 4 = \dots = N_6 + \dots = \dots$$

### Activité 2

Soit  $(U_n)$  une suite arithmétique de premier terme  $U_0$  et de raison  $r$ .

- 1) Exprimer  $U_2$  et  $U_3$  en fonction de  $U_0$  et  $r$ .
- 2) Montrer par récurrence que pour  $n \in \mathbb{N} U_n = U_0 + nr$ .

En déduire que pour tous entiers naturels  $n$  et  $k$ ,  $U_n = U_k + (n - k)r$

### Retenons

Soit  $(U_n)$  une suite arithmétique de premier terme  $U_0$  et de raison  $r$ , alors :

- Pour tout  $n \in \mathbb{N}, U_n = U_0 + nr$ .
- Pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et  $k \in \mathbb{N} U_n = U_k + (n - k)r$ .

### Activité 3

Soit  $(U_n)$  une suite arithmétique de premier terme  $U_0 = 2,5$  et de raison 5

Calculer  $U_{33}$  et  $U_{56}$ .



## LE COURS

### Activité 4

Soit  $(U_n)$  une suite arithmétique tels que  $U_5 = 8$  et  $U_0 = 2$ .

Calculer la raison de la suite.

### Activité 5

Soit  $(U_n)$  une suite arithmétique tels que  $U_5 = 8$  et  $U_{10} = 18$ .

Calculer la raison  $r$  et le premier terme  $U_0$  de la suite.

### Activité 6

Un club de sport nautique affiche les tarifs de location des planches à voile à l'heure.

La première heure coûte 10 dinars et chaque heure supplémentaire coûte 7,5 dinars.

- 1) Quel est le prix à payer pour louer une planche à voile pendant trois heures ?
- 2) Soit  $n$  un entier naturel non nul. On note  $U_n$  le prix à payer pour la location d'une planche à voile pour  $n$  heures. Exprimer  $U_n$  en fonction de  $n$ .

### Activité 7

On considère la suite  $(U_n)$  définie pour tout entier naturel  $n$  par  $U_n = 2n - 3$

Montrer que la suite  $(U_n)$  est arithmétique. Donner sa raison et son premier terme.

### Retenons

Toute suite  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par  $U_n = an + b$ , où  $a$  et  $b$  sont deux réels donnés, est une suite arithmétique de raison  $a$  et de premier terme  $b$ .

### Activité 8

Le plan est muni d'un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

Soit la suite arithmétique  $(a_n)$  définie par son terme général  $a_n = -2n + 1$ .

- 1) a) Placer les points  $A_0(0, a_0)$ ,  $A_1(1, a_1)$  et  $A_2(2, a_2)$   
b) Vérifier que ces points sont alignés.
- 2) Montrer que pour tout entier naturel  $n$ , le point  $A_n(n, a_n)$ , appartient à la droite d'équation  $y = -2x + 1$ .



## 3) SOMME DE TERMES CONSECUTIFS D'UNE SUITE ARITHMETIQUE

### Activité 1

On considère la suite arithmétique  $(u_n)$  de premier terme 1 et de raison 1.

- 1) Justifier que la suite  $(u_n)$  est la suite des entiers naturels non nuls.
- 2) Pour tout entier  $n \geq 1$ , on pose  $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_{n-1} = 1 + 2 + 3 + \dots + n$ .  
 $S_n$  désigne la somme des  $n$  premiers termes de la suite  $(u_n)$ .
  - a) Comment calculer le plus simplement possible  $S_9$  ?
  - b) Ecrire  $S_{14}$  de deux façons différentes suivant le modèle suivant et compléter les calculs :

$$S_{14} = 1 + 2 + 3 + \dots + 14$$

$$S_{14} = 14 + 13 + 12 + \dots + 1$$

$$2S_{14} =$$

- 3) a) Quelle conjecture peut-on émettre pour le calcul de  $S_n$  où  $n \in \mathbb{N}^*$  ?
- b) Montrer par récurrence cette conjecture.

#### Retenons

Pour tout entier  $n \geq 1$ , on a

$$S_n = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(1+n)}{2}$$

### Activité 2

Soit  $(U_n)$  une suite arithmétique de premier terme

$U_0$  et de raison  $r$ . Pour tout entier  $n \geq 1$ , on pose

$$S_n = U_0 + U_1 + U_2 + \dots + U_{n-1}$$

- 1) a) Montrer que d'une part  $S_n = U_0 + (U_0 + r) + (U_0 + 2r) + \dots + (U_0 + (n-1)r)$  et que d'autre part  $S_n = U_{n-1} + (U_{n-1} - r) + (U_{n-1} - 2r) + \dots + (U_{n-1} - (n-1)r)$ .
- b) Calculer alors  $2S_n$ .

$$2) \text{ Montrer que } S_n = \frac{n(U_0 + U_{n-1})}{2}.$$

$$\text{En déduire que } S_n = nU_0 + \frac{n(n-1)r}{2}$$



## Retenons

Soit  $(U_n)$  une suite arithmétique de premier terme  $U_0$  et de raison  $r$ .

Soit  $n$  un entier naturel non nul. La somme des  $n$  premiers termes de  $(U_n)$  est :

$$S_n = U_0 + U_1 + U_2 + \dots + U_{n-1} = n \times \frac{(U_0 + U_{n-1})}{2} = nU_0 + \frac{n(n-1)r}{2}$$

### Activité 3

Soit  $(U_n)$  une suite arithmétique de premier

terme  $U_0 = 2$  et de raison  $r = 5$

Calculer  $U_0 + U_1 + U_2 + \dots + U_{20}$ .

Calculer  $U_0 + U_1 + U_2 + \dots + U_{30}$ .

### Activité 4

Calculer  $1 + 4 + 7 + \dots + 151$ .

### Activité 5

Soit  $(U_n)$  une suite arithmétique vérifiant  $U_5 = 13$  et  $U_8 = 22$ .

- 1) Ecrire  $U_n$  en fonction de  $n$ .
- 2) a) Déterminer en fonction de  $n$  la somme  $S_{n+1} = U_0 + U_1 + U_2 + \dots + U_n$ .
- b) Pour quelle valeur de  $n$ ,  $S_{n+1} = 143$  ?



Diagram illustrating the formula for the sum of an arithmetic series:

$$S_n = U_0 + U_1 + U_2 + \dots + U_{n-1} = n \times \frac{(U_0 + U_{n-1})}{2}$$

Annotations:

- premier terme de la suite (points to  $U_0$ )
- nombre de termes figurant dans la somme (points to  $n$ )
- denier terme figurant dans la somme (points to  $U_{n-1}$ )

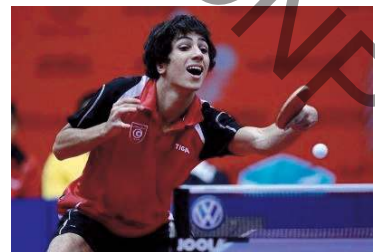
## IV ) Suite géométrique

### 1) DEFINITION

#### Activité 1

Une balle de ping pong rebondit sur la table de sorte que :

- le premier impact de la balle est à deux mètres du bord droit de la table,
- le premier rebond mesure 1m de longueur,
- chaque rebond est deux fois moins long que le précédent.





## LE COURS

On se propose de déterminer les longueurs des rebonds successifs de la balle.

On désigne par  $L_1$  la longueur du premier rebond,  $L_2$  celle du second rebond, ainsi de suite.

Recopier et compléter le schéma suivant :

$$1m \xrightarrow{\times \frac{1}{2}} 0,5m \xrightarrow{\times \frac{1}{2}} \dots \xrightarrow{\times \frac{1}{2}} \dots \xrightarrow{\times \dots} \dots$$

$$L_1 \xrightarrow{\times \frac{1}{2}} L_2 \xrightarrow{\times \frac{1}{2}} \dots \xrightarrow{\times \frac{1}{2}} \dots \xrightarrow{\times \dots} \dots$$

### Activité 2

Une association sportive loue la salle polyvalente municipale à 1500 dinars par mois. Le contrat de la location stipule une augmentation annuelle de 5%.

Que serait le loyer mensuel au cours de la deuxième année ? Au cours de la troisième année ?

#### Définition:

Une suite  $(U_n)$  est dite géométrique si et seulement si, il existe un réel  $q$  tel que pour tout entier naturel  $n$ , on a :  $U_{n+1} = qU_n$ . Le réel  $q$  s'appelle raison de la suite  $(U_n)$ .

### Activité 3

Soit  $(U_n)$  une suite géométrique de premier terme  $U_0 = 2$  et de raison  $q = 3$ . Calculer  $U_1$  et  $U_2$ .



Pour passer d'un terme d'une suite géométrique au terme suivant, on le multiplie par la raison  $q$ .

### Activité 4

Soit  $(U_n)$  la suite géométrique de premier terme  $U_0 = -1$

et vérifiant  $U_{n+1} = \frac{1}{2}U_n$ . Donner la raison de la suite et calculer  $U_1$  et  $U_2$ .

### Activité 5

- 1) Montrer que la suite définie sur  $\mathbb{N}$  par  $U_n = 3^n$  est une suite géométrique.
- 2) La suite  $(U_n)$  définie par  $U_n = n^2$  est-elle une suite géométrique ?

## 2) TERME GENERAL D'UNE SUITE GEOMETRIQUE

### Activité 1

Le budget de la section natation d'un club en 2014 est 100 000 dinars. Ce budget augmente à un taux annuel de 10%. On pose  $B_0, B_1, B_2, \dots$  les budgets respectifs de cette section en 2014, 2015, 2016, ....



## LE COURS

Recopier et compléter :

$$B_1 = 1,1 \times B_0, \quad B_2 = \dots \times B_1, \quad B_2 = 1,1^{\dots} \times B_0, \quad B_3 = 1,1^{\dots} \times B_0, \quad B_4 = 1,1^{\dots} \times B_0$$

### Activité 2

Soit  $(U_n)$  une suite géométrique de premier terme  $U_0$  et de raison  $q$ .

- 1) Exprimer  $U_1$  et  $U_2$  en fonction de  $U_0$  et  $q$ .
- 2) Montrer par récurrence que pour tout  $n \in \mathbb{N}, U_n = q^n U_0$ .
- 3) En déduire que pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et  $k \in \mathbb{N}, U_n = q^{n-k} U_k$ .

### Retenons

Soit  $(U_n)$  une suite géométrique de premier terme  $U_0$  et de raison  $q$ .

Alors pour tout  $n \in \mathbb{N}, U_n = q^n U_0$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et  $k \in \mathbb{N}, U_n = q^{n-k} U_k$ .

### Activité 3

Soit  $(U_n)$  une suite géométrique vérifiant,  $U_4 = 2$  et  $U_7 = 16$ .

Déterminer sa raison  $q$  et son premier terme  $U_0$ .

## 4) SOMME DE TERMES CONSECUTIFS D'UNE SUITE GEOMETRIQUE

### Activité 1

- 1) a) Calculer  $1 + 3 + 3^2 + 3^3$ .  
b) Justifier que  $1 + 3 + 3^2 + 3^3 = \frac{3^4 - 1}{3 - 1}$ .
- 2) En déduire que  $5 + 5 \times 3 + 5 \times 3^2 + 5 \times 3^3 = 5 \times \left( \frac{3^4 - 1}{3 - 1} \right)$

### Activité 2

Soit  $(U_n)$  une suite géométrique de premier terme  $U_0$  et de raison  $q$ .

On pose  $S_n = U_0 + U_1 + U_2 + \dots + U_{n-1}$ .

- 1) Montrer que si  $q = 1$ , alors  $S_n = nU_0$ .



## LE COURS

2) On suppose dans cette question que  $q \neq 1$ .

a) Montrer que  $S_n - qS_n = U_0(1 - q^n)$ .

b) En déduire que  $S_n = U_0 \frac{1 - q^n}{1 - q}$ .



$$S_n = U_0 \times \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

nombre de termes figurant dans la somme (pointing to  $n$  in the numerator)  
 premier terme de la suite (pointing to  $U_0$ )  
 raison de la suite (pointing to  $1 - q$ )

### Retenons :

Soit  $(U_n)$  une suite géométrique de premier terme  $U_0$  et de raison  $q$ .

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on note  $S_n = U_0 + U_1 + U_2 + \dots + U_{n-1}$ .

Si  $q = 1$ , alors  $S_n = nU_0$ .

Si  $q \neq 1$ , alors  $S_n = U_0 \frac{1 - q^n}{1 - q}$ .

### Activité 3

Soit  $(U_n)$  une suite géométrique de premier terme  $U_0 = 3$  et de raison  $q = 2$ .

Calculer  $U_0 + U_1 + \dots + U_5$ .

### Activité 4

Utiliser la formule de la somme de termes consécutifs d'une suite géométrique pour calculer chacune des sommes suivantes :

a)  $1 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{15}$

b)  $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{1024}$

c)  $2 + \frac{4}{3} + \frac{8}{9} + \dots + \frac{2^{142}}{3^{141}}$

d)  $2 + 10 + 50 + \dots + 2 \times 5^{2015}$



## LE COURS



### Activité 5

On estime qu'en 2008, les industriels des balles de tennis ont vendu 250 millions de balles. On admet que l'évolution des ventes des balles de tennis à travers le monde depuis 2008 est modélisée à l'aide de deux suites  $(U_n)$  et  $(V_n)$  où  $(U_n)$  est une suite arithmétique de premier terme 250 et de raison  $r = 0,76$  et  $(V_n)$  une suite géométrique de premier terme 250 et de raison  $q = 1,003$

- 1) Donner en fonction du nombre d'années  $n$  écoulées depuis 2008, les expressions  $U_n$  et  $V_n$ .
- 2) Afficher sur un tableur les valeurs de chacune de ces deux suites pour  $n$  allant de 0 à 20.
- 3) En quelles années le nombre de balles vendues selon le modèle arithmétique est-il supérieur au nombre de ventes selon le modèle géométrique ?
- 4) En quelles années vendra-t-on plus de 257 millions de balles selon chacun des deux modèles ?
- 5) Pour lutter contre la pollution due aux balles de tennis usagées, on a mis en place une technique transformant les balles usagées en tapis pour sportifs. Environ 40 000 balles transformées permettent de fabriquer 100 mètres carrés de tapis.  
Combien de mètres carrés aurait-on fabriqué selon chacun des deux modèles si on a récupéré toutes les balles usagées de 2008 jusqu'à 2015 ?



## EXERCICES RÉVOLUS

### Enoncé 1

Une manufacture de textile spécialisée dans le domaine des sports, confectionne des maillots pour des footballeurs. Au cours de l'année 2010, elle a produit 25000 maillots. En raison d'une forte demande, la direction de la manufacture décide d'augmenter la production de 3500 maillots par an.

On note  $P_0$  la production de maillots en 2010 et pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $P_n$ , la production au cours de l'an 2010+n.

- 1) a) Donner les valeurs de  $P_1$  et  $P_2$ .
  - b) Déterminer l'expression de  $P_n$  en fonction de l'entier naturel  $n$ .
  - c) En déduire la nature de la suite  $(P_n)$  et la caractériser.
- 2) Toute la production de la manufacture est vendue au prix unitaire de 70 dinars.  
Quel est le chiffre d'affaire de cette manufacture au cours de la période 2010-2015 ?



### Corrigé 1

- 1) a)  $P_1 = 25000 + 3500 = 28500$  et  $P_2 = 25000 + 2 \times 3500 = 32000$ .
- b) On montre par récurrence que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $P_n = 25000 + 3500 \times n$ .

En effet, pour  $n = 0$ ,  $P_0 = 25000 = 25000 + 3500 \times 0$ .

Soit  $k \in \mathbb{N}$ , supposons  $P_k = 25000 + 3500 \times k$ .

Montrons que  $P_{k+1} = 25000 + 3500 \times (k+1)$ .

Comme l'augmentation de la production est de 3500 maillots par an, on a :

$$P_{k+1} = P_k + 3500 = 25000 + 3500 \times k + 3500 = 25000 + 3500 \times (k+1).$$

Ainsi pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $P_n = 25000 + 3500 \times n$ .

- c) Le terme général de la suite  $(P_n)$  est de la forme

$P_n = a \times n + b$  où  $a = 3500$  et  $b = 25000$ . Ainsi  $(P_n)$  est une suite arithmétique, de premier terme  $P_0 = 25000$  et de raison  $r = 3500$ .



## EXERCICES RÉVOLUS

- 2) Le chiffre d'affaire  $\mathcal{A}$  est obtenu comme étant la production totale  $S_6$  au cours de la période 2010-2015, multipliée par le prix unitaire d'un maillot.

$$S_6 = P_0 + P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5 = 6 \times \frac{2P_0 + 5 \times 3500}{2} = 202\,500.$$

Ainsi  $\mathcal{A} = 202\,500 \times 70 = 14\,175\,000$  dinars.

### Enoncé 2

Lors de l'assemblée générale d'un club sportif, une affiche montre que chaque année, l'équipe conserve 80% de ses licenciés de la saison précédente et qu'elle en accueille 20 nouveaux.

On sait qu'en 2010, le club comptait 150 licenciés.

- 1) Quel était le nombre de licenciés en 2011, puis celui en 2012 ?
- 2) Pour tout entier naturel  $n$ , on désigne par  $U_n$  le nombre de licenciés de ce club en l'an  $2010+n$ .

Exprimer  $U_{n+1}$  en fonction de  $U_n$  pour tout entier naturel  $n$ .

- 3) Soit  $(V_n)$  la suite définie pour tout entier naturel  $n$ , par  $V_n = U_n - 100$ .
  - a) Montrer que  $(V_n)$  est une suite géométrique de premier terme 50 et de raison 0,8.
  - b) Exprimer alors  $V_n$  en fonction de  $n$ .
  - c) En déduire que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $U_n = 100 + 50 \times 0,8^n$ .

### Corrigé 2

- 1) Le nombre de licenciés en 2011 est obtenu en multipliant le nombre de licenciés en 2010 par le coefficient multiplicateur 0,80 correspondant au pourcentage 80% puis d'ajouter 20.

$$\text{Ce qui donne } 150 \times 0,8 + 20 = 140.$$

$$\text{Le nombre de licenciés en 2012 était } 140 \times 0,8 + 20 = 132.$$

- 2) Pour tout entier naturel  $n$ ,  $U_{n+1} = 0,8 \times U_n + 20$ .
  - 3) a) Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a  $V_{n+1} = U_{n+1} - 100 = (0,8 \times U_n + 20) - 100$ .

Donc  $V_{n+1} = 0,8(U_n - 100) = 0,8 \times V_n$  et par suite,  $(V_n)$  est une suite géométrique de raison 0,8 et de premier terme  $V_0 = U_0 - 100 = 50$ .

b) Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $V_n = V_0 \times 0,8^n = 50 \times 0,8^n$ .

c) Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $U_n = V_n + 100 = 50 \times 0,8^n + 100$ .



## Principe de récurrence:

Soit  $n_0$  un entier naturel et  $P_n$  une propriété dépendant d'un entier naturel  $n$  supérieur ou égal à  $n_0$ . Si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

- 1-  $P_{n_0}$  est vraie.
- 2- Si pour tout entier  $k \geq n_0$ ,  $P_k$  est vraie alors  $P_{k+1}$  est vraie.

Alors  $P_n$  est vraie pour tout entier  $n \geq n_0$ .

## Suite arithmétique:

Une suite  $(U_n)$  est dite arithmétique si et seulement si il existe un réel  $r$  tel que pour tout entier naturel  $n$ , on a

$$U_{n+1} - U_n = r.$$

Le réel  $r$  s'appelle raison de la suite  $(U_n)$ .

## Retenons

- Soit  $(U_n)$  une suite arithmétique de premier terme  $U_0$  et de raison  $r$ , alors pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $U_n = U_0 + nr$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et  $k \in \mathbb{N}$ ,  $U_n = U_k + (n - k)r$
- Toute suite définie sur  $\mathbb{N}$  par  $U_n = an + b$ , où  $a$  et  $b$  sont deux réels donnés, est une suite arithmétique de raison  $a$  et de premier terme  $b$ .
- Pour tout entier  $n \geq 1$ , on pose  $S_n = U_0 + U_1 + U_2 + \dots + U_{n-1}$ .

Alors

$$S_n = n \frac{U_0 + U_{n-1}}{2} = nU_0 + \frac{(n-1)r}{2}.$$

## Suite géométrique:

Une suite  $(U_n)$  est dite géométrique si et seulement si il existe un réel  $q$  tel que pour tout entier naturel  $n$ , on a :

$$U_{n+1} = qU_n.$$

Le réel  $q$  s'appelle raison de la suite  $(U_n)$ .

## Retenons

- Soit  $(U_n)$  une suite géométrique de premier terme  $U_0$  et de raison  $q$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $U_n = q^n U_0$  et pour  $n \in \mathbb{N}$  et  $k \in \mathbb{N}$ ,  $U_n = q^{n-k} U_k$
- Pour tout entier  $n \geq 1$ , on pose  $S_n = U_0 + U_1 + U_2 + \dots + U_{n-1}$ .

Alors si  $q = 1$ ,  $S_n = nU_0$  et si

$$q \neq 1, S_n = U_0 \frac{1 - q^n}{1 - q}.$$



## MOBILISER SES COMPÉTENCES

### Situation 1

Un athlète décide de participer à un marathon (42,195km). Il débute le 1<sup>er</sup> janvier 2014 son entraînement en courant 3 tours de piste. Chaque jour il augmente la distance parcourue d'un tour de piste. On rappelle qu'un tour de piste fait 400 mètres.

A quelle date il dépassera la distance de 42,195km ?

#### Stratégie de résolution

Utiliser une suite arithmétique donnant la distance parcourue  $D_n$   $n$  jours après le 1<sup>er</sup> janvier 2014 .

### Situation 2

Les records battus et les bonnes performances des athlètes lors JO de Mexico ont mis en évidence les effets de la pression atmosphérique dus à l'altitude, ce qui a amené les clubs à organiser des stages en altitude.

Au niveau de la mer (altitude 0), la pression atmosphérique est 1013 millibars. On admet que la pression diminue de 1,2% à chaque élévation de 100 mètres.

- 1) Quelle est la pression atmosphérique à Mexico, située à 2400 mètres d'altitude.
- 2) Les JO de 2016, se déroule à Rio située à 400 mètres d'altitude.  
Quelle est la pression à Rio ?

#### Stratégie de résolution

Utiliser une suite géométrique donnant la pression atmosphérique  $P_n$  pour une altitude égale à  $100n$  mètres.



# S'AUTO-ÉVALUER

## QCM

Pour chacune des questions suivantes, trois réponses sont proposées parmi lesquelles une seule est correcte. Indiquer la lettre qui lui correspond.

	A	B	C
1 $(a_n)$ définie par $a_n = \frac{n+2}{3}$	$(a_n)$ est arithmétique	$(a_n)$ est géométrique	$(a_n)$ n'est ni arithmétique ni géométrique
2 $(b_n)$ définie par $b_n = \frac{3}{2-n}$	$(b_n)$ est arithmétique	$(b_n)$ est géométrique	$(b_n)$ n'est ni arithmétique ni géométrique
3 $(U_n)$ définie par $U_n = 4 - 3n$	$(U_n)$ est arithmétique	$(U_n)$ est géométrique	$(U_n)$ n'est ni arithmétique ni géométrique
4 $(V_n)$ définie par $V_n = 2 \times 10^n$	$(V_n)$ est arithmétique	$(V_n)$ est géométrique	$(V_n)$ n'est ni arithmétique ni géométrique
5 $(W_n)$ est définie par $W_0 = 1$ et $W_{n+1} = nW_n$	$(W_n)$ est arithmétique	$(W_n)$ est géométrique	$(W_n)$ n'est ni arithmétique ni géométrique
6 $(U_n)$ est définie sur $\mathbb{N}$ . Son $n^{\text{ième}}$ terme est	$U_{n-1}$	$U_n$	$U_{n+1}$
7 $(V_n)$ est définie sur $\mathbb{N}^*$ . Son $n^{\text{ième}}$ terme est	$V_{n-1}$	$V_n$	$V_{n+1}$

## Vrai-Faux

Indiquer si les propositions suivantes sont vraies ou fausses.

- Soit la suite  $(U_n)$  définie sur  $\mathbb{N}$  par  $U_n = 3 - 5n$ .
  - $(U_n)$  est une suite arithmétique de raison 3.
  - $(U_n)$  est une suite arithmétique de premier terme -5.
- Soit la suite  $(V_n)$  définie sur  $\mathbb{N}$  par  $V_n = 5^{n+1} - 5^{n-1}$ 
  - $(V_n)$  est une suite géométrique de raison 5.
  - $(V_n)$  est une suite géométrique de premier terme 24.
- Si  $(U_n)$  est une suite arithmétique de raison -2 alors  $U_{10} + U_{11} + \dots + U_{20} = 11 \times U_{10} - 110$
- Si  $(U_n)$  est une suite géométrique de raison 5 alors  $U_5 + U_6 + \dots + U_{15} = U_5 \times \frac{5^{16} - 1}{4}$ .



## EXERCICES D'ENTRAINEMENT

1

Calculer les quatre premiers termes de chacune des suites suivantes:

$$\begin{array}{ll} a) U_n = \frac{n+2}{n-3}, n \geq 4 & b) U_n = \sqrt{2}^n \\ c) \begin{cases} U_0 = 3 \\ U_{n+1} = 2U_n - 1 \end{cases} & d) \begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = U_n - n \end{cases} \end{array}$$

2

Soit  $(U_n)$  la suite définie pour tout entier naturel  $n$  par

$$U_n = \frac{n+1}{2n-3}. \text{ Calculer } U_3, U_4, U_{34} \text{ et } U_{52}.$$

3

Montrer par récurrence que pour tout entier naturel  $n$ ,

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n \leq 1.$$

4

Soit  $(U_n)$  une suite arithmétique de premier terme

$$U_0 = 3 \text{ et raison } r = -2$$

- 1) Calculer  $U_{10}, U_{31}$  et  $U_{46}$ .
- 2) Déterminer  $U_n$  en fonction de  $n$ .
- 3) Calculer  $U_0 + U_1 + \dots + U_{30}$  et  $U_1 + U_2 + \dots + U_{15}$ .

5

Montrer que la suite définie sur  $\mathbb{N}^*$  par  $U_n = 3n - 1$  est une suite arithmétique. Préciser sa raison et son premier terme.

6

Soit  $(U_n)$  une suite arithmétique, calculer son premier

terme  $U_0$  et sa raison sachant que  $U_5 = 3$  et  $U_8 = 12$ .

Calculer  $U_0 + U_1 + \dots + U_{99}$ .

7

Montrer que la suite définie sur  $\mathbb{N}$  par  $U_n = 2 \times 3^n$  est une suite géométrique. Donner sa raison et son premier terme.

8

Soit  $(U_n)$  une suite géométrique de premier terme

$$U_0 = 3 \text{ et de raison } q = 2$$

- 1) Calculer  $U_3, U_4$  et  $U_5$
- 2) Déterminer  $U_n$  en fonction de  $n$ .
- 3) Déterminer  $U_0 + U_1 + \dots + U_n$  en fonction de  $n$ .

9

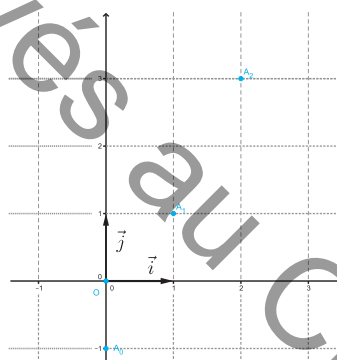
Déterminer pour chacune des suites suivantes l'expression de son terme général :

- 1)  $(U_n)$  est la suite telle que à partir de  $n = 10$ , chaque terme est égal au précédent augmenté de 5%.
- 2)  $(V_n)$  est la suite telle que à partir de  $n = 5$ , chaque terme est égal au précédent diminué de 10%.
- 3)  $(W_n)$  est la suite telle que son premier terme est  $10^6$  et que chaque terme est égal au précédent augmenté de 6% et diminué de 6000.

10

On a placé dans un repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  les points

$A_n(n, U_n)$  où  $(U_n)$  est une suite arithmétique.



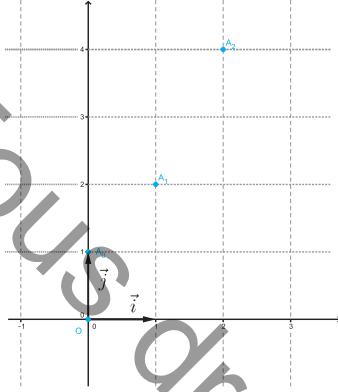
- 1) Déterminer la raison de la suite et donner son premier terme.
- 2) Donner le terme général de la suite.
- 3) Calculer la somme des 100 premiers termes de la suite.



## EXERCICES D'ENTRAINEMENT

11

On a placé dans un repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  les points,  $A_n(n, U_n)$  où  $(U_n)$  est une suite géométrique.



- 1) Déterminer la raison de la suite et donner son premier terme.
- 2) Donner le terme général de la suite  $(U_n)$ .
- 3) Calculer la somme  $S_n$  des  $n$  premiers termes de la suite.
- 4) A partir de quel rang,  $S_n$  sera-t-elle supérieur à 125 ?

12

Un boxeur de catégorie poids lourd veut participer à un tournoi international dans la catégorie mi-lourd (entre 75kg et 81kg). Pour cela il décide de suivre un régime à partir du 1<sup>er</sup> Janvier qui lui permet de perdre régulièrement 2kg par mois.

Son poids initial est 100kg, on pose  $P_0 = 100$  et on note  $P_n$  son poids après  $n$  mois du régime.

- 1) Montrer que  $(P_n)$  est une suite arithmétique.
- 2) Donner le terme général de la suite  $(P_n)$ .
- 3) Le tournoi aura lieu le 1<sup>er</sup> Juin
  - a) le boxeur pourra-t-il atteindre son objectif.
  - b) Le boxeur pourra-t-il atteindre son objectif s'il suit un régime régulier qui lui permet de perdre 4kg par mois ?

13

Après avoir obtenue un diplôme d'entraîneur de hand Ball, Mongi débute sa carrière professionnelle comme directeur technique avec une équipe de la région. Deux contrats valables sur dix ans lui sont proposés.

Contrat A : Un salaire annuel de 20000 dinars pendant la première année avec une augmentation annuelle de 1000dinars

Contrat B : Un salaire annuel de 18000 dinars pendant la première année avec une augmentation annuelle de 10%.

Quel conseil donner à Mongi s'il compte rester plus de 5ans.

14

Une balle de tennis tombe d'une hauteur de 100 cm du sol. Elle rebondit plusieurs fois et perd de l'énergie à chaque rebond. La hauteur atteinte à chaque rebond est égale à 0.8 de la hauteur précédente.

On pose  $H_0 = 100$  et on désigne par  $H_n$  la hauteur du nième rebond.

- 1) Déterminer  $H_1, H_2$  et  $H_3$
- 2) Exprimer  $H_{n+1}$  en fonction de  $H_n$ .
- 3) On admet que la balle est immobile dès que la hauteur du rebond est inférieure à 1cm. En utilisant un tableur, déterminer le nombre de rebonds accomplis avant de s'immobiliser.

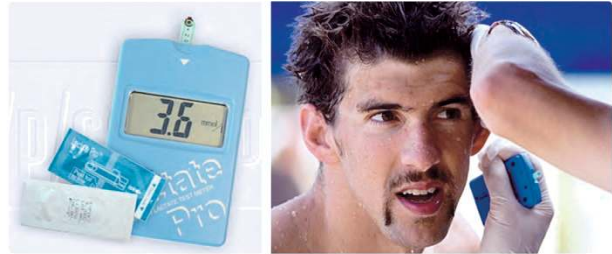


## MATHS & SPORT

Plusieurs situations du domaine des sports sont modélisées à l'aide des suites numériques.

Lors d'une épreuve sportive, les dépenses énergétiques sont en grande partie couvertes par le métabolisme anaérobie lactique, ce qui provoque une augmentation de la concentration sanguine de lactate.

L'étude de la concentration du lactate dans le sang du sportif en fonction du temps de l'épreuve, est un exemple de suite géométrique



Tous droits réservés au CNP

## Dénombrement



### Sommaire

- I. Cardinal d'un ensemble fini
- II. Principe multiplicatif
- III. Permutations
- IV. Arrangements
- V. Combinaisons



## Pour démarrer

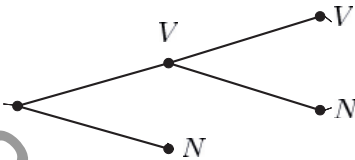
### Activité 1

Lors d'une épreuve de triple saut, le sauteur à trois essais.

Chaque essai peut être valide ou non.

On note par V un saut valide et par N un saut non valide.

Compléter l'arbre de choix et donner le nombre de possibilités de passer l'épreuve.



### Activité 2

Déterminer à l'aide d'un arbre de choix tous les nombres de deux chiffres distincts en utilisant les chiffres 1, 2 et 3.

### Activité 3

On donne les ensembles  $A = \{1, 3, 5\}$  et  $B = \{2, 4, 5\}$ .

Déterminer tous les couples  $(x, y)$  tel que  $x \in A$  et  $y \in B$

### Activité 4

On donne l'ensemble  $A = \{1, 2, 3, 4\}$ .

Compléter par  $\in$ ,  $\notin$ ,  $\subset$  ou  $\not\subset$  :

- $2 \dots A$ ,
- $\{2\} \dots A$ ,
- $\{1, 3\} \dots A$ ,
- $\{3, 4, 5\} \dots A$ .



# LE COURS

## I) Cardinal d'un ensemble fini

### Activité 1

Huit équipes se disputent la 1<sup>ère</sup> place d'un tournoi. Ces équipes sont réparties en deux groupes.

Deux équipes se qualifient de chaque groupe pour jouer les demi-finales, le match de classement et la finale.

Déterminer le nombre de match à jouer dans ce tournoi.

### Activité 2

On lance un dé cubique dont les faces sont numérotées de 1 à 6. On s'intéresse à la valeur inscrite sur la face supérieure du dé.

On désigne par A l'ensemble des issues pour lesquelles le numéro obtenu est pair et par B l'ensemble des issues pour lesquelles le numéro obtenu est divisible par 5.

Déterminer chacun des ensembles A et B.

Un ensemble est dit fini lorsqu'il a un nombre fini d'éléments.

On appelle cardinal d'un ensemble fini le nombre d'éléments de cet ensemble.

Si E a  $n$  éléments, on dit que son cardinal est  $n$  et on note  $\text{card } E = n$

Le cardinal de l'ensemble vide est 0.

### Activité 3



En volleyball, une équipe est déclarée gagnante lorsqu'elle remporte trois sets.

La Tunisie et l'Egypte sont finalistes au championnat d'Afrique de volleyball masculin.

A l'aide d'un arbre de choix, déterminer toutes les issues possibles de cette finale.

### Activité 4

Un centre de loisir propose pour ses adhérents deux activités sportives : le football et le tennis. 60 adhérents pratiquent le football, 45 adhérents pratiquent le tennis et 18 adhérents pratiquent à la fois le football et le tennis.

- 1) Déterminer le nombre d'adhérents qui pratiquent le football seulement.
- 2) Déterminer le nombre d'adhérents qui pratiquent le tennis seulement.
- 3) Déterminer le nombre d'adhérents qui pratiquent au moins un sport.

Soit  $E$  un ensemble fini et  $A$  une partie de  $E$ .

Le complémentaire de  $A$  dans  $E$  est l'ensemble noté  $\bar{A}$  dont les éléments appartiennent à  $E$  et n'appartiennent pas à  $A$ .

On a :  $A \cup \bar{A} = E$  et  $A \cap \bar{A} = \emptyset$



## Retenons :

Soit  $E$  un ensemble fini et  $A$  et  $B$  deux parties de  $E$ .

- $\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B) - \text{card}(A \cap B)$ .
- $\text{card}(\bar{A}) = \text{card}(E) - \text{card}(A)$

## Activité 5

Une équipe de football se compose de 20 joueurs dont 14 sont droitiers et 8 sont gauchers.

Déterminer :

- 1) le nombre de joueurs qui jouent avec les deux pieds.
- 2) Le nombre de joueurs gauchers seulement.
- 3) Le nombre de joueurs droitiers seulement.

## II) Principe multiplicatif

### Activité 1

- 1) Combien a-t-on de tenues différentes si on dispose de trois types de shorts et deux types de maillots ?
- 2) Combien a-t-on de tenues différentes si on dispose de trois types de shorts, deux types de maillots et trois types de chaussettes ?

### Principe multiplicatif

Dans une situation qui comporte  $p$  étapes donnant respectivement  $n_1, n_2, \dots, n_p$  possibilités, alors le nombre total de possibilités est  $n_1 \times n_2 \times \dots \times n_p$ .

### Activité 2

Un test d'aptitude physique consiste à passer à chaque joueur présélectionné en équipe nationale une série de quatre épreuves.

Sachant qu'un joueur peut réussir ou échouer dans chaque épreuve, justifier qu'il y a 16 résultats possibles pour chaque candidat.

### Activité 3

On lance deux dés, l'un est cubique dont les faces sont numérotées de 1 à 6 et l'autre est tétraédrique dont les quatre faces sont notées A, B, C, D.

Déterminer le nombre de tous les lancers possibles.

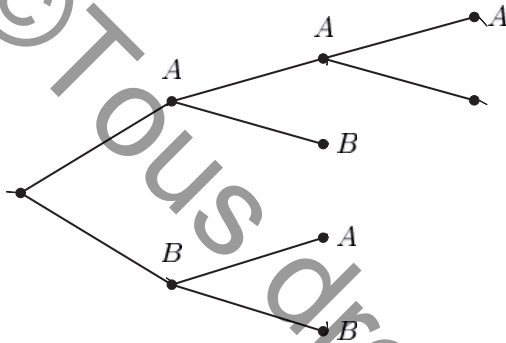




# LE COURS

## Activité 4

Alya et Bochra disputent un match de tennis en trois sets gagnants. Dans l'arbre de choix suivant, la lettre A indique que Alya remporte le set et la lettre B que Bochra l'emporte.



Soit  $E$  un ensemble non vide et fini.  
Soit un entier  $n \geq 2$ .  
Un  $n$ -uplet de  $E$  est une disposition ordonnée de la forme  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  de  $n$  éléments de  $E$ .

Le triplet (ou le 3-uplet)  $(A, A, A)$  désigne un résultat possible de ce match et il signifie que Alya a gagné les trois premiers sets.  
Donner quatre autres résultats possibles sous la forme de  $n$ -uplet.

## III) Permutations

### Activité 1

L'équipe jamaïcaine de relais de quatre fois cent mètres hommes, qui a battu le record du monde le 12 août 2012 aux jeux olympiques de Londres, est composée des « sprinters » Michael Fraer, Nesta Carter, Yohan Blake et Usain Bolt. De combien de manières les « sprinters » peuvent-ils se relayer ?



### Activité 2

- 1) De combien de manières peut-on placer huit coureurs sur une piste à huit couloirs ?
- 2) Sachant que le couloir n°4 est réservé pour le coureur qui a le meilleur temps, de combien de manières peut-on placer les autres coureurs ?

### Activité 3

Combien peut-on former de nombre de cinq chiffres tous distincts avec les chiffres impairs ?

### Définition

Soit  $E$  un ensemble non vide de  $n$  éléments.  
Une permutation de  $E$  est un  $n$ -uplet d'éléments distincts de  $E$ .



## Théorème

Le nombre de permutations d'un ensemble de  $n$  éléments est égal à  $n \times (n-1) \times \dots \times 2 \times 1$ .

## Activité 4

Soit l'ensemble  $A = \{1, 2, 3\}$ .

- 1) De combien de manières peut-on permuter les éléments de  $A$ ? Donner ces permutations.
- 2) Calculer  $5!$ ,  $6!$  et  $\frac{65!}{63!}$ .
- 3) Calculer  $\frac{15!}{13!}$ ,  $\frac{7!}{5!2!}$  et  $6! - 3!$ .
- 4) Simplifier  $\frac{(n+1)!}{n!}$  où  $n \in \mathbb{N}$  et  $\frac{(n+1)!}{(n-1)!}$  pour  $n \in \mathbb{N}^*$ .
- 5) Simplifier  $\frac{n!}{(n-3)!}$  pour  $n \geq 3$ .

## Notation

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , l'entier  $n \times (n-1) \times \dots \times 2 \times 1$  est noté  $n!$  et se lit  $n$  factorielle.  
Par convention  $0! = 1$ .

## Activité 5

De combien de manières peut-on disposer cinq personnes sur un banc ?

## Activité 6

Déterminer les anagrammes du mot SPORT.

L'anagramme d'un mot est toute permutation des lettres de ce mot ayant un sens ou non.

## IV) Arrangements

### Activité 1

Un sac contient cinq boules numérotées 1, 2, 3, 4 et 5. Une épreuve consiste à tirer successivement et sans remise trois boules du sac.

- 1) Donner deux exemples de tirages.
- 2) a) De combien de manières peut-on tirer la première boule ?  
b) La première boule étant tirée, de combien de manières peut-on tirer la deuxième boule ?  
c) Quel est le nombre de tirages possibles ?

## Définition

Soit  $E$  un ensemble non vide de  $n$  éléments et  $p$  un entier naturel tel que  $1 \leq p \leq n$ .

Un arrangement de  $p$  éléments de  $E$  est un  $p$ -uplet d'éléments distincts choisis parmi les  $n$  éléments de  $E$ .



## LE COURS

### Activité 2

Huit candidats ont été sélectionnés pour la finale d'une épreuve olympique de natation. A l'issue de l'épreuve, les trois premiers seront récompensés dans l'ordre par une médaille d'or, une médaille d'argent et une médaille de bronze. Combien y a-t-il de palmarès possibles ?



### Théorème

Soit  $E$  un ensemble de  $n$  éléments et  $p$  un entier tels que  $1 \leq p \leq n$ .

Le nombre d'arrangements de  $p$  éléments de  $E$  est l'entier  $A_n^p$  égal à :

$$n \times (n-1) \times \cdots \times (n-p+1)$$

### Activité 3

Montrer que pour tous entiers naturels  $n$  et  $p$  tels que  $1 \leq p \leq n$ , on a  $A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$

### Activité 4

Une urne contient quatre boules noires et cinq boules vertes. On tire successivement et sans remise trois boules de l'urne.

- 1) De combien de manières peut-on tirer les boules ?
- 2) Combien y a-t-il de tirages comprenant exactement deux boules noirs ?
- 3) Combien y a-t-il de tirages unicolores ?

### Activité 5

A la fin d'un match de qualification pour la finale de la coupe de Tunisie de football qui s'est soldé par un nul, l'entraîneur d'une équipe s'est chargé de choisir cinq joueurs pour tirer les penalties parmi les 11 joueurs du terrain.

- 1) Combien a-t-il de choix ?
- 2) Combien a-t-il de choix sachant que le 1<sup>er</sup> tireur est le capitaine de l'équipe et le dernier tireur est le gardien de but ?





## V) Combinaisons

### Activité 1

Un entraîneur de basket dispose de 6 joueurs pour former une équipe de 5 joueurs.

Combien d'équipe peut-il former sans tenir compte des postes des joueurs?

### Activité 2

On donne  $E = \{1, 2, 3\}$ .

Déterminer toutes les combinaisons de deux éléments de  $E$ .

### Activité 3

Soit  $E = \{1, 2, 3, 4\}$ .

- 1) a) Justifier que  $\{1, 2, 4\}$  est une combinaison de trois éléments de  $E$  ?  
b) Former tous les arrangements des éléments de  $\{1, 2, 4\}$ .
- 2) Montrer que le nombre de combinaisons de 3 éléments de  $E$  est égal à  $\frac{A_4^3}{3!}$ .

### Définition

Soit  $E$  un ensemble non vide de cardinal égal à  $n$  et  $p$  un entier naturel tel que  $p \leq n$ .

Une combinaison de  $p$  éléments de  $E$  est un sous ensemble de  $E$  de  $p$  éléments.

Soit  $E$  un ensemble non vide de cardinal égal à  $n$  et  $p$  un entier naturel tel que  $p \leq n$ .

On note par  $C_n^p$  ou  $\binom{n}{p}$  le nombre de combinaisons de  $p$  éléments de  $E$ .

### Théorème

Soit  $E$  un ensemble non vide de cardinal égal à  $n$  et  $p$  un entier naturel tel que  $p \leq n$ .

$$C_n^p = \binom{n}{p} = \frac{A_n^p}{p!}$$

### Activité 4

Montrer que pour tous entiers naturels  $n$  et  $p$  tels que  $0 \leq p \leq n$ , on a  $C_n^p = C_n^{n-p}$ .

Ce résultat est-il prévisible ?



## LE COURS

### Activité 5

Un sac contient six boules rouges et neuf boules noires. On tire simultanément quatre boules du sac.

- 1) Déterminer le nombre de tirages possibles.
- 2) Quel est le nombre de tirages unicolore?
- 3) Combien y a-t-il de tirages contenant une boule noire?
- 4) Combien y a-t-il de tirages contenant au moins une boule noire?

### Activité 6

Une équipe de football est composée de dix-sept joueurs, en dehors des gardiens de but.

- 1) Combien de formations rentrantes de dix joueurs peut-on constituer?
- 2) Dans cette équipe, il y a six défenseurs, six milieux de terrain et cinq attaquants. Combien peut-on constituer de formations rentrantes en adoptant la tactique 4-3-3 ?

### Activité 7

- 1) Dans un championnat de 14 équipes, combien y-a-t-il de matchs à jouer pendant toute la saison?
- 2) Dans un championnat il y-a 240 matchs à jouer pendant toute la saison. Déterminer le nombre d'équipes dans ce championnat.



# EXERCICES RÉVOLUS

## Enoncé 1

Sur le banc de remplaçants d'une équipe de football, on compte 7 joueurs dont un gardien de but, l'entraîneur et un médecin.

De combien de manières peut-on disposer :

- 1) ces neuf personnes?
- 2) ces neuf personnes de sorte que l'entraîneur et le médecin prennent place aux deux extrémités du banc ?
- 3) ces neuf personnes de sorte que l'entraîneur, le médecin et le gardien de but se côtoient ?



## Corrigé 1

- 1) Une disposition possible des 9 personnes est une permutation de l'ensemble des neuf personnes.
- 2) L'entraîneur et le médecin peuvent s'asseoir soit à l'extrémité gauche ou droite du banc.  
Il y a donc 2 choix. L'extrémité étant choisie, il y a 2 possibilités pour placer l'entraîneur et le médecin côte à côte. Pour les 7 remplaçants, il y a  $7!$  dispositions. D'après le principe multiplicatif, on a  $2 \times 2! \times 7! = 20\,160$  dispositions.
- 3) Il y a 7 configurations répondant à la consigne. Au sein de chaque configuration, il y a  $3!$  manières de permuter l'entraîneur, le médecin et le gardien de but et  $6!$  pour permuter les 6 remplaçants restant. Le nombre total de dispositions est donc  $7 \times 3! \times 6! = 3! \times 7!$ .

## Enoncé 2

- 1) Déterminer les anagrammes du mot :
  - a) TENNIS.
  - b) NATATION.
- 2) Déterminer les anagrammes du mot DENOMBREMENT.

## Corrigé 2

- 1) a) La lettre N du mot Tennis est compté doublement. Dans une première étape, on notera  $N_1$  l'une des deux N et  $N_2$  l'autre N. Dans ces conditions, une anagramme du mot «  $TEN_1N_2IS$  » est une permutation des 6 lettres de ce mot. Il y en a donc, a priori,  $6!$ . Mais si on « permute » les deux lettres N, on retombe sur le même mot. Autrement dit, au sein des  $6!$  anagrammes, sont comptées deux fois les mots où se permutent les deux lettres N.



## EXERCICES RÉSOLUS

Pour éviter de compter ces anagrammes deux fois, on doit diviser  $6!$  par le nombre de permutations possibles des deux lettres N, soit  $2! = 2$ .

Ainsi le nombre d'anagrammes du mot TENNIS est  $\frac{6!}{2!} = 360$ .

D'une autre manière on peut procéder par le choix de deux positions parmi 6 pour les lettres N.

Il y en a  $C_6^2$ . Donc le nombre d'anagrammes du mot TENNIS est

$$C_6^2 \times 4! = \frac{6!}{2!4!} \times 4! = \frac{6!}{2!} = 360.$$

b) Dans le mot NATATION, chacune des lettres N, A et T est double. Le nombre de ses anagrammes est  $\frac{8!}{2! \times 2! \times 2!} = 5040$ .

2) Dans le mot DENOMBREMENT, la lettre E est répétée 3 fois et chacune des lettres M, et N est répétée 2 fois.

Le nombre de ses anagrammes est  $\frac{12!}{3! \times 2! \times 2!} = 19958400$ .



## Principe multiplicatif

Dans une situation qui comporte  $p$  étapes donnant respectivement  $n_1, n_2, \dots, n_p$  possibilités, alors le nombre total de possibilités est  $n_1 \times n_2 \times \dots \times n_p$ .

## Permutation

Soit  $E$  un ensemble non vide et fini.

Une permutation de  $E$  est une disposition ordonnée de tous les éléments de  $E$ .

Le nombre de permutations d'un ensemble de  $n$  éléments est égal à  $n!$

## Arrangement

Soit  $E$  un ensemble non vide de cardinal égal à  $n$  et  $p$  un entier naturel tel que  $1 \leq p \leq n$ .

Un arrangement de  $p$  éléments de  $E$  est une disposition ordonnée de  $p$  éléments distincts choisis parmi les  $n$  éléments de  $E$ . Le nombre d'arrangements de  $p$  éléments d'un ensemble de  $n$  éléments est égal à

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!} \quad 1 \leq p \leq n$$

## Combinaison

Soit  $E$  un ensemble non vide de cardinal égal à  $n$  et  $p$  un entier naturel tel que  $p \leq n$ .

Une combinaison de  $p$  éléments de  $E$  est une disposition non ordonnée de  $p$  éléments distincts choisis parmi les  $n$  éléments de  $E$ .

Le nombre de combinaisons de  $p$  éléments de  $E$  est égal à

$$C_n^p = \binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

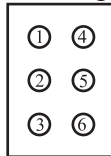


# MOBILISER SES COMPÉTENCES

## Situation 1

Les organisateurs des jeux paralympiques doivent mettre à la disposition des participants non-voyants des documents en Braille.

Au fait, dans l'alphabet Braille, chaque lettre ou signe est représenté par la mise en relief d'au moins un des six points de la grille suivante



Par exemple la lettre R est représentée par le caractère :



Combien de caractères Braille peut-on former?

### Stratégie de résolution

Distinguer les caractères Braille suivant le nombre de points mis en relief



## Situation 2

Une salle de classe comporte 15 tables à 2 places. Les élèves de la 3<sup>ème</sup> Sport 1 sont en nombre de 25 élèves.

On admet que chaque élève choisit sa place au hasard.

- 1) Donner un arrondi de l'écriture scientifique du nombre de manières d'occuper ces 30 places
- 2) A raison d'une minute par disposition, combien faudra-t-il de temps (arrondi à l'année) aux élèves pour tester toutes les dispositions ?



### Stratégie de résolution

Penser à ce que les élèves entrent dans la salle un par un.



## S'AUTO-ÉVALUER

### QCM

Pour chacune des questions suivantes, quatre réponses sont proposées parmi lesquelles une seule est correcte. Indiquer la lettre qui lui correspond.

		A	B	C	D
1	Le nombre de paires d'un ensemble de dix éléments est	$2!$	$C_{10}^2$	$A_{10}^2$	$10^2$
2	$\frac{13!}{5! \times 7!}$	$13 \times 12 \times 11 \times 10$	$13 \times 11 \times 10 \times 9$	$13 \times 11 \times 9 \times 8$	$13 \times 10 \times 9 \times 8$
3	$\frac{12!}{4! \times 8!}$	$\frac{3}{8}$	6	495	10080
4	On lance une pièce de monnaie 7 fois de suite. Le nombre de résultats possibles est :	7	$2 \times 7$	$2^7$	$7^2$

### Vrai-Faux

Indiquer si les propositions suivantes sont vraies ou fausses.

1. Dans une classe il y a 12 filles et 10 garçons. Le nombre de possibilités de désigner parmi eux une commission comprenant trois filles et deux garçons est exactement  $A_{12}^3 A_{10}^2$ .
2. Le nombre d'anagrammes du mot ESCRIME est  $7!$ .
3. Parmi 12 basketteurs présélectionnés, on peut former  $\binom{12}{5}$  équipes rentrantes.
4. Le code d'une carte magnétique est composé de 2 lettres distinctes et de 3 chiffres distincts deux à deux. Le nombre de tels codes est  $A_{26}^2 + A_{10}^3$ .



## EXERCICES D'ENTRAINEMENT

1

Simplifier puis calculer chacun des nombres suivants :

a)  $\frac{8!}{6!}$ ,    b)  $\frac{20!}{17!}$ ,    c)  $\frac{9!}{7! \times 4!}$ ,    d)  $\frac{1}{4!} - \frac{1}{5!}$

2

Ecrire le nombre  $3 \times 4 \times 5 \times \dots \times n$  en utilisant la notion de factoriel.

3

Résoudre dans  $\mathbb{N}$ ,  $C_n^2 = 15$

4

Soit un réel  $x$ .

- 1) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel non nul  $n$ , on a

$$(1+x)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n}$$

- 2) En déduire que le nombre de toutes les parties d'un ensemble de cardinal  $n$  est  $2^n$ .

5

Un tournoi sportif engage huit équipes. Chaque équipe doit rencontrer chacune des autres équipes une seule fois. Combien doit-on organiser de matchs ?

6

De combien de manières peut-on distribuer à onze joueurs, onze maillots numérotés de 1 à 11 ?

7

On a présélectionné 30 joueurs de basket-ball pour l'équipe nationale.

- 1) Combien peut-on former de formation nationale de 5 joueurs, chacun d'eux jouant à un poste précis ?
- 2) Combien peut-on former de formation nationale de 5 joueurs, en faisant abstraction à leurs postes de jeu ?

8

Avec les chiffres 1, 2, 3 et 4 combien peut-on écrire :

- 1) De nombre de trois chiffres distincts ?
- 2) De nombre de trois chiffres ?
- 3) De nombre de six chiffres ?

9

Une urne contient cinq boules rouges et sept boules noires. On tire simultanément quatre boules de l'urne.

- 1) Combien y-t-il de tirages possibles ?
- 2) Combien y-t-il de tirages contenant deux boules rouges et deux boules noires ?

- 3) Combien y-t-il de tirages contenant au moins une boule rouge ?
- 4) Combien y-t-il de tirages contenant des boules de même couleur ?

10

Une urne contient cinq boules rouges numérotées 1,1, 1,1 et 2et quatre boules noires numérotées 1, 1,2et2.

On tire simultanément quatre boules de l'urne.

- 1) Combien y a-t-il de tirages possibles?
- 2) Combien y a-t-il de tirages contenant deux boules rouges et deux boules noires?
- 3) Combien y a-t-il de tirages contenant deux boules portant le numéro 2?
- 4) Combien y a-t-il de tirages contenant des boules de même couleur et portant le même numéro?

11

Une urne contient cinq boules noires et six boules vertes. On tire successivement et sans remise trois boules de l'urne.

- 1) De combien de manières possibles peut-on tirer les boules ?
- 2) Déterminer le nombre de tirages comprenant exactement deux boules noires.
- 3) Déterminer le nombre de tirages comprenant au moins deux boules noires.
- 4) Déterminer le nombre de tirages comprenant des boules de même couleur.

12

On lance deux dés cubiques numérotés de 1 à 6 et on s'intéresse aux nombres inscrits sur la face supérieure de chacun des deux dés.

- 1) Dénombrer tous les résultats possibles.
- 2) Dénombrer tous les résultats possibles comportant une fois le nombre 1.
- 3) Dénombrer tous les résultats possibles dont la somme des nombres est égale à 6.

13

A la fin d'une étape du tour de Tunisie de cyclisme, neuf cyclistes ont été convoqués pour un contrôle antidopage. Deux médecins les reçoivent. Le premier reçoit cinq cyclistes et le second reçoit quatre.

- 1) De combien de manières différentes, les cyclistes peuvent-ils être répartis entre les deux médecins?



## EXERCICES D'ENTRAINEMENT

- 2) Parmi les cyclistes convoqués, il y a quatre étrangers. De combien de manières différentes peut-on répartir les neuf cyclistes sachant que chaque médecin doit consulter deux cyclistes étrangers?

14

L'entraîneur d'une équipe de natation disposant de cinq nageuses (deux cadettes et trois juniors) et cinq nageurs (un cadet et quatre juniors) doit choisir une équipe de cinq éléments pour participer à un tournoi international.

- 1) a) Combien d'équipes peut-t-il former ?  
b) Combien d'équipes comprenant exactement deux nageuses peut-t-il former ?
- 2) Combien d'équipes peut-t-il former, sachant que Abir et Mahmoud qui ont les meilleurs temps dans leurs spécialités respectives sont assurés de participer ?

15

L'entraîneur d'un club d'escrime dispose de quinze joueurs composés de la façon suivante :

	Homme	Femme
Fleuret	4	4
Epée	5	3

- 1) Combien d'équipes de huit joueurs peut-t-il former ?
- 2) Combien d'équipes de huit joueurs comprenant quatre hommes et quatre femmes peut-t-il former ?
- 3) Combien d'équipes de huit joueurs comprenant quatre joueurs pratiquant le fleuret et quatre joueurs pratiquant l'épée peut-t-il former ?



# Probabilités



### Sommaire

- I. Vocabulaire des probabilités
- II. De la fréquence à la probabilité
- III. Loi uniforme
- IV. Epreuves successives et événements indépendants
- V. Epreuves successives et événements dépendants



## Pour démarrer

### Activité 1



Les quatre athlètes Usain Bolt, Yohan Blake, Justin Gatlin et Tyson Gay sont considérés favoris pour être médaillés pour la finale du 100 mètres masculin. On appelle podium tout classement des trois premiers coureurs parmi ces quatre favoris.

Donner un exemple de podium possible de cette compétition. Dénombrer tous les podiums possibles.

### Activité 2

Le tableau suivant indique la répartition des élèves d'une classe de 3<sup>ème</sup> année sport suivant le sexe et le type de sport pratiqué en spécialité. Chaque élève n'exerce qu'un seul sport, collectif ou individuel.

	Sport individuel	Sport collectif
Filles	7	8
Garçons	10	7

1. Quelle est la proportion des garçons dans la classe ?
2. Quelle est la proportion des élèves qui pratiquent un sport collectif ?
3. Parmi les filles, quel est le pourcentage de celles qui pratiquent un sport individuel ?



## I) Vocabulaire probabiliste

### Activité 1

- 1) Peut-on prévoir le résultat de la finale de la coupe de Tunisie de football ?
- 2) La durée d'un match de Tennis est-il prévisible ?
- 3) Le lancer d'une pièce de monnaie bien équilibrée est-il soumis au hasard ?
- 4) Donner des exemples de phénomènes dont le résultat est lié au hasard.

Une *expérience aléatoire* est une expérience dont le résultat est lié au hasard. Chaque résultat possible est appelé une *issue* ou une *éventualité*.

L'ensemble de toutes les issues est appelé *Univers*

### Activité 2

Dans une classe de 10 filles et de 15 garçons, on veut élire d'abord un délégué puis un délégué adjoint.

Soit  $F = \{f_1, f_2, \dots, f_{10}\}$  la partie de cette classe constituée des dix filles et  $G = \{g_1, g_2, \dots, g_{15}\}$  celle constituée des quinze garçons.

- 1) a) Peut-on prévoir le résultat de l'élection des deux élèves?  
b) Comment peut-on représenter un résultat possible de l'élection d'un délégué et un délégué adjoint ?
- 2) Combien y a-t-il d'issues possibles pour cette élection ?
- 3) Combien d'issues donnant pour élus:
  - a) deux filles ?
  - b) deux garçons ?
  - c) une fille comme déléguée et un garçon comme délégué adjoint ?

### Activité 3



- 1) Quelles sont les différentes issues d'un match
  - a) de football ?
  - b) de basket-ball ?
- 2) En basket-ball, quelles sont les différentes éventualités d'un lancer franc ?



## LE COURS

### Activité 4



Un joueur tire à l'arc vers une cible circulaire de 5 régions : Blanche, Noire, Bleue, Rouge et Jaune numérotées respectivement 0 ; 1 ; 2 ; 5 et 10 points comme l'indique la figure ci-contre.

- 1) Quels sont les totaux possibles de points marqués par le joueur en tirant deux fois de suite ?
- 2) Quelle est l'ensemble des issues donnant un total égal à :
  - a) 10 points.
  - b) 4 points ?

Un **événement** est un sous-ensemble de l'univers.

Un **événement élémentaire** est un événement réduit à un seul élément.

### Activité 5

On lance deux dés cubiques, de couleurs différentes, dont les faces sont numérotées de 1 à 6 et on s'intéresse aux numéros inscrits sur les faces supérieures des deux dés.

- 1) Déterminer chacun des événements suivants :
  - $A$  : « Les numéros obtenus sont divisibles par 5 ».
  - $B$  : « Les numéros obtenus sont pairs ».
  - $C$  : « La somme des numéros obtenus est inférieure ou égale à 12 ».
  - $D$  : « Le produit des deux numéros obtenus est divisible par 7 ».
- 2) a) Déterminer l'événement  $A \cap B$  .  
b) Déterminer l'événement  $\bar{B}$  .

Soit  $\Omega$  l'univers associé à une expérience aléatoire.

L'univers  $\Omega$  s'appelle aussi **événement certain**.

L'ensemble vide  $\emptyset$  s'appelle **événement impossible**.

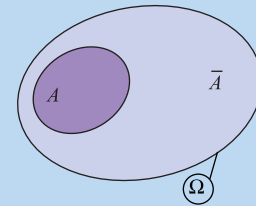
Soit  $A$  et  $B$  deux événements d'un même univers  $\Omega$ .

L'**événement A et B**, noté  $A \cap B$  est réalisé lorsque les deux événements sont réalisés.

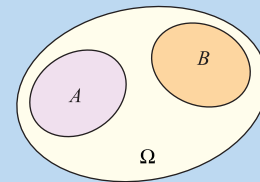
L'**événement A ou B**, noté  $A \cup B$  lorsque l'un au moins des deux événements est réalisé.



Le complémentaire d'un événement  $A$  dans l'univers  $\Omega$  est l'événement noté  $\bar{A}$  et dit *événement contraire* de  $A$ .



Deux événements  $A$  et  $B$  d'un même univers  $\Omega$  sont dits **incompatibles** lorsque  $A \cap B = \emptyset$ .



## II) De la fréquence à la probabilité



### Activité 1

On demande à chaque élève de la classe de lancer dix fois de suite une pièce de monnaie et de noter le nombre de fois où la face « Pile » est apparue.

- 1) On rassemble les résultats de tous les élèves dans ce tableau que l'on complètera.



Nombre de lancers	10	50	100	150	.....	.....
Nombre des faces « Pile » obtenues						
Fréquence d'apparition de la face « Pile »						

- 2) Que peut-on conjecturer quant à la fréquence d'apparition de la face « Pile » pour un grand nombre de lancers ?



### Activité 2

Le fichier « **simulationDé.exl** » donne les simulations du lancer d'un dé cubique dont les faces sont numérotées de 1 à 6. Les résultats obtenus sont donnés dans le tableau suivant :

		Simulation du lancer d'un dé cubique		
	Face	Effectif	fréquence	
1	2	16	0,16	
2	3	14	0,14	
3	2	21	0,21	
4	1	16	0,16	
5	3	20	0,2	
6	5	13	0,13	
7	4			
8	4			
9	4			
10	2			



## LE COURS

Face apparente	1	2	3	4	5	6
Simulation de 100 lancers	20	22	14	21	16	7
Simulation de 1000 lancers	174	172	163	166	168	157
Simulation de 10 000 lancers	1653	1693	1695	1660	1622	1677

- 1) Déterminer pour chacune de ces trois simulations, les fréquences d'apparition de chacune des 6 faces.
- 2) Autour de quelle valeur la fréquence d'apparition d'une face quelconque va-t-elle se stabiliser ?

L'expérience aléatoire décrite ci-dessus, montre que plus le nombre de lancers du dé est grand, plus la fréquence d'apparition du numéro d'une face quelconque est proche du nombre  $\frac{1}{6}$ .

On dira que  $\frac{1}{6}$  est la probabilité d'obtenir le numéro de cette face.

On note pour tout  $a \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ,  $P(\{a\}) = \frac{1}{6}$ .

### Définition :

Soit un univers fini  $\Omega$  lié à une expérience aléatoire.

Une probabilité  $P$  sur  $\Omega$  est une application qui à tout événement  $A$  associe un nombre  $P(A)$  de l'intervalle  $[0, 1]$  tel que :

- $P(\Omega) = 1$
- Si  $A$  et  $B$  sont deux événements incompatibles,  $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ .

### Activité 3

On considère un dé cubique truqué de sorte que la probabilité d'obtenir une face soit proportionnelle au nombre de cette face.

- 1) Montrer que pour tout  $n \in \{1, 2, \dots, 6\}$ ,  $P(\{n\}) = n \times P(\{1\})$ .
- 2) a) Vérifier que  $P(\{1\}) + P(\{2\}) + \dots + P(\{6\}) = 1$ .  
b) En déduire la valeur de  $P(\{1\})$ .  
c) Donner alors les probabilités d'apparition de chacune des faces du dé.



## LE COURS

### Retenons :

Soit un univers fini  $\Omega$  lié à une expérience aléatoire et  $P$  une probabilité sur  $\Omega$ .

Soit l'événement  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ .

Alors  $P(A) = P(\{a_1\}) + P(\{a_2\}) + \dots + P(\{a_k\})$

### Activité 4

Une urne contient des boules rouges, bleues et vertes. On tire au hasard une boule de l'urne et on note sa couleur. Soit les événements :

$R$  : « la boule tirée est rouge » ;

$B$  : « la boule tirée est bleu » ;

$V$  : « la boule tirée est verte ».

Chayma a réussi à déterminer  $P(R) = \frac{1}{3}$  et  $P(V) = \frac{1}{4}$ .

Comment peut-elle trouver alors  $P(B)$  ?

### Activité 5

Une association organise pendant l'été un camp de vacances pour 150 lycéens qui peuvent pratiquer la planche à voile ou le kayak pour activités sportives.

Le tiers des lycéens participant à ce camp ont

choisi la planche à voile, les  $\frac{2}{5}$  ont choisi le

kayac. On compte 15 élèves pratiquant les deux sports à la fois.

On choisit un élève au hasard.

On considère les événements suivants :

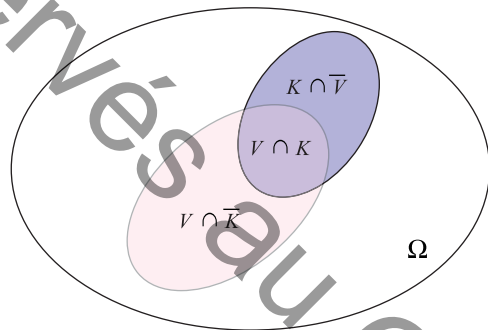
$V$  : « l'élève pratique la planche à voile »,

$K$  : « l'élève pratique le Kayac ».

1) a) Exprimer par une phrase chacun des événements  $V \cap \bar{K}$  et  $K \cap \bar{V}$ .

b) Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :

$V$ ,  $K$ ,  $V \cap K$ ,  $V \cap \bar{K}$  et  $K \cap \bar{V}$





## LE COURS

- 2) a) Justifier que  $V \cup K = (V \cap \bar{K}) \cup (V \cap K) \cup (K \cap \bar{V})$ .
- b) Calculer alors  $P(V \cup K)$ .
- c) En déduire la relation  $P(V \cup K) = P(V) + P(K) - P(V \cap K)$ .

### Théorème :

Soit  $A$  et  $B$  deux événements d'un univers fini  $\Omega$ .

Si  $P$  est une probabilité sur  $\Omega$ , alors :

- $P(\emptyset) = 0$ .
- $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$ .
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ .

### Activité 6

Un industriel dans le domaine aéronautique, fabrique des avions bimoteurs.

On considère les événements suivants :

$M_1$  : « le premier moteur tombe en panne »

$M_2$  : « le seconde moteur tombe en panne »

Le constructeur assure que  $P(M_1) = \frac{1}{200}$ ,  $P(M_2) = \frac{1}{300}$  et  $P(M_1 \cap M_2) = \frac{1}{1000}$ .

- 1) Les événements  $M_1$  et  $M_2$  sont-ils incompatibles ?
- 2) Exprimer chacun des événements suivants en fonction de  $M_1$  et  $M_2$ .
  - a) « l'un des deux moteurs tombe en panne »
  - b) « les deux moteurs ne tombent pas en panne ».
  - c) « l'un au moins des deux moteurs fonctionne ».
- 3) Quelle est la probabilité que le premier moteur ne tombe pas panne ?

## III) loi uniforme

### Activité 1

On lance un dé cubique équilibré et on s'intéresse au numéro qui apparait sur la face supérieure.

On sait que la probabilité d'apparition d'un numéro

est égale à  $\frac{1}{6}$ .

Lorsque dans une expérience aléatoire toutes les issues ont la même probabilité d'apparaître, on dit qu'il y a équiprobabilité de tous les événements élémentaires.



## LE COURS

On désigne par  $\Omega$  l'univers de toutes les issues, par  $A$  l'ensemble des issues ayant un numéro pair et par  $B$  l'ensemble des issues ayant un numéro divisible par 3.

1) Calculer  $P(A)$  et  $P(B)$ .

2) Comparer  $\frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)}$  et  $P(A)$ .

3) Comparer  $\frac{\text{card}(B)}{\text{card}(\Omega)}$  et  $P(B)$ .

### **Théorème :**

Soit un univers fini  $\Omega$  lié à une expérience aléatoire dans une situation d'équiprobabilité.

Si  $P$  est la probabilité sur  $\Omega$ , alors pour tout événement  $A$  de  $\Omega$ ,  $P(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)}$

### **Activité 2**

Une urne contient cinq boules rouges et quatre boules vertes indiscernables.

On tire au hasard et simultanément deux boules de l'urne.

- 1) Calculer la probabilité de tirer deux boules rouges.
- 2) Calculer la probabilité de tirer deux boules de même couleur..
- 3) Calculer la probabilité de tirer une boule rouge et une boule verte.

### **Activité 3**

Une urne contient cinq jetons verts numérotés 1, 1, 1,2 et 2 et trois jetons noirs numérotés 1,2 et 2.

On tire simultanément deux jetons de l'urne. Quelle est la probabilité de chacun des événements suivants :

A « Les jetons tirés sont verts ».

B « Les jetons tirés portent le même numéro ».

C « Les jetons tirés sont de même couleur et portent le même numéro ».

D « Les jetons tirés sont de même couleur ou portent le même numéro ».



## Activité 4

Dans un jeu de 32 cartes, on appelle main tout ensemble de huit cartes.

- 1) Quelle est la probabilité pour qu'une main contienne exactement un seul as?
- 2) Quelle est la probabilité pour qu'une main contienne exactement deux as?
- 3) Quelle est la probabilité pour qu'une main contienne au moins un as?
- 4) Quelle est la probabilité pour qu'une main contienne exactement un as et un roi?



## Activité 5

Deux frères jouent dans une équipe de basketball composée de onze joueurs.

- 1) Quelle est la probabilité pour que les deux frères soient dans l'équipe rentrante?
- 2) Quelle est la probabilité pour qu'aucun des deux frères ne soit dans l'équipe rentrante?
- 3) Quelle est la probabilité pour qu'un seul des deux frères soit dans l'équipe rentrante?
- 4) En déduire la probabilité pour qu'au moins un des deux frères soit dans l'équipe rentrante?

## Activité 6

Dans un lycée sportif il y a autant de filles que de garçons. Une enquête a montré que 70% des filles pratiquent un sport individuel et 60% des garçons pratiquent un sport collectif.

On choisit un élève au hasard. Quelle est la probabilité de chacun des événements suivants :

- A «L'élève choisi est une fille qui pratique un sport individuel ».
- B «L'élève choisi est une fille qui pratiquent un sport collectif ».
- C «L'élève choisi est un garçon qui pratique un sport individuel ».
- D «L'élève choisi est un garçon qui pratique un sport collectif ».

## Activité 7

Dans un meeting international d'athlétisme, huit "sprinter " dont deux africains sont au départ du 100 mètres.

- 1) Quelle est la probabilité pour que les deux africains courent dans les couloirs n° 4 et n°5?
- 2) Quelle est la probabilité pour que les deux africains arrivent 1<sup>er</sup> et 2<sup>ème</sup> ?
- 3) Quelle est la probabilité pour que les deux africains arrivent parmi les trois premiers ?



## IV) Epreuves successives et événements indépendants

### Activité 1

Lors de la première phase d'un tournoi international de volley-ball, l'équipe tunisienne doit affronter successivement trois équipes.

- 1) A l'aide d'un arbre de choix, déterminer et dénombrer toutes les issues possibles.
- 2) On admet que l'équipe tunisienne gagne un match avec une probabilité égale à 0,5.
  - a) Quelle est la probabilité que l'équipe tunisienne perde un match?
  - b) Calculer la probabilité des issues
    - Gagner les trois matchs.
    - Perdre le dernier match.
    - Gagner deux matchs.

Deux événements sont indépendants si la réalisation de l'un n'influe pas sur la réalisation de l'autre

### Retenons :

On considère une expérience constituée de  $n$  épreuves successives.

Soit  $A_1, A_2, \dots, A_n$  des événements indépendants réalisés respectivement avec les probabilités  $p_1, p_2, \dots, p_n$ .

La probabilité pour que les événements  $A_1, A_2, \dots, A_n$  soient successivement réalisés est égale à  $p_1 \times p_2 \times \dots \times p_n$ .

### Activité 2

Une urne contient cinq boules rouges et trois boules vertes indiscernables.

On tire au hasard et simultanément deux boules de l'urne.

- 1) Calculer la probabilité de tirer deux boules rouges.
- 2) On répète l'expérience deux fois en remettant après chaque tirage les boules dans l'urne. Déterminer la probabilité de chacun des événements suivants:
  - A: «obtenir deux boules vertes au premier tirage et deux boules rouges au deuxième tirage».
  - B: «obtenir deux boules vertes au premier tirage et deux boules vertes au deuxième tirage».
  - C: «obtenir deux boules vertes au premier tirage et deux boules de couleurs différentes au deuxième tirage».



## LE COURS

### Activité 3

Au saut à la perche, la probabilité pour qu'un sauteur réussisse un saut de 5,20 mètres est égale à 0,7.

Sachant qu'un sauteur a trois essais, déterminer la probabilité des événements suivants:

- A : «Le sauteur réussit son saut au premier essai » .
- B : «Le sauteur réussit son saut au deuxième essai » .
- C : « Le sauteur réussit son saut au troisième essai » .
- D : «Le sauteur est éliminé » .



### Activité 4

Un coureur spécialiste en 1000 mètres et 5000 mètres participe à un meeting international d'athlétisme. La probabilité pour qu'il gagne la course des 1000 mètres est égale à 0,7 et la probabilité pour qu'il gagne la course des 5000 mètres est égale à 0,4.

Le coureur participe aux deux courses.

1. Quelle est la probabilité pour qu'il gagne les deux courses ?
2. Quelle est la probabilité pour qu'il gagne au moins une course ?
3. Quelle est la probabilité pour qu'il ne gagne aucune des deux courses ?

### Activité 5

Dans le tir à l'arc, la probabilité pour qu'un tireur atteigne une cible est égale à  $\frac{1}{3}$ .

- 1) On tire cinq fois de suite.
  - a) Quelle est la probabilité pour que le tireur n'atteigne pas la cible ?
  - b) Quelle est la probabilité que le tireur atteigne la cible deux fois exactement ?
- 2) Combien de fois doit-il tirer pour que la probabilité d'atteindre au moins une fois la cible soit supérieure à 0,99 ?

## V) Epreuves successives et événements dépendants

### Activité 1

Sur le banc des remplaçants d'une équipe de rugby il y a sept joueurs, trois arrières et quatre avants.

- 1) L'entraîneur remplace un joueur.

Quelle est la probabilité qu'il soit remplacé par un avant?
- 2) On suppose que l'entraîneur a remplacé un joueur par un avant. Quelle est la probabilité pour qu'au second changement, il remplace un autre joueur par un arrière?

Deux événements sont dépendants si la réalisation de l'un influence sur la réalisation de l'autre



## LE COURS

- 3) Quelle est la probabilité pour que l'entraîneur remplace successivement deux joueurs par un avant et un arrière?

### Retenons :

On considère une expérience aléatoire constituée de  $n$  épreuves successives et dépendantes.

Soit  $A_1$  un événement réalisé lors de la première épreuve,  $A_2$  un événement réalisé lors de la deuxième épreuve, ...  $A_n$  un événement réalisé lors de la  $n^{\text{ième}}$  épreuve.

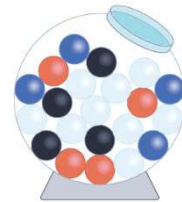
On note  $p_1$  la probabilité de  $A_1$ ,  $p_2$  la probabilité de  $A_2$  si  $A_1$  est réalisé, ...  $p_n$  la probabilité de  $A_n$  si les événements  $A_1, A_2, \dots, A_{n-1}$  sont réalisés.

La probabilité que les événements  $A_1, A_2, \dots, A_n$  soient successivement réalisés est égale à  $p_1 \times p_2 \times \dots \times p_n$ .

### Activité 2

Une urne contient cinq boules rouges et trois boules vertes indiscernables au toucher. On tire au hasard une boule de l'urne puis on la remet dans l'urne avec une autre boule de même couleur et on tire une autre boule. Calculer la probabilité des événements suivants:

- A : «obtenir une boule verte au premier tirage et une boule rouge au deuxième tirage » .
- B : «obtenir deux boules vertes » .
- C : «obtenir deux boules rouges » .



### Activité 3

Un joueur de basketball est chargé de tirer deux lancers francs. On admet que la probabilité de réussir le premier lancer est égale à 0,8 et que s'il réussit le premier lancer, la probabilité de réussir le second est égale à 0,9 et que s'il échoue au premier lancer, la probabilité de réussir le second est égale à 0,4

- 1) Quelle est la probabilité pour que le joueur réussisse les deux lancers?
- 2) Quelle est la probabilité pour que le joueur réussisse le premier lancer et échoue au deuxième?
- 3) Quelle est la probabilité pour que le joueur échoue aux deux lancers?



## LE COURS

### Activité 4

Un sac qui contient quatre balles de tennis vertes et cinq balles de tennis jaunes. Un tennisman tire deux balles du sac.

- 1) Quelle est la probabilité pour que les balles soient jaunes?
- 2) Sans remettre les balles dans le sac, le tennisman tire deux autres balles.
  - a. Quelle est la probabilité d'obtenir successivement deux balles jaunes au premier tirage et deux balles de couleurs différentes au deuxième tirage?
  - b. Quelle est la probabilité d'obtenir successivement deux balles de couleurs différentes au premier tirage et deux balles jaunes au deuxième tirage?





## EXERCICES RÉVOLUS

### Enoncé 1

Dans un lycée, 150 élèves font partie de l'association sportive. 80 élèves font partie de la section athlétisme, 60 font partie de la section gymnastique et 30 élèves font partie des deux sections.

On désigne au hasard l'un des élèves de l'association. On considère les événements suivants :

$A$  : « L'élève fait partie de la section athlétisme »

$G$  : « L'élève fait partie de la section gymnastique »

- 1) Déterminer le nombre d'élèves qui :
  - a) font partie uniquement de la section athlétisme
  - b) font partie uniquement de la section gymnastique
  - c) ne font partie ni de la section athlétisme ni de celle de la gymnastique.
- 2) Définir par une phrase l'événement  $A \cap G$  puis calculer  $P(A \cap G)$ .
- 3) Définir par une phrase l'événement  $A \cup G$  puis calculer  $P(A \cup G)$ .

### Corrigé 1

- 1) a) Le nombre  $N_A$  d'élèves faisant partie uniquement de la section athlétisme est :  
 $N_A = 80 - 30 = 50$ .
- b) Le nombre  $N_G$  d'élèves faisant partie uniquement de la section gymnastique est :  
 $N_G = 60 - 30 = 30$ .
- c) Le nombre d'élèves ne faisant partie ni de la section athlétisme ni de celle de la gymnastique est :  $N = 150 - (30 + 50 + 30) = 40$ .

- 2)  $A \cap G$  est l'événement « Faire partie à la fois de la section athlétisme et gymnastique ».

$$P(A \cap G) = \frac{30}{150} = \frac{1}{5}.$$

- 3)  $A \cup G$  est l'événement « Faire partie de la section athlétisme ou de celle de la gymnastique ».

$$P(A \cup G) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{80}{150} + \frac{60}{150} - \frac{1}{5} = \frac{11}{15}.$$

### Enoncé 2

Une urne contient trois boules blanches et cinq boules noires.

- 1) On tire au hasard, successivement et sans remise deux boules de l'urne. Calculer la probabilité de chacun des événements suivants: (les résultats seront arrondis au centième).



## EXERCICES RÉVOLUS

A : « Tirer une boule blanche puis une boule noire ».

B : « Tirer deux boules de couleurs différentes ».

C : « Tirer deux boules de même couleur ».

2) L'épreuve consiste maintenant à tirer successivement et au hasard deux boules de l'urne de la manière suivante :

Si la boule tirée est blanche, on la remet dans l'urne, puis on tire une seconde boule

Si la boule tirée est noire, on la garde, puis on tire une seconde boule de l'urne.

Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :

E : « Tirer une boule blanche puis une boule noire ».

F : « Tirer une boule noire puis une boule blanche ».

G : « Tirer deux boules de couleurs différentes ».

### Corrigé 2

1) Un tirage successif et sans remise de deux boules de l'urne est un arrangement de deux éléments parmi huit. Le nombre total de tirages est donc  $A_8^2 = 56$ . D'où :

$$p(A) = \frac{A_3^1 A_5^1}{56} = \frac{15}{56} = 0,27.$$

$$p(B) = 2 \times \frac{A_3^1 A_5^1}{56} = \frac{15}{28} = 0,54.$$

$$p(C) = 1 - P(B) = \frac{13}{28} = 0,46.$$

2) Pour l'évènement E, le tirage de la première boule n'influe pas sur le tirage de la deuxième boule. Donc  $p(E) = \frac{3}{8} \times \frac{5}{8} = 0,23$ .

Pour l'évènement F, le tirage de la première boule influe sur le tirage de la deuxième boule. Donc  $p(F) = \frac{5}{8} \times \frac{3}{7} = 0,27$ .

$$p(G) = p(E) + p(F) = 0,5.$$

**Définition :**

Soit un univers fini  $\Omega$  lié à une expérience aléatoire.

Une probabilité  $P$  sur  $\Omega$  est une application qui à tout événement  $A$  associe un nombre  $P(A)$  de l'intervalle  $[0,1]$  tel que :

- $P(\Omega) = 1$
- Si  $A$  et  $B$  sont deux événements incompatibles,  
 $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ .

**Théorème :**

Si  $P$  est une probabilité sur un univers  $\Omega$ , alors :

- $P(\emptyset) = 0$ .
- Soit  $A$  un événement de  $\Omega$ ,
  - Si  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$  alors  $P(A) = P(\{a_1\}) + P(\{a_2\}) + \dots + P(\{a_k\})$ .
  - $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$
- Pour tous événements  $A$  et  $B$  de  $\Omega$ ,  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

**Théorème :**

Soit un univers fini  $\Omega$  lié à une expérience aléatoire dans une situation d'équiprobabilité.

Si  $P$  est la probabilité sur  $\Omega$ , alors pour tout événement  $A$  de  $\Omega$ ,  $P(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)}$



### Définitions :

Deux événements sont indépendants si la réalisation de l'un n'influe pas sur la réalisation de l'autre. Sinon, les deux événements sont dits dépendants.

### Retenons

On considère une expérience constituée de  $n$  épreuves successives.

- Soit  $A_1, A_2, \dots, A_n$  des événements indépendants réalisés respectivement avec les probabilités  $p_1, p_2, \dots, p_n$ . La probabilité pour que les événements  $A_1, A_2, \dots, A_n$  soient successivement réalisés est égale à  $p_1 \times p_2 \times \dots \times p_n$
- Soit  $A_1, A_2, \dots, A_n$   $n$  événements dépendants vérifiant  $A_1$  un événement réalisé lors de la première épreuve,  $A_2$  un événement réalisé lors de la deuxième épreuve, ...  $A_n$  un événement réalisé lors de la  $n^{\text{ième}}$  épreuve. On note  $p_1$  la probabilité de  $A_1$ ,  $p_2$  la probabilité de  $A_2$  si  $A_1$  est réalisé, ...  $p_n$  la probabilité de  $A_n$  si les événements  $A_1, A_2, \dots, A_{n-1}$  sont réalisés. La probabilité que les événements  $A_1, A_2, \dots, A_n$  soient successivement réalisés est égale à  $p_1 \times p_2 \times \dots \times p_n$ .



## MOBILISER SES COMPÉTENCES

### Situation 1

Une équipe tunisienne de football participe avec trois autres à un tournoi international. La probabilité qu'elle gagne un match est égale à 0,6 et la probabilité qu'elle le perde est égale à 0,2.

Sachant que si une équipe gagne un match, elle obtient trois points, si elle fait match nul, elle obtient un point et si elle perd un match, elle obtient zéro point.

Quelle est la probabilité que l'équipe tunisienne récolte trois points au bout de trois matchs ?

### Situation 2

On lance un dé cubique dont les faces sont numérotées de 1 à 6. Si le numéro obtenu est pair, le jeu s'arrête et on note  $R$  le résultat obtenu, sinon, on lance le dé 2 fois de suite et on note  $R$  la somme des deux numéros obtenus.

Déterminer la probabilité pour que  $R$  soit égale à 4.

Déterminer la probabilité pour que  $R$  soit un nombre pair.



# S'AUTO-ÉVALUER

## QCM

Pour chacune des questions suivantes, trois réponses sont proposées parmi lesquelles une seule est correcte. Indiquer la lettre qui lui correspond

		A	B	C
1	Une urne contient 2 boules vertes, 2 rouges et une blanche. On tire au hasard et successivement 2 boules de l'urne. Soit $A$ : « Obtenir au moins une boule rouge » L'événement contraire $\bar{A}$ est:	Obtenir au plus une boule rouge	Ne pas obtenir de boule rouge	Obtenir deux boules vertes
2	Une urne contient deux boules vertes et deux boules rouges. On tire au hasard et simultanément deux boules de l'urne. La probabilité de l'événement $A$ : « Obtenir au moins une boule rouge » est	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{5}{6}$
3	Soit $A$ un événement tel que $p(A) = 0,15$ alors	$P(\bar{A}) = 0,85$	$P(\bar{A}) = 0,15$	$P(\bar{A}) = \frac{1}{0,15}$
4	Soient $A$ et $B$ deux événements tels que $p(A) = 0,2$ et $p(A \cup B) = 0,7$ alors	$p(B) = 0,3$	$p(B) \geq 0,5$	$p(B) \leq 0,5$

## Vrai-Faux

Indiquer si les propositions suivantes sont vraies ou fausses.

- On considère deux événements  $A$  et  $B$  d'un même univers  $\Omega$ .
  - Si  $P(A) = P(B)$  alors  $A = B$ .
  - Si  $P(A) + P(B) = 1$  alors  $P(A \cup B) = 1$ .
- Soit  $A$  et  $B$  deux événements d'un même univers  $\Omega$  tels que  $P(A) = 0,3$  et  $P(B) = 0,2$ . Alors  $P(A \cap B) = 0,6$ .
- Lorsqu'on lance un dé cubique 6 fois de suite, l'événement « obtenir un 6 » est certain.



## EXERCICES D'ENTRAÎNEMENT

1

Soit  $A$  et  $B$  deux événements d'un univers  $\Omega$  tels que

$$P(A) = 0,4, \quad P(B) = 0,65 \text{ et } P(A \cup B) = 0,75.$$

Calculer  $P(A \cap B)$ .

2

Soit  $A$  et  $B$  deux événements incompatibles d'un univers  $\Omega$  tels que  $P(A) = 0,27$  et  $P(B) = 0,72$ .

Calculer  $P(A \cup B)$ .

3

Soit  $A$  et  $B$  deux événements d'un univers  $\Omega$  tels que

$$P(A) = 0,6 \text{ et } P(B) = 0,8.$$

$A$  et  $B$  sont-ils des événements incompatibles ?

4

Un sac contient 5 jetons indiscernables au toucher numérotés 1, 2, 3, 4 et 5. On prélève au hasard, successivement et avec remise 2 jetons.

Calculer la probabilité de l'événement

$A$  : " la somme des numéros obtenus sur les jetons est 5 ".

5

Un élève d'un lycée sportif se présente à un examen en tirant au hasard une question dans une urne contenant 2 questions sur le foot, 3 questions sur l'athlétisme et 5 questions sur les arts martiaux.

Quelle est la probabilité qu'il tire une question portant sur :

- Le foot.
- l'athlétisme.
- les arts martiaux.

6

Une urne contient trois boules rouges et cinq boules blanches. On tire au hasard et simultanément trois boules de l'urne.

- Quelle est la probabilité de tirer exactement deux boules rouges ?
- Quelle est la probabilité de tirer au moins deux boules rouges ?
- Quelle est la probabilité de tirer des boules de même couleur ?

7

Un sac contient cinq jetons verts numérotés 1, 2, 2, 3 et 3 et trois jetons blancs numérotés 1, 1 et 2

On tire au hasard et simultanément deux jetons du sac.

- Quelle est la probabilité de tirer des jetons de couleurs différentes ?
- Quelle est la probabilité de tirer des jetons de numéros différents ?
- Quelle est la probabilité de tirer des jetons de même numéro et de même couleur ?
- Quelle est la probabilité de tirer des jetons de même numéro ou de même couleur ?

8

On lance trois fois de suite une pièce de monnaie parfaitement équilibrée. Si on obtient pile, on gagne 2 points, sinon on perd un point.

Quelle est la probabilité :

- de gagner 3 points ?
- de gagner 6 points ?
- de perdre 3 points ?
- de terminer à 0 point ?

9

La probabilité que Borhane marque un panier est égale à 0,6 indépendamment s'il a marqué ou non lors des lancers précédents.

Borhane lance le ballon quatre fois de suite.

- Quelle est la probabilité qu'il marque trois paniers ?
- Montrer que la probabilité que Borhane rate les quatre lancers est égale à 0,0256
- Quelle est la probabilité que Borhane marque au moins un panier ?

10

Dans un club sportif, quinze garçons, dont Mehdi, Faouzi et Mounir, jouent au football.

L'entraînement est fait de telle sorte que chaque garçon est capable d'occuper n'importe quel poste. Pour former une équipe, on tire au sort onze joueurs parmi les quinze joueurs du club et on leur attribue au hasard un numéro de 1 à 11, chaque numéro correspondant à un poste.

Quelle est la probabilité de chacun des événements suivants :

- Mehdi occupe le poste de gardien de but ?
- Faouzi est dans l'équipe entrante ?
- On sélectionne Faouzi et Mounir ?



## EXERCICES D'ENTRAINEMENT

11

Un joueur de tennis a droit à deux tentatives pour réussir sa mise en jeu. Monia réussit sa première balle de service dans 65 % des cas. Quand elle échoue au premier coup, elle réussit la seconde mise en jeu dans 80 % des cas. Quelle est la probabilité pour qu'elle commette une double faute (c'est-à-dire qu'elle échoue deux fois de suite) ?

12

Une urne contient quatre boules rouges et cinq boules noires. On tire au hasard, successivement et sans remise trois boules de l'urne.

- 1) Quelle est la probabilité de tirer exactement deux boules rouges ?
- 2) Quelle est la probabilité de tirer au moins une boule rouge ?
- 3) Quelle est la probabilité de tirer des boules de même couleur ?

13

Dans une classe de 3<sup>ème</sup> sport, il y a quinze filles dont six aiment les maths et dix garçons dont six aiment les maths. Au début de chaque séance, le professeur de mathématiques interroge au hasard deux élèves l'un après l'autre. Déterminer la probabilité de chacun des événements suivants :

- A « Les élèves interrogés aiment les maths ».  
B « Les élèves interrogés sont des filles ».  
C « Les élèves interrogés sont des filles et aiment les maths ».  
B « Les élèves interrogés sont des filles ou aiment les maths ».

14

Slim est un boxeur. La probabilité pour qu'il gagne une partie par points est égale à 0,6 et la probabilité qu'il gagne une partie par KO est égale à 0,2

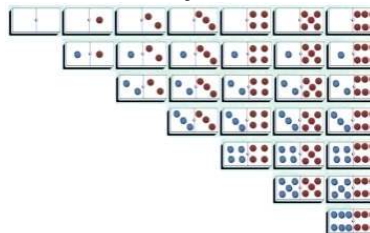
- 1) Quelle est la probabilité qu'il gagne une partie ?
- 2) Au cours d'un tournoi, Slim doit affronter quatre adversaires.

Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :

- a) A « Slim gagne la première partie par KO et les trois autres par points ».
- b) B « Slim gagne seulement les deux premières parties ».
- c) C « Slim gagne seulement deux parties ».
- d) D « Slim ne gagne aucune partie ».

15

la figure suivante illustre le jeu de dominos.



On tire un domino au hasard.

- 1) Quelle est la probabilité d'obtenir un 6 ?
- 2) On additionne les nombres de points inscrits sur les dominos tirés. Soit S le résultat obtenu.
  - a) Quelles sont les valeurs prises par S ?
  - b) Pour chacune de ces n valeurs, calculer la probabilité  $p_i$  pour que S soit égal à i  $0 \leq i \leq n$

16

Deux joueurs d'une équipe de handball composée de dix joueurs sont dopés. On convoque un joueur pris au hasard pour un contrôle antidopage. On considère l'événement :

D « Le joueur convoqué est dopé ».

- 1) Calculer  $p(D)$ .
- 2) La probabilité pour qu'un joueur soit à la fois dopé et contrôlé positif est égale à 0,16 et la probabilité pour qu'un joueur soit à la fois non dopé et contrôlé positif est égale à 0,08. On note par  $V_+$  l'événement « Le joueur est contrôlé positif ».

Montrer que  $p(V_+) = p(V_+ \cap D) + p(V_+ \cap \bar{D})$ .

En déduire que  $p(V_+) = 0,24$ .



## MATHS & SPORT

De tout temps et dans toutes les civilisations, les Hommes ont toujours voulu prédire l'avenir et connaître leur chance à gagner dans les jeux de hasard.

Des archéologues ont trouvé dans les sarcophages de l'Egypte, des dés pipés, vieux de 2000 ans.



Dans le domaine sportif, nous utilisons des données statistiques pour établir un modèle probabiliste permettant par exemple de prédire les chances d'une équipe ou d'un joueur à gagner une partie.



D'autre part, les compagnies d'assurance, utilisent des modèles probabilistes pour fixer les primes des sportifs et particulièrement ceux qui pratiquent un sport à risque tel que le canyoning.

# Eléments de correction



## Chapitre 1

### QCM

- 1) B,
- 2) A,
- 3) C

### V-F

- 1) V,
- 2) F,
- 3) On ne peut pas décider,
- 4) On ne peut pas décider,
- 5) F

## Chapitre 2

### QCM

- 1) A,
- 2) C,
- 3) D,
- 4) C

### V-F

- a) V,
- b) On ne peut pas décider,
- c) V
- d) V

## Chapitre 3

### QCM

- 1) C,
- 2) A,
- 3) D,
- 4) B,
- 5) C
- 6) B

### V-F

- 1) F,
- 2) V,
- 3) F
- 4) a) F
- 4) b) F
- 4) c) V

## Chapitre 4

### QCM

- 1) B,
- 2) A,
- 3) A,
- 4) B,
- 5) D,
- 6) D

### V-F

- 1) V,
- 2) V,
- 3) F,
- 4) V,
- 5) F.

## Chapitre 5

### QCM

- 1) B,
- 2) A,
- 3) B,
- 4) C,
- 5) A.

### V-F

- 1) V,
- 2) F,
- 3) F,
- 4) F.

## Chapitre 6

### QCM

- 1) A,
- 2) C,
- 3) A,
- 4) B,
- 5) C,
- 6) A,
- 7) B.

### V-F

- 1) a) F,
- 1) b) F,
- 2) a) V,
- 2) b) V,
- 3) V,
- 4) F.

## Chapitre 7

### QCM

- 1) B,
- 2) C,
- 3) C,
- 4) C.

### V-F

- 1) F,
- 2) F,
- 3) V,
- 4) F.

## Chapitre 8

### QCM

- 1) B,
- 2) C,
- 3) A,
- 4) B.

### V-F

- 1) a) F,
- 1) b) V,
- 1) c) F,
- 2) F,
- 3) F.



## Chapitre 1

2

$$S = \left] -\infty, \frac{5}{2} \right] \cup [1, +\infty[$$

4

3) a)  $\frac{2}{x-1} \neq 0$  donc 0 n'a pas d'antécédent par  $f$ .

b)  $\frac{2}{x-1} = 1$  signifie que  $x-1=2$  signifie que

$$x = 1$$

5

1) a)  $A(0, -3)$ .

b)  $B\left(\frac{3}{2}, 0\right)$ .

2)  $E(4, 1)$

8

$f(x) - (-3) = \frac{1}{1-x}$  donc le signe de  $f(x) - (-3)$  est celui de  $1-x$ .

$x$	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x) - (-3)$		+	-
Position relative	C est au dessus de D		C est en dessous de D

Donc pour  $x \in ]-\infty, 1[$   $\mathcal{C}$  est au dessus de la droite d'équation  $y=3$  et pour  $x \in ]1, +\infty[$   $\mathcal{C}$  est en dessous de la droite d'équation  $y=3$

9

d) L'ensemble de définition de  $k$  est  $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$

pour tout  $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$   $-x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$  et

$$k(-x) = \frac{1}{-x+1} + \frac{1}{-x-1} = -\left(\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1}\right) = -k(x)$$

Donc  $k$  est impaire

9

b) L'ensemble de définition de  $g$  est  $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$

$x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ ,  $(-x) \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$  et  $g(-x) = g(x)$

11

Si  $x_1 \leq x_2$  alors  $-x_2 \leq -x_1$  alors

$f(-x_2) \leq f(-x_1)$  donc  $f(x_2) \leq f(x_1)$  par suite  $f$  est décroissante sur  $] -\infty, 0]$

17

1) b)  $-1 \leq (x-2)^2 - 1$  donc  $-2 \leq f(x)$ .

## Chapitre 2

4

a)  $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} 2x + 1 = 7$ .

5

$$g(x) = \frac{1}{x+1}$$

L'ensemble de définition de  $g$  est  $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$

$$\lim_{x \rightarrow -2} g(x) = -1$$

6

$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1$  et  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -1,5$  donc

$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$  donc  $f$  n'a pas de limite en 1

9

1) L'ensemble de définition de  $f$  est  $\mathbb{R}$

$$f(x) = 2x + 7 \text{ si } x \neq 1.$$

2)  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 9$ .

3)  $a=9$ .

10

3)  $a=1$ .

## Chapitre 3

1

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{1}{2}x + 10^{10} = \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{1}{2}x = -\infty.$$

2

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x^2 = +\infty.$$

3

$$d) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1-3x}{x-3} = -3.$$

5

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1 & \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = +\infty & \quad \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = +\infty \end{aligned}$$

7

- a) la droite d'équation  $x=2$  la droite d'équation  $y=1$ .

9

Branche parabolique verte pour  $g$ .  
Branche parabolique rouge pour  $f$ .

11

Si  $a=0$  alors  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ .

12

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2 & \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty & \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty \end{aligned}$$

13

2)  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$   $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$ . La droite d'équation  $x=1$  est une asymptote à la courbe représentative de  $f$ .

- b) L'ensemble de définition de  $g$  est  $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$   
 $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}, (-x) \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$  et  $g(-x) = g(x)$ .

## Chapitre 4

1

$$a) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2(x+1)}{x+1} = 2.$$

3

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2 + x - 1) - 1}{x - 1} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = f'(1) = 3 \text{ avec}$$

$$f(x) = x^2 + x - 1.$$

6

- 1) a)  $f'(x) = 2x + 2$ .  
b)  $a = -1$ .  
c)  $f'$  s'annule et change de signe en  $a = -1$ , donc  $d$  admet un extrémum en  $a = -1$ .

8

$$1) \quad b) \quad f'(-1) = 0 \quad f'(1) = 0 \quad f'(0) = -3$$

9

$$T: y = f'(a)(x - a) + f(a).$$

10

$$T: y = 4x + 5.$$

13

$$g'(x) = 2x - 3, \quad g'(x) = 0 \text{ signifie que } x = \frac{3}{2}.$$

## Chapitre 5

1

$$b) \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} -x^2 = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$$

$$g'(x) = -2x - 1, \quad g'(x) \geq 0 \text{ signifie que } x \leq -\frac{1}{2}$$

4

$$a) \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{3}x^3 = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

$$f'(x) = x^2 - 1, \quad f'(x) \leq 0 \text{ équivaut } x \in [-1, 1]$$

5

$$b) \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \frac{1}{2}, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^-} g(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^+} g(x) = +\infty$$

$$g'(x) = \frac{-1}{(2x-3)^2}, \quad g'(x) \leq 0 \text{ sur } ]-\infty, \frac{3}{2}[ \cup ]\frac{3}{2}, +\infty[$$

7

Asymptotes:  $D: y = 2$  et  $\Delta: x = 2$

Centre de symétrie  $\Omega(2, 2)$

**11**

1) a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$   $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$ . Donc  $D : y = 1$  est

une asymptote à  $C$  au voisinage de  $-\infty$  et  $+\infty$

b)  $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = +\infty$   $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\infty$  donc  $\Delta : y = 1$  est

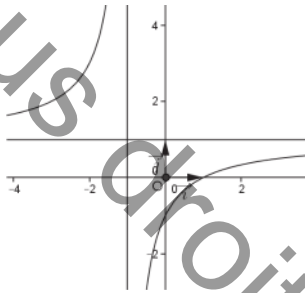
une asymptote à  $C$

2) a)  $f'(x) = \frac{2}{(x+1)^2}$ ,  $f'(x) \geq 0$  sur  $]-\infty, -1[ \cup ]-1, +\infty[$

Donc  $f$  est croissante sur  $]-\infty, -1[$  et  $]-1, +\infty[$

3) a)  $\Omega(=1, 1)$ .

b)

**13**

1)  $f'(x) = 2ax + b$

2) a)  $f'(0) = b$ , donc  $b = 1$ ,  $f(0) = c$ , donc  $c = 1$ .

b)  $-\frac{1}{2} = \frac{-b}{2a}$  donc  $a = 1$

## Chapitre 6

**1**

1) c)  $U_0 = 3$   $U_1 = 5$   $U_2 = 9$   $U_4 = 17$

**4**

1)  $U_{10} = U_0 + 10r = -17$

2)  $U_n = 3 - 2n$

3)  $U_0 + U_1 + \dots + U_{30} = 31 \times \frac{2U_0 + 30 \times (-2)}{2} = -837$

**7**

1)  $U_3 = q^3 U_0 = 3 \times 2^3 = 24$

2)  $U_n = q^n U_0 = 3 \times 2^n$

3)  $U_0 + U_1 + \dots + U_n = 3(2^{n+1} - 1)$

## Chapitre 7

**2**

$3 \times 4 \times 5 \times \dots \times n = \frac{n!}{2!}$ .

**6**

1)  $A_{30}^5$

2)  $\binom{30}{5}$

**8**

1)  $C_{12}^4$

2)  $C_{12}^4 \times C_{12}^4$

3)  $C_{12}^4 - C_7^4$

4)  $C_5^4 + C_7^4$

**9**

1)  $C_9^4$

2)  $C_5^2 \times C_4^2$

3)  $C_3^2 \times C_6^2$

4)  $C_4^4$

## Chapitre 8

**1**

$P(A \cap B) = 0,3$

**3**

$P(A) + P(B) > 1$  donc  $P(A \cap B) \neq 0$

**5**

a)  $\frac{2}{10} = \frac{1}{5}$

b)  $\frac{3}{10}$

c)  $\frac{5}{10} = \frac{1}{2}$

**6**

1)  $\frac{C_3^2 C_5^1}{C_8^3}$

2)  $\frac{C_3^2 C_5^1}{C_8^3} + \frac{C_3^3}{C_8^3}$

3)  $\frac{C_3^3 + C_5^3}{C_8^3}$

**9**

1)  $C_4^3 \times (0,6)^3 (0,4) = 0,3456$

2)  $(0,4)^4 = 0,0256$

3)  $1 - (0,4)^4 = 0,9744$