RÉPUBLIQUE TUNISIENNE
MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION

MATHEMATIQUES

3ème année de l'enseignement secondaire

Section : SPORT

LES AUTEURS

RIDHA BEN SAÂD
Inspecteur Principal

IMED CHEKIR
Inspecteur

LES EVALUATEURS

Ali Béji Hammas
Inspecteur Principal

Tahar Dorgaâ
Inspecteur Principal

Taoufik Charrada
Inspecteur Principal

Centre National Pédagogique

Remerciements

Les auteurs tiennent à remercier particulièrement les membres de l'équipe d'évaluation, Messieurs Ali Béji Hammas, Tahar Dorgaâ et Taoufik Charrada, pour leurs critiques constructives, leurs conseils judicieux et leurs grandes disponibilités.

Nous remercions également les professeurs Habib Jouini, Mejdi Ben Badr et Mongi El Ouni pour leurs remarques pertinentes et suggestions.

Les auteurs

Préface

Ce manuel de Mathématiques s'adresse aux élèves des classes de $3^{\text{ème}}$ année secondaire section Sport.
Il s'appuie sur une approche constructiviste de l'apprentissage et il est conçu suivant une progression spiralée de sorte que l'élève puisse, d'une part construire progressivement ses connaissances, et d'autre part, développer ses compétences.

Conformément au programme en vigueur de mathématiques pour la $3^{\text{ème}}$ année secondaire, section Sport, nous avons tenu à accorder une place importante à l'interprétation graphique, à la résolution des problèmes et à l'étude de situations issues du domaine sportif et de l'environnement des élèves.

Nous avons fait le choix d'aborder les différents points du programme de manière intuitive, loin de tout formalisme mathématique.

Dans chaque chapitre, les activités sont orientées vers la résolution de problèmes et elles sont fondées le plus souvent sur des démarches empiriques tout en privilégiant l'intuition de l'apprenant. Dans le but d'institutionnaliser les résultats établis, ces activités seront suivies de bilans intermédiaires suite auxquels nous renvoyons l'élève à une panoplie d'exercices d'appropriation et de réinvestissement.

Les activités précédées par l'icône, sont associées à des fichiers numériques que nous avons pris soin de rassembler sur un CD-Rom. Il s'agit de classeurs tableur ou de fichiers de traceur de courbes ou encore de figures de géométrie dynamique que l'enseignant pourra exploiter particulièrement en vidéo projection.

La correction des items des rubriques « S'auto évaluer » ainsi que des éléments de correction pour certains exercices d'entrainement sont proposées à la fin du manuel.

Les auteurs

Carte du manuel

Chaque chapitre comporte les rubriques suivantes :

Pour démarrer

On propose à l'élève des activités simples qui lui permettent de faire le point sur les connaissances acquises et jugées indispensables pour accéder aux nouveaux apprentissages.

Le cours

Les activités proposées dans cette rubrique permettent à l'élève de chercher, d'expérimenter, de conjecturer, de prendre des initiatives et de découvrir de nouveaux résultats.

Le bilan

Dans cette rubrique, on rassemble l'essentiel des résultats établis au cours du chapitre.

Exercices corrigés

A travers des exercices de synthèse et des solutions détaillées, on invite les élèves à découvrir d'autres procédés et de faire le point

S'auto-évaluer

Les items de cette rubrique visent à permettre à l'élève de faire sa propre évaluation. Le corrigé de ces items est proposé à la fin du manuel.

Mobiliser ses compétences

Cette rubrique est consacrée à la résolution de problèmes intégratifs, dans des situations significatives et en rapport avec l'environnement de l'apprenant. Ces situations sont accompagnées de stratégies de résolution.

Exercices d'entrainement

On regroupe dans cette rubrique de nombreux exercices d'appropriation, de réinvestissement et d'entrainement. Pour certains d'entre eux, des éléments de correction sont proposés à la fin du manuel.

Math & sport

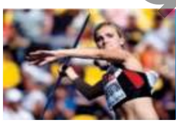
On propose dans cette rubrique certaines applications des notions développées au cours du chapitre dans le domaine des sports.

Sommaire


Généralités sur les fonctions 6


Continuité et limites 23


Limites et comportement asymptotique 40


Dérivation et applications 62


Exemples d'étude de fonctions 83


Suites réelles 103


Dénombrement 124


Probabilités 141

Eléments de correction 164

Chapitre 1

Généralités sur les fonctions

Sommaire

I. Ensemble de définition
II. Sens de variation et extremum
III. Fonction paire-Fonction impaire

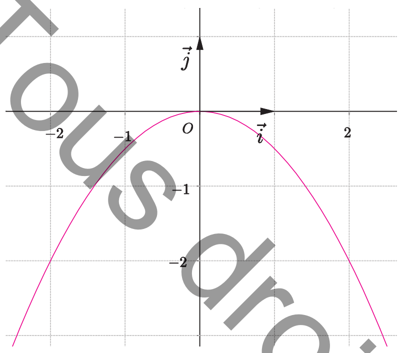
Pour démarrer

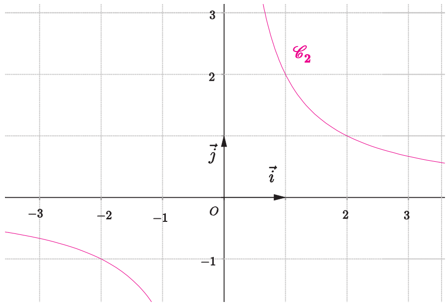
Activité 1

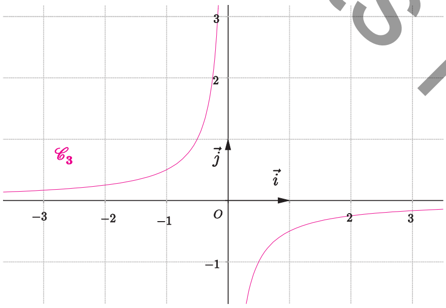
On donne ci-dessous les représentations graphiques des fonctions

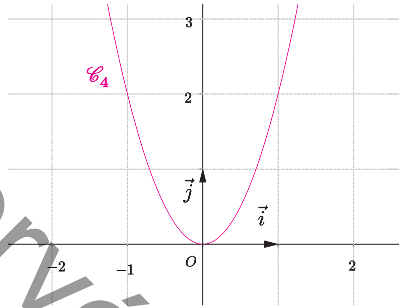
$$f_1 : x \mapsto 2x^2 ; f_2 : x \mapsto -\frac{1}{2}x^2 ; f_3 : x \mapsto \frac{2}{x} ; f_4 : x \mapsto -\frac{1}{2x}.$$

Associer chacune de ces fonctions à sa courbe représentative.









Activité 2

On donne ci-contre les représentations graphiques des fonctions $f : x \mapsto x^2$ et $g : x \mapsto \frac{1}{x}$.

Par lecture graphique, déterminer :

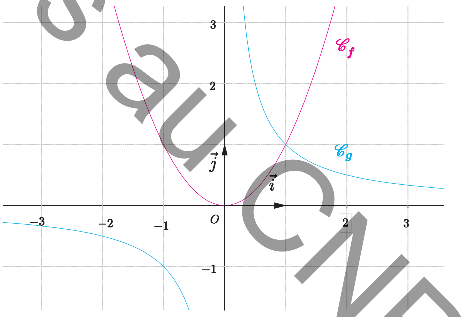
1) $f(-1) ; g(2)$ et $g\left(\frac{1}{2}\right)$.

2) Le nombre de solutions de chacune des équations :

a) $f(x) = 0$.

b) $f(x) = 2$.

c) $f(x) = g(x)$



LE COURS

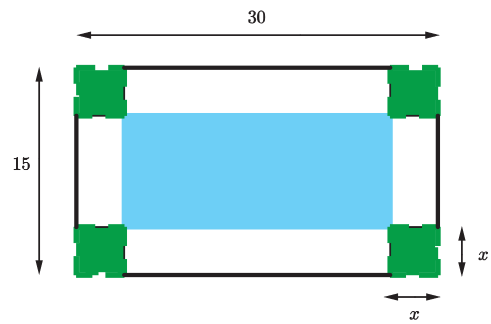
I) Ensemble de définition

Activité 1

On dispose d'une feuille cartonnée de 30 cm de longueur et de 15 cm de largeur. Pour fabriquer une boite sans couvercle par pliage, on enlève dans chaque coin de la feuille un carré de côté x.

On désigne par $V(x)$ le volume de la boite ainsi obtenue.

1) A quel ensemble D doit appartenir x pour pouvoir fabriquer la boite ?
2) Vérifier que pour tout $x \in D$, on a $V(x) = 4x^3 - 90x^2 + 450x$



Activité 2

Déterminer l'ensemble de définition de chacune des fonctions suivantes :

$f_1(x) = 2x - 3$ $\qquad$ $f_2(x) = \dfrac{x-2}{x+1}$

$f_3(x) = x^2 - 3x + 1$ $\qquad$ $f_4(x) = 1 + \dfrac{2}{x-3}$

On appelle ensemble de définition d'une fonction f, l'ensemble des réels x pour lesquels $f(x)$ existe

Retenons :

Soient les réels a, b, c et d.

- L'ensemble de définition des fonctions de type : $x \mapsto ax^3 + bx^2 + cx + d$ est $\mathbb{R}$.
- Dans le cas où $c \neq 0$ et $ad - bc \neq 0$, l'ensemble de définition des fonctions de type : $x \mapsto \dfrac{ax+b}{cx+d}$ est $\mathbb{R} \setminus \left\{ -\dfrac{d}{c} \right\}$.

LE COURS

Activité 3

Soit la fonction $f : x \mapsto \dfrac{2x-1}{x+2}$ et $\mathscr{C}$ sa représentation graphique dans un repère $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

1) Lesquels parmi les points suivants sont des points de $\mathscr{C}$?

   $A\left(2,\dfrac{3}{4}\right); B\left(0,\dfrac{1}{2}\right); C\left(\dfrac{1}{2},0\right)$ et $D(1,1)$. .

2) Expliquer pourquoi le point $E(-2,1)$ n'appartient pas à $\mathscr{C}$.

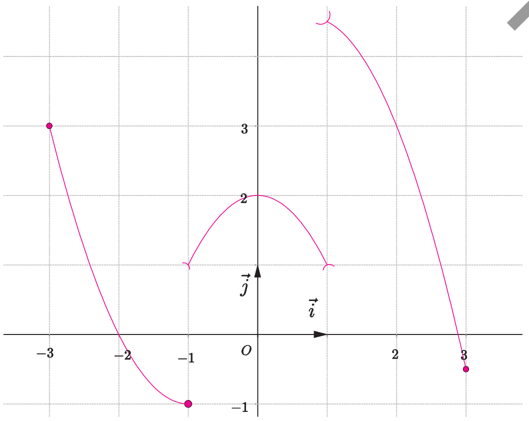
Le plan est muni d'un repère $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

Un point M de coordonnées (x,y) appartient à la courbe représentative de f si et seulement si x appartient à l'ensemble de définition D de f et $y=f(x)$.

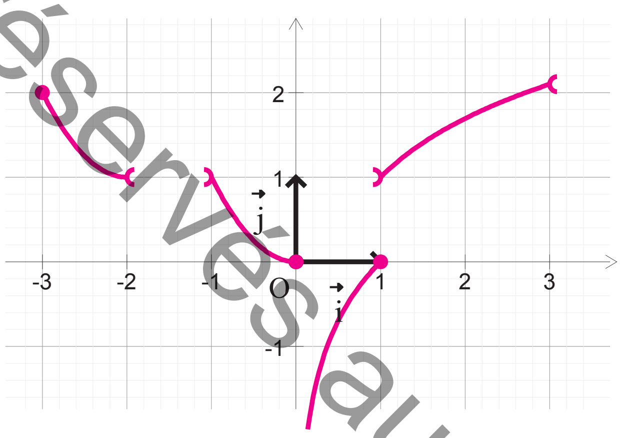
Activité 4

Déterminer graphiquement l'ensemble de définition de chacune des fonctions f et g, sachant qu'ils sont tous contenus dans l'intervalle [-3,3].

C_f représentation graphique de f



C_g représentation graphique de g



Activité 5

Soit la fonction $f : x \mapsto 2x^2 - 7x + 3$ et C sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

1) Déterminer les coordonnées des points d'intersection de C avec l'axe $\left(O,\vec{i}\right)$.

2) Déterminer les coordonnées du point d'intersection de C avec l'axe $\left(O,\vec{j}\right)$.

LE COURS

Activité 6

1) Représenter dans le même repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ les courbes des fonctions f et g définies par : $f(x)=\frac{1}{2}x^2$ et $g(x)=\frac{2}{x}$.
2) a) Déterminer graphiquement le nombre de points d'intersection de ces deux courbes.

   b) En déduire que l'équation $x^3=4$ admet une solution unique dont on donnera graphiquement une valeur approchée au dixième près.
3) Dresser le tableau de signe de l'expression $\frac{1}{2}x^2-\frac{2}{x}$.

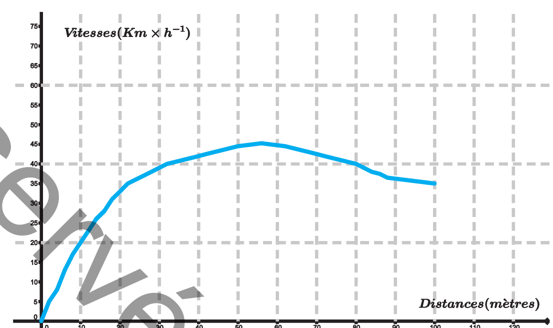
Si $\mathscr{C}$ désigne la courbe représentative d'une fonction f dans un repère $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$, on dit que $\mathscr{C}$ a pour équation $y=f(x)$.

II) Sens de variation et extremum

Activité 1

La courbe ci-contre représente les vitesses d'un sprinter lors d'une course de 100 m en fonction des distances parcourues en mètres.

1. Déterminer graphiquement :
   a) la phase d'accélération du sprinter.
   b) la phase de décélération.
2. Quelles distances a parcouru le sprinter lorsque sa vitesse a atteint :
   a) 20 $Km.h^{-1}$?
   b) 35 $Km.h^{-1}$?
   c) son maximum.



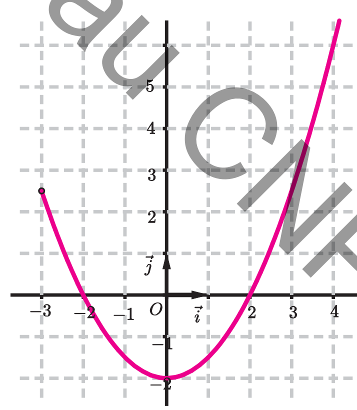
Activité 2

On donne ci-contre la courbe représentative de la fonction f définie sur $[-3,+\infty[$ par $f(x)=\frac{1}{2}x^2-2$.

1) Déterminer graphiquement l'intervalle I sur lequel f est décroissante et l'intervalle J sur lequel f est croissante.

   b) Comparer $f(-3)$ et $f(-2)$ puis $f(-1{,}5)$ et $f\left(-\sqrt{2}\right)$

   c) Comparer $f(0)$ et $f(1)$ puis $f(2)$ et $f(3)$..



2) a) Soient a et b deux réels distincts de l'intervalle I tels que $a < b$. Justifier que $f(a) > f(b)$

b) Montrer que si a et b sont deux réels distincts de l'intervalle J tels que $a < b$ alors $f(a) < f(b)$

Définition :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

- f est croissante sur I si pour tous réels a et b de I tels que $a < b$ on a $f(a) \leq f(b)$.
- f est décroissante sur I si pour tous réels a et b de I tels que $a < b$ on a $f(a) \geq f(b)$.
- f est constante sur I si pour tous réels a et b de I on a $f(a) = f(b)$.

Activité 3

1) Etudier le sens de variation de chacune des fonctions suivantes sur $]-\infty, 0]$ et sur $[0, +\infty[$

$a) f(x) = 3x^2$ $\qquad$ $b) f(x) = -2x^2$

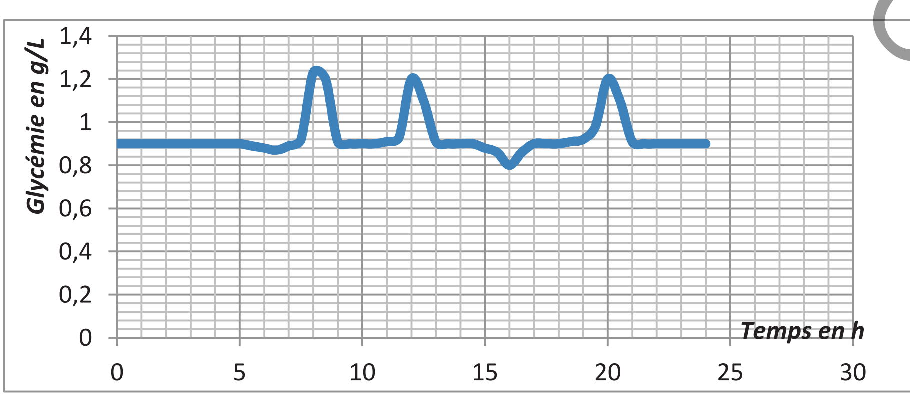
2) Etudier le sens de variation de chacune des fonctions suivantes sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$

$a) f(x) = \dfrac{3}{x}$ $\qquad$ $b) f(x) = -\dfrac{1}{x}$

Etudier le sens de variation d'une fonction f revient à déterminer les intervalles sur lesquels f est soit croissante, décroissante ou constante.

Activité 4

On donne ci-dessous la courbe représentant les variations de la glycémie d'un athlète au cours d'une journée. Une séance d'entrainement est effectuée l'après-midi.



1) Indiquer comment varie la glycémie au cours d'une activité sportive.
2) Donner les valeurs minimales de la glycémie au cours de cette journée et préciser en quels moments, elles ont été enregistrées.
3) Donner les valeurs maximales de la glycémie au cours de cette journée et préciser en quels moments, elles ont été enregistrées.

Un extremum est, soit un minimum, soit un maximum.

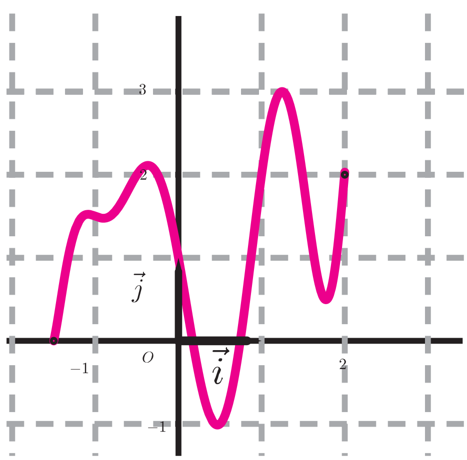
Définition :

Soit f une fonction définie sur un intervalle D et x_0 un élément de D.

- On dit que $f(x_0)$ est un maximum local en x_0 s'il existe un intervalle ouvert I inclus dans D et contenant x_0 et tel que pour tout x de I on a $f(x) \leq f(x_0)$.
- On dit que $f(x_0)$ est un minimum local en x_0 s'il existe un intervalle ouvert I inclus dans D et contenant x_0 et tel que pour tout x de I on a $f(x) \geq f(x_0)$.

Activité 5

On donne ci-contre la représentation graphique $\mathscr{C}$ d'une fonction f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.



Quand on parle de maximum ou de minimum, il faut préciser sur quel intervalle.

1) Quel est l'ensemble de définition I de cette fonction f ?
2) Donner le signe de $f(x)$ selon les valeurs de x.
3) Quels sont les extremums de f sur I ? En quelles valeurs sont-ils atteints ?

III) Fonctions paires – Fonctions impaires

Activité 1

On considère la fonction $f : x \mapsto 2x^2$.

1) a) Vérifier que f est définie sur $\mathbb{R}$.

   b) Justifier que pour tout $x \in \mathbb{R}, f(-x) = f(x)$.

2) Soit la fonction $g : x \mapsto \dfrac{1}{x^2 - 4}$.

   a) Justifier que l'ensemble de définition D de g est $\mathbb{R} \setminus \{2, -2\}$.

   b) Montrer que pour tout $x \in D$, alors $(-x) \in D$

   c) Comparer alors $g(-x)$ et $g(x)$ pour tout $x \in D$.

> Soit f une fonction définie sur un ensemble D.
> f est paire signifie que pour tout $x \in$ D, $(-x) \in$ D et $f(-x) = f(x)$.

Activité 2

Montrer que chacune des fonctions suivantes est paire.

$f : x \mapsto |x|$ $\qquad$ $g : x \mapsto x^2 + 1$ $\qquad$ $h : x \mapsto 1 + \dfrac{1}{x^2}$ $\qquad$ $k : x \mapsto 1 - \dfrac{1}{x^2}$

Activité 3

Soit la fonction $f : x \mapsto 3x$.

On désigne par D_f son ensemble de définition.

1) a) Préciser D_f.

   b) Justifier que pour tout tout $x \in D_f, f(-x) = -f(x)$.

2) Soit g la fonction définie par $g(x) = \dfrac{1}{x}$.

   a) Vérifier que g est définie sur $\mathbb{R}^*$.

   b) Justifier que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $(-x) \in \mathbb{R}^*$ et $g(-x) = -g(x)$.

> Soit f une fonction définie sur un ensemble D.
> f est impaire signifie que pour tout $x \in D$, $(-x) \in D$ et $f(-x) = -f(x)$.

Activité 4

Justifier que chacune des fonctions suivantes est impaire.

$f : x \mapsto \dfrac{2}{x}$ $\qquad$ $g : x \mapsto 2x^3 + x$ $\qquad$ $h : x \mapsto x + \dfrac{1}{x}$

Activité 5

Etudier la parité de chacune des fonctions suivantes :

$f : x \mapsto -2x^2 + 3$ $\quad g : x \mapsto x^3 + x^2 - x + 1$ $\quad h : x \mapsto 2x + 1$

$u : x \mapsto x^2 + x$ $\quad v : x \mapsto 2x - x^3$ $\quad w : x \mapsto \dfrac{3}{x} - 3x$

Etudier la parité d'une fonction revient à décider si elle est paire ou impaire ou ni paire ni impaire

Activité 6

Soit (C) la courbe représentative de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{2}x^2$ dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) Soit le point $A\left(1, \dfrac{1}{2}\right)$. On note *A'* le symétrique de *A* par rapport à $(O, \vec{j})$.

   a) Justifier que $A'\left(-1, \dfrac{1}{2}\right)$.

   b) Vérifier que $A \in (C)$. En est-il de même pour le point *A'* ?

2) Soit *M* un point de (C) d'abscisse *x* et *M'* le symétrique de *M* par rapport à $(O, \vec{j})$.

   a) Montrer que $M' \in (C)$.

   b) Que représente l'axe $(O, \vec{j})$ pour la courbe (C) ?

Activité 7

Soit la fonction $g : x \mapsto \dfrac{2}{x}$.

On désigne par $\mathscr{H}$ sa courbe représentative dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Soit *a* un réel non nul et *M* le point de $\mathscr{H}$ d'abscisse *a* et *M'* le symétrique de *M* par rapport à O.

1) Justifier que *M'* a pour coordonnées $(-a, -g(a))$.
2) Montrer que *M'* est un point de $\mathscr{H}$.

Retenons :

Soit (C) la courbe représentative d'une fonction *f* dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) *f* est paire si et seulement si (C) est symétrique par rapport à $(O, \vec{j})$.
2) *f* est impaire si et seulement si (C) est symétrique par rapport à O.

EXERCICE RÉSOLU

Enoncé

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{|x|}{|x|+1}$.

1) a) Déterminer l'ensemble de définition D_f de f.
   b) Montrer que f est paire.
2) Montrer que $f(x) = 1 - \dfrac{1}{1+x}$ si $x \geq 0$ et $f(x) = 1 + \dfrac{1}{x-1}$ si $x \leq 0$.
3) Soit a et b deux réel positifs tels que $a \leq b$.
   a) Montrer que $\dfrac{1}{a+1} \geq \dfrac{1}{b+1}$.
   b) En déduire que f est croissante sur $[0,+\infty[$.
   c) Montrer que f est décroissante sur $]-\infty,0]$.
4) Que représente $f(0)$ pour la fonction f ?

Corrigé

1) a) Pour tout $x \in \mathbb{R}, 1+|x| \neq 0$, donc $D_f = \mathbb{R}$.

   b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(-x) \in \mathbb{R}$ et $f(-x) = \dfrac{|-x|}{|-x|+1} = \dfrac{|x|}{|x|+1} = f(x)$ .Donc f est paire.

2) Pour tout $x \geq 0$, $f(x) = \dfrac{|x|}{|x|+1} = \dfrac{x}{x+1} = \dfrac{(x+1)-1}{x+1} = 1 - \dfrac{1}{x+1}$.

   Pour tout $x \leq 0, |x| = -x$ donc $f(x) = \dfrac{-x}{-x+1} = \dfrac{(-x+1)-1}{-x+1} = 1 - \dfrac{1}{1-x} = 1 + \dfrac{1}{x-1}$

3) a) si $a \in [0,+\infty[$ *et* $b \in [0,+\infty[$ et $a \leq b$ alors $1 \leq a+1 \leq b+1$ d'où $\dfrac{1}{b+1} \leq \dfrac{1}{a+1}$.

   b) Soit a et b deux réel positifs tel que $a \leq b$. $\dfrac{1}{b+1} \leq \dfrac{1}{a+1}$ alors $-\dfrac{1}{a+1} \leq -\dfrac{1}{b+1}$,donc

   $1 - \dfrac{1}{a+1} \leq 1 - \dfrac{1}{b+1}$. Ainsi $f(a) \leq f(b)$ et par suite f est croissante sur $[0,+\infty[$

   c) Si $a \leq b \leq 0$ alors $a-1 \leq b-1 \leq -1$ donc $\dfrac{1}{b-1} \leq \dfrac{1}{a-1}$ alors $1 + \dfrac{1}{b-1} \leq 1 - \dfrac{1}{a-1}$.

   Donc $f(b) \leq f(a)$ et par conséquent f est décroissante sur $]-\infty,0]$.

4) f est décroissante sur $]-\infty,0]$, donc $f(0) \leq f(x)$ pour $x \leq 0$

   f est croissante sur $[0,+\infty[$, donc $f(0) \leq f(x)$ pour $0 \leq x$.

   D'où $f(0)$ est un minimum sur $\mathbb{R}$.

LE BILAN

- Soient a,b,c et d quatre réels.
  - ✓ L'ensemble de définition des fonctions de type : $x \mapsto ax^3+bx^2+cx+d$ est $\mathbb{R}$.
  - ✓ Si $c \neq 0$ et $ad-bc \neq 0$, l'ensemble de définition des fonctions de type : $x \mapsto \dfrac{ax+b}{cx+d}$ est $\mathbb{R} \setminus \left\{-\dfrac{d}{c}\right\}$.
- Soit f une fonction définie sur un intervalle I.
  - ✓ f est croissante sur I si pour tous réels a et b de I tels que $a \leq b$ on a $f(a) \leq f(b)$.
  - ✓ f est décroissante sur I si pour tous réels a et b de I tels que $a \leq b$ on a $f(a) \geq f(b)$.
  - ✓ f est constante sur I si pour tous réels a et b de I on a $f(a) = f(b)$.
- Soit f une fonction définie sur un intervalle D et x_0 un élément de D.
  - ✓ On dit que $f(x_0)$ est un maximum local en x_0 s'il existe un intervalle ouvert I inclus dans D et contenant x_0 tel que pour tout x de I on a $f(x) \leq f(x_0)$.
  - ✓ On dit que $f(x_0)$ est un minimum local en x_0 s'il existe un intervalle ouvert I inclus dans D et contenant x_0 tel que pour tout x de I on a $f(x) \geq f(x_0)$.
- Soit f une fonction définie sur un ensemble D.
  - ✓ f est paire signifie que pour tout $x \in$ D, $(-x) \in$ D et $f(-x) = f(x)$
  - ✓ f est impaire signifie que pour tout $x \in$ D, $(-x) \in$ D et $f(-x) = -f(x)$.
- Soit (C) la courbe représentative d'une fonction f dans un repère orthogonal $(O,\vec{i},\vec{j})$.
  - ✓ f est paire si et seulement si (C) est symétrique par rapport à $(O,\vec{j})$.
  - ✓ f est impaire si et seulement si (C) est symétrique par rapport à O.

MOBILISER SES COMPÉTENCES

Situation 1

Dans la catégorie du lancement du poids, la hauteur y de la boule au sol, exprimée en mètres, est gérée en fonction de sa portée x en mètres, par l'expression :

$$y = -\frac{1}{20}x^2 + x + 1.7$$

Quelle est la portée de la boule lorsqu'elle heurte le sol ?

Situation 2

On considère la fonction $f : x \mapsto x^3$.

Etudier le sens de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

Stratégie de résolution

Justifier que pour tous réels a et b, on a :

a) $a^3 - b^3 = (a-b)\left(a^2 + ab + b^2\right)$.

b) $a^2 + ab + b^2 = \left(a + \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}b^2$.

Situation 3

On considère la fonction f définie par $f(x) = \frac{3}{x+2}$.

Etudier le sens de variation de la fonction f sur chacun des intervalles $]-\infty;-2[$ et $]-2;+\infty[$.

Stratégie de résolution

- Justifier que pour tous réels a et b de $]-\infty;-2[$ ou de $]-2;+\infty[$, on a $f(a) - f(b) = \frac{-3(a-b)}{(a+2)(b+2)}$.
- Etudier le signe de $(a+2)(b+2)$ sur chacun des intervalles $]-\infty;-2[$ et $]-2;+\infty[$.

S'AUTO-ÉVALUER

QCM

Pour chacune des questions suivantes, trois réponses sont proposées parmi lesquelles une seule est correcte. Indiquer la lettre qui lui correspond.

		Propositions		
		A	B	C
1	Le point $M(2;7)$ est sur la courbe représentative de la fonction :	$f_1 : x \mapsto 2x^2+7$	$f_2 : x \mapsto 2x^2-7x+13$	$f_3 : x \mapsto x^2+7x-2$
2	Le point A d'abscisse 3 est sur la courbe d'équation $y=x^2-7x+3$. Son ordonnée est :	-9	-12	33
3	Le point d'ordonnée -2 de la courbe d'équation $y=x^3+3x-6$ a pour abscisse	-6	3	1

Vrai-Faux

Indiquer si les propositions suivantes sont vraies ou fausses ou on ne peut pas décider.

Soit une fonction f définie sur $[-4;4]$. On admet que f est décroissante sur $[-4;-1]$ et sur $[2;4]$ et croissante sur $[-1;2]$

1. $f(-3) > f(-2)$.
2. $f(1) \leq f(0)$.
3. $f(4) > f(-4)$.
4. $f(2)$ est un maximum sur $]1;3[$.
5. $f(-1)$ est un maximum sur $]-2;0[$.

EXERCICES D'ENTRAINEMENT

1

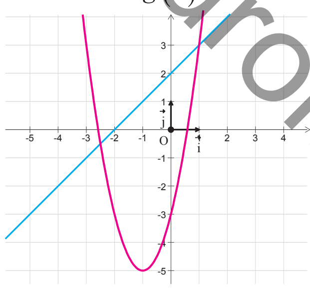
Soit les réels *a*, b et *c*. On considère la fonction $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$. On désigne par $\mathscr{P}$ sa courbe représentative dans le plan muni du repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

Déterminer les réels *a*, b et *c* lorsque les points $A(0;1)$, $B(1,4)$ et $C(-1;0)$ appartiennent à $\mathscr{P}$.

2

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $2x^2 + 4x - 3 \geq x + 2$.

2) On donne ci-dessous les représentations graphiques des fonctions f et g définies par : $f(x) = 2x^2 + 4x - 3$ et $g(x) = x + 2$



Interpréter graphiquement le résultat obtenu en 1).

3

Soit la fonction $f : x \mapsto 2x^2 - x - 6$.

1) a) Justifier que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = (2x+3)(x-2)$.
   b) En déduire la résolution de l'équation $f(x) = 0$.

2) On désigne par $\mathscr{C}$ la courbe représentative de *f* dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$
   a) Déterminer les coordonnées du point *A*, intersection de $\mathscr{C}$ avec l'axe des ordonnées.
   b) Déterminer l'ensemble des abscisses des points de $\mathscr{C}$ situés en dessous de l'axe des abscisses.

4

Soit la fonction $f : x \mapsto \dfrac{2}{x-1}$.

1) Justifier que *f* est définie sur $]-\infty;1[\cup]1;+\infty[$

2) Calculer les images par *f* de chacun des réels :

   a) 4 *b*) $\dfrac{3}{2}$ *c*) $1+\sqrt{2}$,

3) a) Le nombre 0 admet-il un antécédent par *f* ?
   b) Le nombre 2 admet-il un antécédent par *f* ?

5

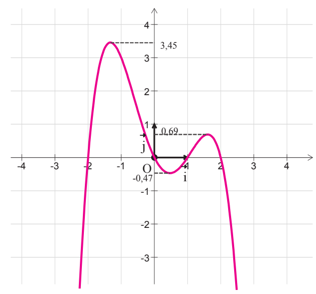
Soit la fonction $f : x \mapsto \dfrac{2x-3}{x+1}$. On désigne par C sa courbe représentative dans un repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1) Déterminer les coordonnées du point d'intersection de C avec l'axe des ordonnées ? avec l'axe des abscisses ?

2) Existe-t-il des points de C dont l'ordonnée est égale à 1 ?

6

La représentation graphique ci-dessous est celle d'une fonction f définie $[-3;3]$.



Par lecture graphique, compléter :

a) Si $-2 \leq x \leq 0$ alors $f(x) \leq \cdots$

b) Si $-1 \leq x \leq 1$ alors $f(x) \geq \cdots$

c) Si $1 \leq x \leq 3$ alors $f(x) \leq \cdots$

d) Si $x \in [-2,0]$ alors $f(x) \in$

e) Si $1 \leq f(x) \leq 3{,}5$ alors $\cdots \leq x \leq \cdots$

7

Soit *f* une fonction définie sur l'intervalle $[-3;4]$ et vérifiant :

- f est décroissante sur $[-1;2]$,
- f est croissante sur $[-3;-1]$ et sur $[2;4]$
- $f(-3) = -12$ et $f(4) = 9$,
- f admet un maximum local en -1 égal à 4 et un minimum local en 2 égal à - 2.

1) Tracer une courbe susceptible de représenter *f*.

2) Peut-on comparer :
   a) $f(-2{,}5)$ et $f(-1{,}5)$?
   b) $f(1)$ et $f\left(\sqrt{2}\right)$?

3) Peut-on déterminer le signe de chacun des réels : $f(0)$ et $f(1)$?

EXERCICES D'ENTRAINEMENT

8

Soit la fonction $f : x \mapsto \dfrac{3x-2}{1-x}$.

1) Préciser l'ensemble de définition de f.
2) Justifier que f est croissante sur chacun des intervalles $]-\infty;1[$ et $]1;+\infty[$.
3) Le plan est muni du repère $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

   Etudier algébriquement la position relative de la courbe représentative $\mathscr{C}$ de f et la droite d'équation $y = -3$.

9

Etudier la parité de chacune des fonctions suivantes :

a) $f : x \mapsto 3x$

b) $g : x \mapsto x^3 + 3x$

c) $h : x \mapsto 2x^2 - 1$

d) $k : x \mapsto \dfrac{1}{x+1} + \dfrac{1}{x-1}$

10

Après avoir déterminer leurs ensembles de définition, étudier la parité de chacune des fonctions suivantes :

$a)\ f : x \mapsto x + \dfrac{1}{x}$ $\qquad b)\ g : x \mapsto \dfrac{1}{x^2-1}$

$c)\ h : x \mapsto x - \dfrac{1}{x}$ $\qquad d)\ k : x \mapsto x^2 + \dfrac{1}{x}$

11

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$

1) Montrer que si une fonction f est paire et croissante sur $[0;+\infty[$ alors elle est décroissante sur $]-\infty;0]$.
2) Montrer que si une fonction f est impaire et croissante sur $[0;+\infty[$ alors elle est décroissante sur $]-\infty;0]$.

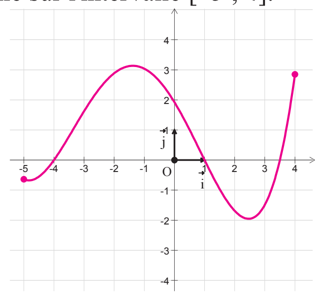
12

Soit f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$

1) Etudier la parité de $f \times g$ si f et g sont deux fonctions paires.
2) Etudier la parité de $f \times g$ si f est une fonction paire et g est impaire.

13

On donne ci-dessous la représentation graphique d'une fonction définie sur l'intervalle [–5 ; 4].

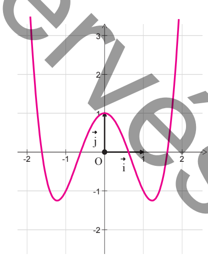


Utiliser les informations de ce dessin pour répondre aux questions suivantes :

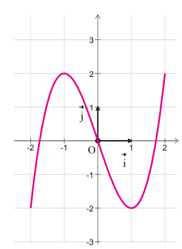
1) Quelle est l'image de – 4 par f ?
2) Quels sont les antécédents de 0 par f ?
3) Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = 2$.
4) Combien l'équation $f(x) = 1$ admet-elle de solutions dans [–5 ; 4] ?
5) Pour quelle valeur de x cette fonction admet-elle un maximum sur [–5 ; 4] ?
6) Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) \geq 2$?
7) Quel est le minimum de f sur [–5 ; 4] ?
8) Dresser le tableau de signe de f.

14

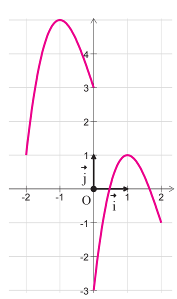
Etudier la parité de chacune des fonctions représentées ci-dessous :



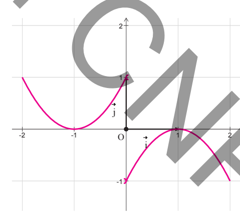
C_f



C_g



C_h

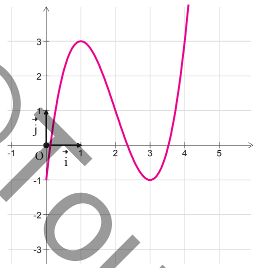


C_k

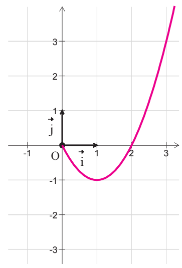
EXERCICES D'ENTRAINEMENT

16

Compléter les courbes suivantes pour qu'elles représentent selon le cas une fonction paire ou impaire.



f est paire



f est impaire

17

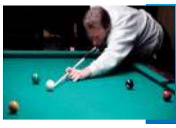
On considère la fonction $f : x \longmapsto 2x^2 - 8x + 6$

1) a) Vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f(x) = 2\left((x-2)^2 - 1\right)$.

   b) En déduire que *f* admet un minimum en 2 égal à -2.

2) a) Montrer que pour tout *a* et *b* réels, $f(a) - f(b) = 2(a-b)(a+b-4)$

   b) En déduire que *f* est décroissante sur $]-\infty; 2]$ et croissante sur $[2; +\infty[$.



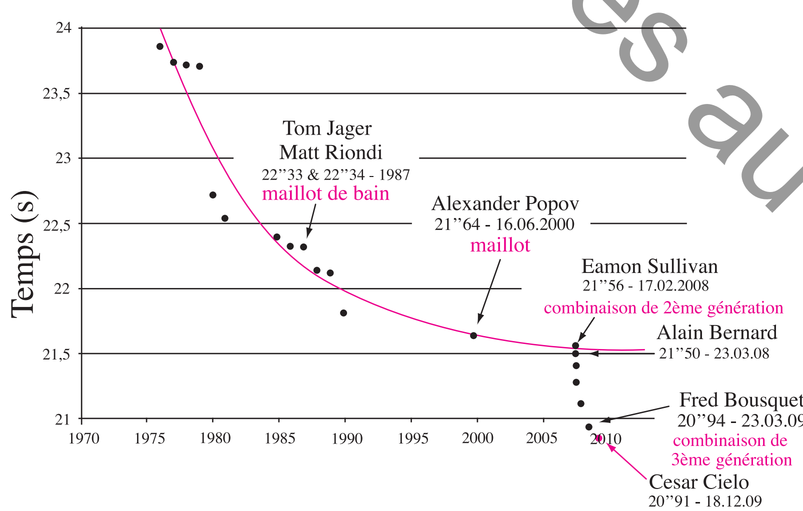
MATHS & SPORT

Entre le record de Francis Chichester en 7 mois et demi sur un bateau de 16 mètres et celui de Franck Cammas de mars 2010 en 48 jours 7 heures sur un 32 mètres, la progression des records du Tour du Monde à la voile est stupéfiante. On a établi une relation linéaire entre la taille du bateau et sa vitesse.

L'étude des records a amené les mathématiciens à établir un modèle permettant de déterminer leur évolution dans le temps.

La fonction est en quelques sortes un recollement de fonctions du type $t \mapsto e^{-at} + b$.

Ci-dessous, on donne la modélisation de l'évolution des records du monde du 50 mètres nage libre masculin, utilisé sur deux périodes dont la seconde est due à l'utilisation des combinaisons intégrales lors des compétitions



Chapitre 2

Continuité et limites

Sommaire

I. Continuité d'une fonction.
II. Limite finie d'une fonction en un réel.
III. Limite en un réel d'une fonction continue.
IV. Limite à gauche, limite à droite.

Pour démarrer

Activité 1

Préciser l'intervalle ouvert I de centre 1 et d'amplitude 1.

Activité 2

Soit la fonction $f : x \mapsto \dfrac{2}{x-1}$.

1) Déterminer l'ensemble de définition D de f.
2) Préciser un intervalle ouvert J de centre -1 et inclus dans D.

Activité 3

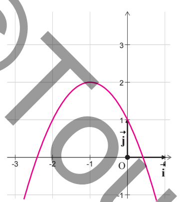
Préciser le centre et l'amplitude de chacun des intervalles ouverts suivants :

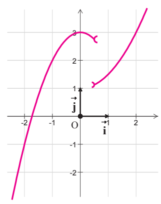
a) $]-4;2[$ b) $[-1;3]$ c) $]2-\sqrt{2};2+\sqrt{2}[$

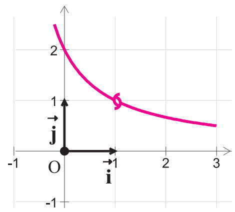
I) Continuité d'une fonction

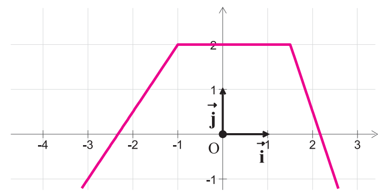
Activité 1

On donne ci-dessous les courbes représentatives de quatre fonctions f, g, h et k.


Courbe représentative de f


Courbe représentative de g


Courbe représentative de h


Courbe représentative de k

1) Retracer, en bleu, chacune des courbes ci-haut dessinées.
2) Quelles particularités suggère-t-il le tracé des courbes représentatives de :
   a) f et k. b) g et h.

Définition :

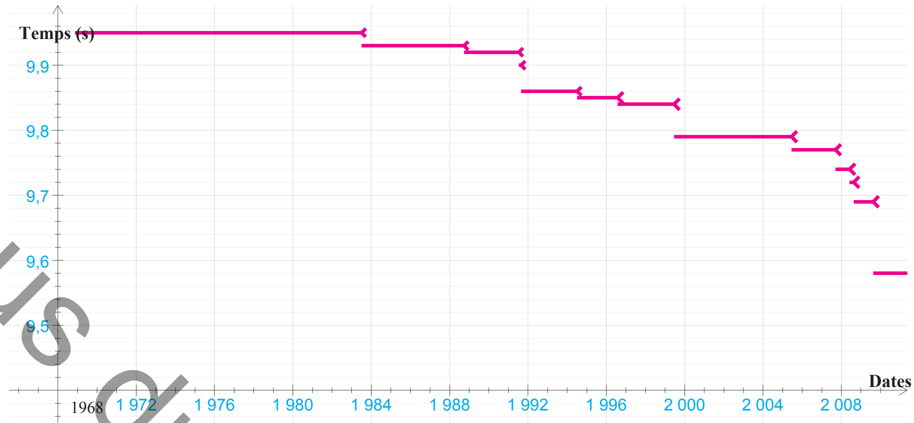
Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I. On dit que f est continue sur I lorsque sa courbe représentative C dans un repère du plan peut-être tracée d'un trait **continu**, c'est à dire « sans lever le crayon ».
Si la courbe C présente « un saut » en un point d'abscisse x_0, on dira que f est discontinue en x_0.

Activité 2

Les records du 100 m hommes enregistrés depuis les jeux olympiques de Mexico en 1968 jusqu'au record mondial détenu le 16 Aout 2009 par le jamaïcain Usain Bolt à 9s 58 sont donnés dans le tableau suivant :

Dates	13/10/1968	3/6/ 1983	24/9/ 1988	14/6/ 1991	
Records	9s 95	9s 93	9s 92	9s 90	
Dates	25 /8/1991	6 /6/ 1994	27 /6/1996	16 /6/ 1999	
Records	9s 86	9s 85	9s 84	9s 79	
Dates	14 /6/2005	9 /9/ 2007	31 /3/ 2008	16 /8/ 2008	16 /8/ 2009
Records	9s 77	9s 74	9s 72	9s 69	9s 58

On désigne par $\mathcal{R}$ la fonction qui à tout réel t de l'intervalle]1968 ;2010[associe le record enregistré à cette date t. On donne ci-dessous la représentation graphique de $\mathcal{R}$.



1) a) Expliquer comment associe-t-on la date du 13 octobre 1968 au réel t_0 = 1968,87.
   b) Quel est l'abscisse correspondant à la date du 16 Aout 2009, date du record de 9s 58 ?
2) On désigne par t_7 = 1999,45 l'abscisse correspondant à la date du 16 juin 1999.
   a) Déterminer $\mathcal{R}(t)$ pour tout $t \in]1999;1999,45[$.

   b) Déterminer $\mathcal{R}(t)$ pour tout $t \in]1999,46;2000[$.
   c) Que peut-on conclure quant à la continuité de la fonction $\mathcal{R}$ en t_7 ?

Exemples :

- Les fonctions affines sont continues sur $\mathbb{R}$.
- Les fonctions du type $x \mapsto ax^2$ où $a \in \mathbb{R}^*$ sont continues sur $\mathbb{R}$.
- Les fonctions du type $x \mapsto \dfrac{a}{x}$ où $a \in \mathbb{R}^*$ sont continues sur chacun des intervalles $]-\infty,0[$ et $]0,+\infty[$.

Activité 3

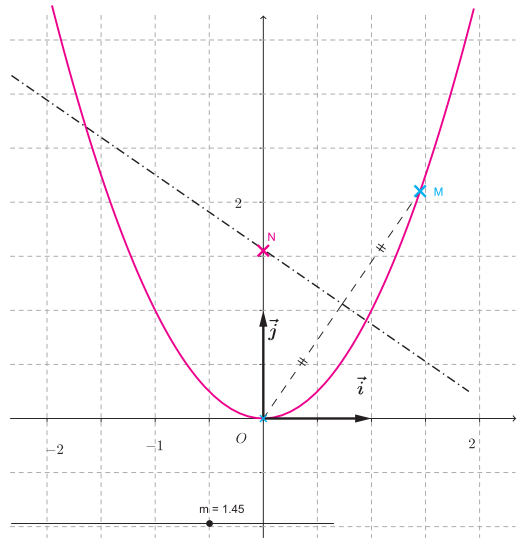
Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer son ensemble de définition et tracer sa courbe représentative.

$$f_1 : x \mapsto \begin{cases} 2x-1 & \text{si } x \le 2 \\ 5-x & \text{si } x > 2 \end{cases}, \quad f_2 : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{1}{2}x^2 & \text{si } x < 1 \\ \dfrac{1}{2x} & \text{si } x \ge 1 \end{cases}, \quad f_3 : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{2}{x} & \text{si } x \le 1 \\ \dfrac{x}{2} & \text{si } x > 1 \end{cases}, \quad f_4 : x \mapsto \begin{cases} -\dfrac{1}{2}x^2 & \text{si } x \le -2 \\ \dfrac{4}{x} & \text{si } -2 < x < 2 \\ \dfrac{1}{2}x^2 & \text{si } x \ge 2 \end{cases}$$

En déduire les intervalles sur lesquels chacune de ces fonctions est continue.

II) Limite finie d'une fonction en un réel

Activité 1



Le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$. On désigne par $\mathscr{P}$ la parabole d'équation $y = x^2$.

Soit M un point de $\mathscr{P}$ distinct de O d'abscisse m. La médiatrice du segment $[OM]$ coupe l'axe $\left(O,\vec{j}\right)$ en un point N.

1) Etude graphique

a) A l'aide du curseur m, déplacer le point M sur la parabole $\mathscr{P}$ et remarquer le déplacement du point N.

b) Que peut-on conjecturer sur la valeur de l'ordonnée du point N lorsque M s'approche indéfiniment du point O ?

2) Etude algébrique

a) Justifier que la médiatrice du segment $[OM]$ a pour équation : $x + my - \dfrac{m\left(1+m^2\right)}{2} = 0$.

b) Montrer alors que le point N a pour coordonnées $\left(0, \dfrac{1+m^2}{2}\right)$.

c) En déduire que l'ordonnée de N s'approche de $\dfrac{1}{2}$ lorsque le réel m s'approche de 0.

Activité 2

Soit la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x^3 - 2x^2}{3x-6}$.

1) Justifier que f est définie sur $\mathbb{R}\setminus\{2\}$.

2) a) A l'aide d'une calculatrice ou d'un tableur, compléter le tableau de valeurs suivant :

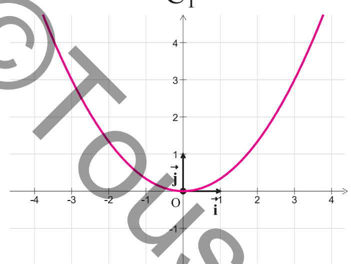
x	1,8	1,9	1,95	1,995	1,9995	1,99995
$f(x)$						
x	2,2	2,1	2,05	2,005	2,0005	2,00005
$f(x)$						

b) Que peut-on conclure quant au comportement de $f(x)$ lorsque x s'approche de 2 ?

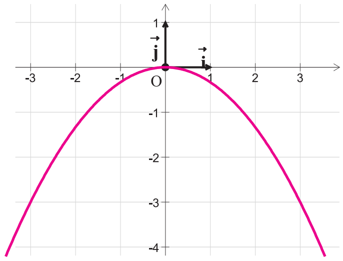
3) a)Simplifier l'expression $\dfrac{x^3-2x^2}{3x-6}$ pour $x \neq 2$.

b) Laquelle parmi les représentations graphiques suivantes est celle de f ?

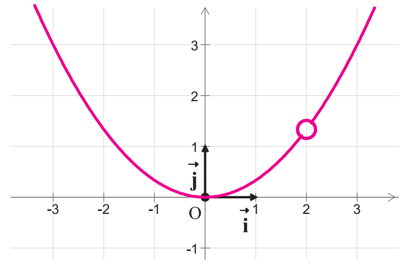
C$_1$



C$_2$



C$_3$



On note dans ce cas :. $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = \dfrac{4}{3}$

Retenons

Si $f(x)$ s'approche d'une valeur réelle ℓ lorsque x s'approche d'un réel x_0, on dit que $f(x)$ tend vers ℓ quand x tend vers x_0. On note $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$ et on lit :la limite de f en x_0 est égale à ℓ.

Si f est une fonction constante définie sur un intervalle ouvert I par $f(x) = c$, alors pour tout $x_0 \in I, \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = c$

On admet que si une fonction admet une limite ℓ en x_0, alors cette limite est unique

III) Limite en un réel d'une fonction continue

Activité 1

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{2}{x}$.

1) a) Tracer dans un repère orthonormé la courbe représentative de f.

   b) Etudier graphiquement la continuité de f sur $]0;+\infty[$.

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I. On ne peut étudier la continuité de f en x_0 que si $x_0 \in I$

2) Etudions la limite de f particulièrement en 1.

a) Déterminer 5 réels situés dans l'intervalle $\left]1-\frac{1}{10};1\right[$ et 5 autres réels situés dans l'intervalle $\left]1;1+\frac{1}{10}\right[$.

b) Déterminer les images de ces réels par f.

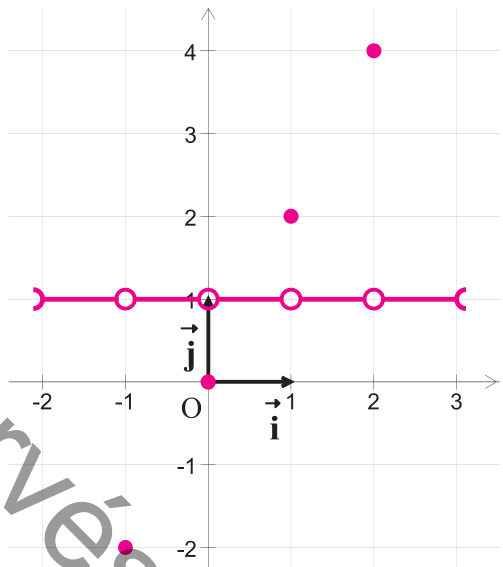
c) Donner alors $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ et la comparer à $f(1)$.

Activité 2

Soit f la fonction définie sur $]-2;3[$ par :

$$\begin{cases} f(x)=2x & \text{si } x\in\mathbb{Z} \\ f(x)=1 & \text{si } x\notin\mathbb{Z} \end{cases}$$

On donne ci-contre sa courbe représentative $\mathscr{C}$ dans un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.



1) Justifier graphiquement que f est discontinue en tout entier relatif de $]-2;3[$.

2) Soit x_0 un entier relatif de $]-2;3[$.

a) Déterminer $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$.

b) Justifier que pour tout entier relatif x_0 de $]-2;3[$, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\neq f(x_0)$.

Les activités 1 et 2 suggèrent le résultat suivant :

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et x_0 un réel de I.
f est continue en x_0 si et seulement si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$

Activité 3

Déterminer pour chacune des fonctions suivantes sa limite en x_0.

$a)$ $f : x\mapsto 2x^2-3;\ \ x_0=1,$

$b)$ $f : x\mapsto \dfrac{2}{x-1};\ \ x_0=2$

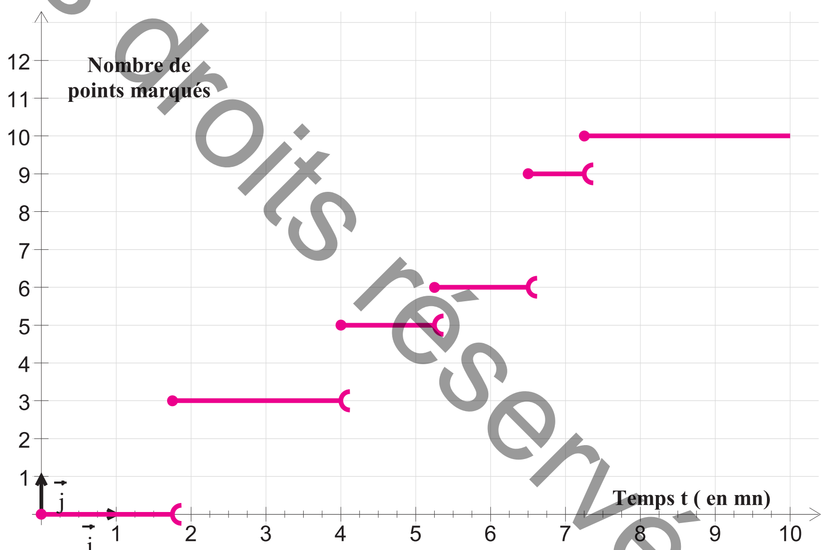
$c)$ $f : x\mapsto x^3+3x^2-x-1;\ \ x_0=-1$

$d)$ $f : x\mapsto \dfrac{2x+1}{x+1};\ \ x_0=-2$

IV) Limite à gauche, limite à droite

Activité 1

Le graphique ci-dessous représente le cumul de points marqués par l'équipe nationale de Basketball lors du premier quart-temps d'un match amical en fonction du temps en minutes.



On désigne par f la fonction qui à tout instant t de $[0\,;10]$ associe le nombre de points marqués en faveur de l'équipe nationale jusqu'à cet instant t.

1) a) Déterminer graphiquement $f(t)$ pour $t \in]3,5;4[$.
   b) En déduire que si t tend vers 4 tout en restant inférieur à 4, alors $f(t)$ tend vers 3.

2) a) Déterminer graphiquement $f(t)$ pour $t \in]4;4,5[$.
   b) En déduire que si t tend vers 4 tout en restant supérieur à 4, alors $f(t)$ tend vers 5.

Activité 2

Soit la fonction f définie sur $\left]\frac{3}{2};2\right[\cup \left]2;\frac{5}{2}\right[$ par :

$$\begin{cases} f(x) = 2x - 1 & \text{si } x < 2 \\ f(x) = x^2 - x + 1 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

1) Compléter le tableau de valeurs suivant :

x	1,8	1,9	1,95	2,05	2,10	2,2
$f(x)$						

2. Déterminer $\lim\limits_{x \to 2} 2x - 1$ et $\lim\limits_{x \to 2} x^2 - x + 1$.

$\lim\limits_{x \to 2} 2x - 1$ peut être notée par $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x<2}} f(x)$ ou $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x)$. Il s'agit de la limite de f à gauche en 2.

$\lim\limits_{x \to 2} x^2 - x + 1$ peut être notée par $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ ou $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x)$ Il s'agit de la limite de f à droite en 2.

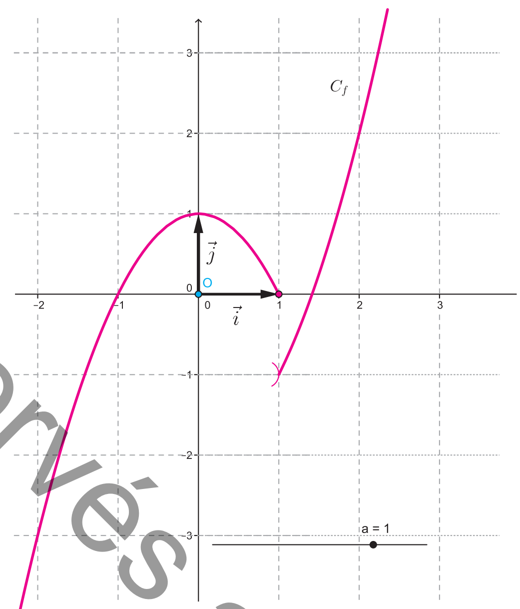
Activité 3

Soit a un réel de l'intervalle $[-2;2]$.

On considère la fonction f définie par :

$$\begin{cases} 1 - x^2 & \text{si } x \leq a \\ x^2 - 2 & \text{si } x > a \end{cases}$$

Ouvrir le fichier **cont-lim_3.ggb** pour visualiser particulièrement la représentation graphique de f comme l'illustre la figure ci-contre.



1) a) Déplacer le curseur a à la valeur $a = 1$.

b) Déterminer les expressions de f sur chacun des intervalles $\left]\frac{1}{2};1\right[$ et $\left]1;\frac{3}{2}\right[$.

c) En déduire alors $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$.

2) Soit $a \in [-2;2]$.

a) Déterminer en fonction de a, $\lim\limits_{x \to a^-} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$

b) Quelles sont les valeurs de a pour lesquelles on a $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \lim\limits_{x \to a^+} f(x) = f(a)$?

Activité 4

Déterminer pour chacune des fonctions suivantes les limites à gauche et à droite en x_0.

$$f : x \mapsto \begin{cases} x^2 + x - 2 & \text{si } x < -1 \\ -2x^3 + 5x + 1 & \text{si } x > -1 \end{cases} \quad ; x_0 = -1$$

$$g : x \mapsto \begin{cases} 2x^2\text{-}1 & \text{si } x < 1 \\ \dfrac{3 - 2x}{x} & \text{si } x > 1 \end{cases} \quad ; x_0 = 1$$

$$h : x \mapsto \begin{cases} 4x - 1 & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{2x - 1}{2x + 1} & \text{si } x > 0 \end{cases} \quad ; x_0 = 0$$

$$k : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{x + 1}{1 - x} & \text{si } x < 2 \\ \dfrac{3 - 2x}{3x - 2} & \text{si } x > 2 \end{cases} \quad ; x_0 = 2$$

Retenons

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et $x_0 \in I$.

f est continue en x_0 si et seulement si $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$

EXERCICE RÉSOLU

Enoncé

On considère la fonction

$$f : x \mapsto \begin{cases} x^2 + x - 6, \text{ si } x \leq -2 \\ ax + b, \text{ si } -2 < x < 3 \\ 2x^3 - 5x^2 + x - 1, \text{ si } x \geq 3 \end{cases}$$

Déterminer a et b pour que f soit continue sur $\mathbb{R}$.

Corrigé

On remarque d'abord que la fonction f est continue sur chacun des intervalles $]-\infty, -2[$, $]-2, 3[$ et $]3, +\infty[$. L'étude de la continuité de f est réduite en -2 et en 3.

$\lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -2^-} x^2 + x - 6 = -4$, $\lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to -2^+} ax + b = -2a + b$

Pour que f soit continue en -2, il faut et il suffit que $-2a + b = -4$ **(1).**

D'autre part, on a $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^-} ax + b = 3a + b$, $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^+} 2x^3 - 5x^2 + x - 1 = 11$

Pour que f soit continue en 3, il faut et il suffit que $3a + b = 11$ **(2)**

Le problème revient donc à résoudre le système :

$$\begin{cases} -2a + b = -4 \\ 3a + b = 11 \end{cases}$$

Par élimination, on obtient $5a = 15$ donc $a = 3$. Par suite $b = -4 + 6 = 2$.

Ainsi f est continue sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $a = 3$ et $b = 2$.

LE BILAN

Définition :

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I. On dit que f est continue sur I lorsque sa courbe représentative $\mathscr{C}$ dans un repère du plan peut-être tracée d'un trait **continu**, c'est à dire « sans lever le crayon ».
Si la courbe $\mathscr{C}$ présente « un saut » en un point d'abscisse x_0, on dira que f est discontinue en x_0.

Retenons

- On admet que si une fonction admet une limite ℓ en x_0, alors cette limite est unique.
- Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et x_0 un réel de I.
  f est continue en x_0 si et seulement si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.
- Soient les réels a, b, c et d.
  - Les fonctions du type $x \mapsto ax^3 + bx^2 + cx + d$ sont continues sur $\mathbb{R}$.
  - Si $c \neq 0$ et $ad - bc \neq 0$, les fonctions du type : $x \mapsto \dfrac{ax+b}{cx+d}$ sont continues sur chacun des intervalles $\left]-\infty, -\dfrac{d}{c}\right[$ et $\left]-\dfrac{d}{c}, +\infty\right[$.
- Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I sauf éventuellement en un réel x_0 de I et ℓ un réel.
  $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$ si et seulement si $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \ell$
- Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et $x_0 \in I$.
  f est continue en x_0 si et seulement si $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$

MOBILISER SES COMPÉTENCES

Situation 1

Un gymnase rectangulaire *ABCD* de périmètre 60 m dont le revêtement est réalisé à l'aide de plaques carrées de taraflex de côté 1m. On range les plaques côte à côte sans les découper de façon à couvrir la plus grande partie du gymnase. On fait varier les dimensions de *ABCD* tout en gardant le périmètre constant. Pour toute valeur x de *AB* on associe le nombre $N(x)$ de plaques de taraflex.

Ouvrir le fichier «Gymnase.ggb » et faire déplacer le curseur pour illustrer les variations du nombre $N(x)$ de plaques en fonction de la longueur de *AB*.

1) Donner l'expression $N(x)$ suivant les valeurs de x dans l'intervalle [0,30].
2) Etudier la continuité à droite et à gauche en les entiers de l'intervalle $]0,30[$.

Stratégie de résolution

A partir des expressions obtenues de $N(x), x \in [0,30]$, déterminer $\lim\limits_{x \to n^-} N(x)$ et $\lim\limits_{x \to n^+} N(x)$ où n est un entier de $]0,30[$.

S'AUTO-ÉVALUER

QCM et Vrai-Faux

1) Pour chacune des questions suivantes, quatre réponses sont proposées parmi lesquelles une seule est correcte. Indiquer la lettre qui lui correspond.

		A	B	C	D
1	$f : x \mapsto x^2 - 3x - 2$	$\lim\limits_{x \to -1} f(x) = 2$	$\lim\limits_{x \to -1} f(x) = 0$	$\lim\limits_{x \to -1} f(x) = -6$	f n'a pas de limite en -1
2	$f : x \mapsto \dfrac{2x-1}{x+1}$	$\lim\limits_{x \to 1} f(x) = -2$	$\lim\limits_{x \to 1} f(x) = -\dfrac{1}{2}$	$\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \dfrac{1}{2}$	f n'a pas de limite en 1
3	$f : x \mapsto \begin{cases} 2x^2 - x - 3 & \text{si } x < 1 \\ -3x^3 + x - 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$	$\lim\limits_{x \to 1} f(x) = -2$	$\lim\limits_{x \to 1} f(x) = -3$	$\lim\limits_{x \to 1} f(x) = -\dfrac{5}{2}$	f n'a pas de limite en 1
4	$f : x \mapsto \begin{cases} -\dfrac{2}{x-2} - x^2 & \text{si } x < 1 \\ \dfrac{2}{x} - x^3 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$	$\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = -1$	$\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = 2$	$\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 1$	f n'a pas de limite en 1

2) Indiquer si les propositions suivantes sont vraies ou fausses ou on ne peut pas décider.

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et a un réel de I.

a) Si f est continue en a alors $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = f(a)$.

b) Si $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = f(a)$ alors f est continue en a.

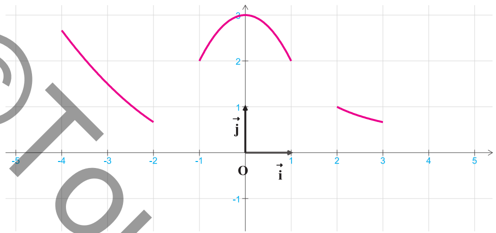
c) Si $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) \neq f(a)$ alors f est discontinue en a.

d) Si f est discontinue en a alors $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) \neq f(a)$ ou $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) \neq f(a)$.

EXERCICES D'ENTRAINEMENT

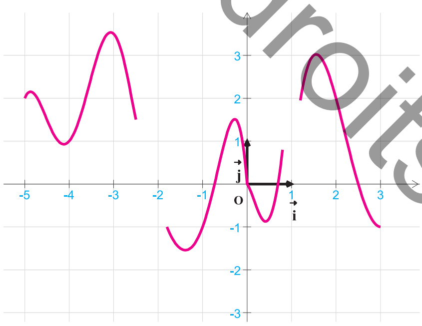
1

Compléter la courbe représentative C pour qu'elle représente une fonction continue sur l'intervalle $[-4;4]$.



2

Soit f une fonction définie sur $[-5;3]$ discontinue en -2 et en 1. Compléter la courbe représentative C ci-dessous pour qu'elle soit susceptible de représente f.



3

Soit la fonction $f : x \mapsto \begin{cases} 2x^2 & \text{si } x \leq -1 \\ 3x-1 & \text{si } x > -1 \end{cases}$

1) Tracer la courbe représentative C de f dans un repère orthonormé.
2) Justifier graphiquement que f est continue sur $\mathbb{R}$.

4

Déterminer pour chacune des fonctions suivantes sa limite en a.

1. $f : x \mapsto 2x+1$ et $a = 3$.
2. $g : x \mapsto 2x^2 - 3x - 5$ et $a = 2$.
3. $h : x \mapsto x^3 - x + 1$ et $a = -2$.

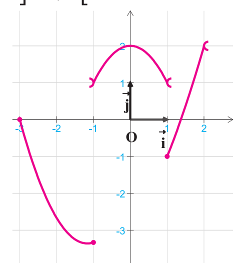
5

Déterminer pour chacune des fonctions suivantes son ensemble de définition puis sa limite en a.

1. $f : x \mapsto \dfrac{2}{x}$ et $a = -1$.
2. $g : x \mapsto \dfrac{1}{x+1}$ et $a = -2$.
3) $h : x \mapsto \dfrac{x-1}{x+2}$ et $a = 4$.

6

Dans le plan muni d'un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$, C désigne la représentation graphique d'une fonction f définie sur l'intervalle $]-2;2[$.



1) Déterminer graphiquement
$\lim\limits_{x \to -1^-} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x)$
Que peut-on dire de la limite de f en -1 ?
2) Reprendre la question 1) pour la limite en 1.

7

Etudier la continuité de de la fonction

$$f : x \mapsto \begin{cases} (1-x)^2 & \text{si } |x| \leq 2 \\ x^2 + x - 5 & \text{si } |x| > 2 \end{cases}$$

8

Etudier dans chacun des cas suivants, la continuité de la fonction f sur son ensemble de définition :

$a)\ f : x \mapsto \begin{cases} 1-x & \text{si } x < 1 \\ x^2 + x - 2 & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ 4x-2 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

$b)\ f : x \mapsto \sup(3x-4; x^2 + 3x + 1)$

$c)\ f : x \mapsto \begin{cases} -\dfrac{1}{x} & \text{si } |x| > 1 \\ 1 - x^2 & \text{si } |x| \leq 1 \end{cases}$

9

Soit a un réel et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x^2 + 5x - 7}{x-1} & \text{si } x \neq 1 \\ a & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

1) Simplifier l'expression $f(x)$ pour $x \neq 1$.
2) Déterminer $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$.
3) En déduire la valeur du réel a pour que f soit continue en 1

EXERCICES D'ENTRAINEMENT

10

Soit a un réel et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=\begin{cases} x+1 & \text{si } x\leq 1 \\ 3-ax^2 & \text{si } x>1 \end{cases}$$

1) Justifier que $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=2$ et $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=3-a$.
2) En déduire la valeur du réel a pour que f soit continue en 1.

11

Soit a un réel et f la fonction définie par :

$$\begin{cases} f(x)=x+a & \text{si } x\leq 0 \\ f(x)=\dfrac{1}{x+1} & \text{si } x>0 \end{cases}$$

1) Déterminer l'ensemble de définition de f.
2) Déterminer $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$.
3) En déduire la valeur du réel a pour que f soit continue en 0.

12

Soit a un réel et f la fonction définie par :

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{1}{x+1} & \text{si } -1<x<\dfrac{1}{2} \\ f(x)=ax^2+2x & \text{si } \dfrac{1}{2}\leq x<1 \end{cases}$$

Déterminer la valeur du réel a pour que f soit continue en $\dfrac{1}{2}$.

13

On considère les fonctions f et g continues sur $]1;+\infty[$ et définies par $f(x)=2$ et $g(x)=\dfrac{1}{x-1}$.

1) Déterminer $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to 2} g(x)$.
2) a) Justifier que pour tout $x\in\,]1;+\infty[$, on a :

   $(f+g)(x)=\dfrac{2x-1}{x-1}$.

   b) Vérifier que $\lim\limits_{x\to 2}(f+g)(x)=3$.

   c) En déduire que $\lim\limits_{x\to 2}(f+g)(x)=\lim\limits_{x\to 2} f(x)+\lim\limits_{x\to 2} g(x)$.

14

Soit la fonctions $f: x\mapsto 2x^2+7x-4.$.

Soit un réel x_0.

1) a) Justifier que f est continue sur $\mathbb{R}$.

   b) En déduire que $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=2x_0^2+7x_0-4$.

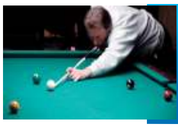
2) On considère les fonctions $u: x\mapsto 2x-1$ et $v: x\mapsto x+4$.

   a) Vérifier que pour tout $x\in\mathbb{R}, f(x)=u(x)\times v(x)$.

   b) Déterminer $\lim\limits_{x\to x_0} u(x)$ et $\lim\limits_{x\to x_0} v(x)$.

   b) En déduire que $\lim\limits_{x\to x_0}(u\times v)(x)=\lim\limits_{x\to x_0} u(x)\times\lim\limits_{x\to x_0} v(x)$

3) Généraliser pour $x_0\in\,]1;+\infty[$.



MATHS & SPORT

La modélisation des mouvements de foule revêt un intérêt particulier pour l'architecture des terrains de sport.

Ainsi, lors des manifestations sportives, la gestion du trafic des spectateurs vise à optimiser les temps de parcours et éviter les accidents dus à des situations de panique à travers une meilleure planification des infrastructures.

Des modèles mathématiques décrivent la trajectoire de chaque individu en tenant compte des interactions entre spectateurs et vise à faciliter l'écoulement et minimiser les temps d'évacuation.

Le pilote Philipe Massa perd le contrôle de sa monoplace dans la ligne droite des stands. La Ferrari du Brésilien a alors heurté le rail de sécurité avant de partir à la dérive dans le virage de Sainte-Dévote et de finir violemment sa course dans le mur de pneus.

A l'instant T de l'accident, la monoplace de Massa a parcouru depuis le début de la course une distance égale à $\lim\limits_{t \to T} d(t)$

Chapitre 3

Limites et comportement asymptotique

Sommaire :

I) Limites de fonctions polynômes
II) Limites de fonctions homographiques
III) Limites et interprétation graphique

Pour démarrer

Activité 1

Déterminer l'ensemble de solutions S de l'inéquation $-3x+2>10^4$.

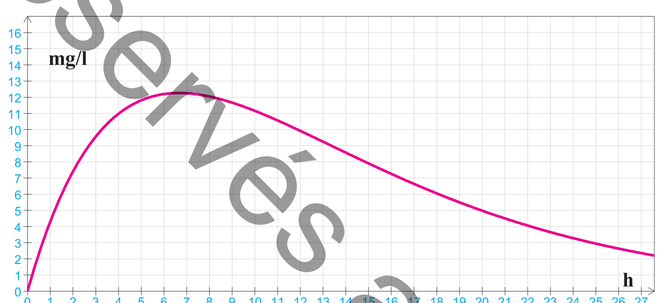
Activité 2

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x)=\frac{1}{x}$. Déterminer l'ensemble des réels x tels que $f(x)>10^2$.

Activité 3

l'Agence tunisienne antidopage a lancé une compagne de sensibilisation dans les milieux scolaires sur les dangers du dopage.

La courbe ci-contre représente le taux de produit dopant, en mg/l, présent dans le sang en fonction du temps *t*, en heures, écoulé depuis l'absorption d'un produit dopant.



1) Au bout de combien de temps le taux du produit dopant dans le sang du sportif est-il maximal ?
2) Evaluer la quantité restante au bout de 18h.
3) A partir de quelle heure, la quantité du produit dopant restante dans le sang est inférieure à 3mg/l.
4) Que peut-on conjecturer sur la quantité restante dans le sang à long terme ?

Activité 4

Soit P la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $P(x)=x^2$.

1. Trouver un réel A, tel que si $x>A$ alors $P(x)>10^{14}$
2. Trouver un réel B, tel que si $x<B$ alors $P(x)>10^{16}$

LE COURS

I) Limites de fonctions polynômes

Activité 1

On considère les fonctions affines f_1 et f_2 définies par $f_1(x) = 2x - 1$ et $f_2(x) = 3 - x$.

1. Tracer dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{\mathrm{i}}, \vec{\mathrm{j}}\right)$ les droites Δ_1 et Δ_2 représentatives de f_1 et f_2.
2. Soit a un réel strictement positif.
   a) Déterminer l'ensemble des réels x pour lesquels $f_1(x) > a$.
   b) Déterminer l'ensemble des réels x pour lesquels $f_2(x) > a$.
3. Soit b un réel strictement négatif.
   a) Déterminer l'ensemble des réels x pour lesquels $f_1(x) < b$.
   b) Déterminer l'ensemble des réels x pour lesquels $f_2(x) < b$.

On dit que la fonction $f_1 : x \mapsto 2x - 1$ admet la limite $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$ et la limite $-\infty$ quand x tend vers $-\infty$.

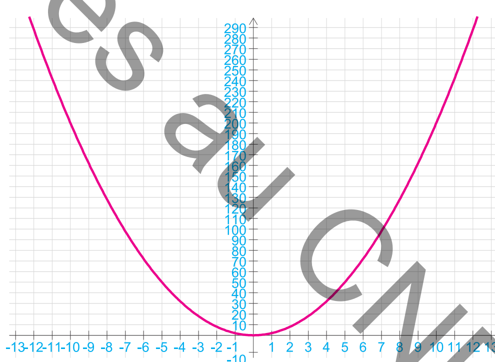
On dit que la fonction $f_2 : x \mapsto -x + 3$ admet la limite $-\infty$ quand x tend vers $+\infty$ et la limite $+\infty$ quand x tend vers $-\infty$.

On écrit : $\lim\limits_{x \to +\infty} 2x - 1 = +\infty$ **et** $\lim\limits_{x \to -\infty} 2x - 1 = -\infty$ $\lim\limits_{x \to +\infty} -x + 3 = -\infty$ **et** $\lim\limits_{x \to -\infty} -x + 3 = +\infty$.

Activité 2

On donne ci-contre la courbe représentative de la fonction $x \mapsto 2x^2$.

1. Déterminer graphiquement l'ensemble des réels x pour lesquels :
   - $f(x) > 150$.
   - $f(x) > 250$.
2. Soit $A > 0$. Justifier que $f(x) > 2A$ équivaut $x > \sqrt{A}$ ou $x < \left(-\sqrt{A}\right)$.



On dit que la fonction $\mathbf{f : x \to 2x^2}$ admet la limite $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$ et quand x tend vers $-\infty$.

On écrit : $\lim\limits_{x \to +\infty} 2x^2 = +\infty$ **et** $\lim\limits_{x \to -\infty} 2x^2 = +\infty$.

Une fonction polynôme du second degré est toute fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ où $a \neq 0$

Soit f une fonction polynôme du second degré définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = ax^2 + bx + c$.

On admet que :

Si $a > 0$, alors $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} ax^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} ax^2 = +\infty$

Si $a < 0$, alors $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} ax^2 = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} ax^2 = -\infty$

Activité 3

Le tableau suivant donne quelques valeurs prises par la fonction $x \mapsto x^3$ lorsque x prend des valeurs positives de plus en plus grandes et des valeurs négatives de plus en plus grandes en valeur absolue.
On se propose de vérifier que l'on peut rendre x^3 aussi grand que l'on veut pourvu que x soit suffisamment grand.

Une fonction polynôme du troisième degré est toute fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ où $a \neq 0$

1. Recopier et compléter le tableau de valeurs suivant :

x	1	5	10	20	10^2	10^3	10^5	10^{12}	-2	-5	-10	-20	-100	-10^3	-10^5	-10^{12}
x^3																

2. a) Peut-on déterminer une condition suffisante sur x pour que l'on ait $x^3 \geq 10^9$?
   b) Déterminer une condition suffisante sur x pour que $x^3 < \left(-10^{15}\right)$.
3. Que peut-on conjecturer sur le comportement de la fonction $x \mapsto x^3$ lorsque x tend vers $+\infty$ puis vers $-\infty$?

On dit que la fonction $\mathbf{f : x \to x^3}$ admet pour limite $+\infty$ en $+\infty$ et pour limite $-\infty$ en $-\infty$.

On écrit : $\lim\limits_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$ **et** $\lim\limits_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$

Soit f une fonction polynôme du troisième degré définie sur $\mathbb{R}$

par $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

On admet que :

Si $a > 0$, alors $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} ax^3 = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} ax^3 = +\infty$

Si $a < 0$, alors $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} ax^3 = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} ax^3 = -\infty$

II) Limites de fonctions homographiques

Activité 1

Pour son entrainement, un cycliste effectue un trajet aller-retour entre deux villes A et B.
A l'aller, sa vitesse est 30 kmh^{-1}. On désigne par x sa vitesse au retour et on note V(x) la vitesse moyenne du cycliste sur l'ensemble des deux trajets.

1) Justifier que $V(x)=\dfrac{60x}{x+30}$.
2) Le cycliste décide d'améliorer ses performances en augmentant la vitesse x au retour.
   a) Reprendre et compléter le tableau suivant :

x	35	40	45	50	55	60	65	70	…	…
V(x)										

   b) Le modèle mathématique traduisant cette situation est géré par la fonction $f : x \mapsto \dfrac{60x}{x+30}$.
   Que peut-on conjecturer sur $f(x)$ lorsque x prend des valeurs de plus en plus grandes ?

On appelle fonction homographique, toute fonction définie sous la forme :
$f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$;
où $c \neq 0$ et $bc - ad \neq 0$.

Ce modèle mathématique suggère que la vitesse moyenne du cycliste sur les deux trajets s'approche de 60 kmh^{-1} quand x augmente indéfiniment.
On note alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=60$.

Activité 2

Soit f la fonction définie sur $]1,+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$.

1. Recopier et compléter le tableau de valeurs suivant :

x	2	6	11	101	$1+10^3$	$1+10^6$	$1+10^{12}$
f(x)							

2. Vérifier que $f(x) < 10^{-20}$ pourvu que $x > 1+10^{20}$.

Plus généralement on a :
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*, 0 < f(x) < 10^{-n}$ pourvu que $x > 1+10^{n}$.

On dit alors que **la fonction *f* admet pour limite 0 en +∞.** On écrit : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x-1}=0$

Activité 3

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ par $f(x)=\dfrac{2x+1}{x-1}$.

1. Vérifier que pour tout $x\in\mathbb{R}\setminus\{1\}, f(x)=2+\dfrac{3}{x-1}$.
2. Expliquer alors que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=2$.

Retenons :

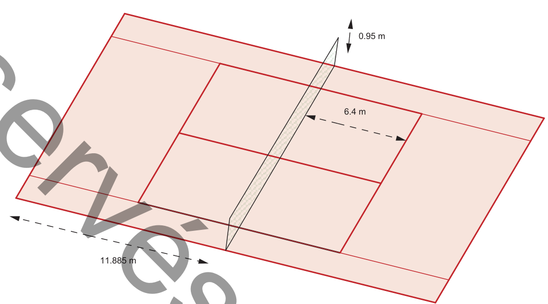
Soit une fonction homographique $f: x\mapsto \dfrac{ax+b}{cx+d}$.

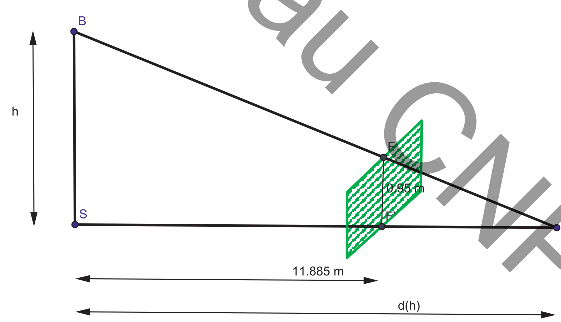
Alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\dfrac{a}{c}$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\dfrac{a}{c}$.

Activité 4

Une balle de tennis est frappée au service.
La distance séparant la ligne de service au point d'impact de la balle est modélisée suivant l'expression $d(h)=\dfrac{11,885h}{h-0,95}$, en fonction de la hauteur h de la frappe à partir du sol. Le réel 11,885 désigne la longueur du rectangle de service et 0,95 est la hauteur du filet.
Si $d(h)>11.885+6.4$, la balle est déclarée « out ».
La frappe de la balle est schématisée suivant la figure ci-contre.

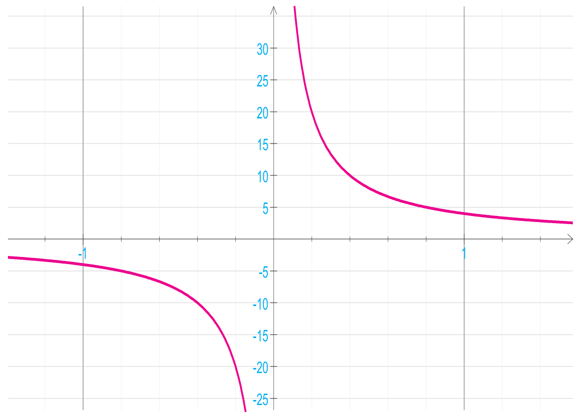
1. Donner quelques valeurs de h pour lesquelles $d(h)<18.285$.
2. Que se passe-t-il lorsque la hauteur de la frappe est assez proche de 0.95 ? Expliquer.





Activité 5

On donne ci-contre la représentation graphique de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \frac{2}{x}$.



On s'intéresse dans cette activité au comportement de f(x) lorsque x s'approche de 0.

1. Déterminer graphiquement l'ensemble des réels x vérifiant :
   a) $f(x) > 20$.
   b) $f(x) < -20$.
2. Vérifier que si $0 < x < 2\times10^{-6}$ alors $f(x) > 10^{6}$ et que si $-2\times10^{-6} < x < 0$ alors $f(x) < (-10^{6})$.

Plus généralement on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

Si $0 < x < 2\times10^{-n}$ alors $\frac{2}{x} > 10^{n}$ et si $-2\times10^{-n} < x < 0$, alors $\frac{2}{x} < \left(-10^{n}\right)$.

On dit alors que la fonction $f : x \mapsto \frac{2}{x}$ admet pour limite $+\infty$ à droite en 0 et pour limite $-\infty$ à gauche en 0. On écrit : $\lim\limits_{x\to0^+} \frac{2}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to0^-} \frac{2}{x} = -\infty$

Activité 6

1. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}\setminus\{3\}$ par $f(x) = \frac{2}{x-3}$.

   Pour étudier le comportement de f au voisinage de 3, posons x = 3 + h.
   a) Expliquer que si x s'approche de 3 alors h s'approche de 0.
   b) Justifier alors que $\lim\limits_{x\to3^+} f(x) = \lim\limits_{h\to0^+} \frac{2}{h} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to3^-} f(x) = \lim\limits_{h\to0^-} \frac{2}{h} = -\infty$.

2. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}\setminus\{3\}$ par $g(x) = \frac{5-x}{x-3}$.

   a) Vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R}\setminus\{3\}, g(x) = -1 + \frac{2}{x-3}$.
   b) Expliquer alors que $\lim\limits_{x\to3^+} g(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to3^-} g(x) = -\infty$.

Activité 7

Soit la fonction homographique $h : x \mapsto \dfrac{2x-3}{x+2}$.

On note $n(x) = 2x - 3$ et $d(x) = x + 2$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de h.
2. a) Etudier le signe de d(x).
   b) Calculer n(-2) et préciser son signe.
3. Justifier que $\lim\limits_{x \to -2^-} h(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -2^+} h(x) = -\infty$.

Soit une fonction homographique $f : x \mapsto \dfrac{ax+b}{cx+d}$.

On admet que :

Si $c > 0$ et $bc - ad > 0$ alors $\lim\limits_{x \to \left(-\frac{d}{c}\right)^+} f(x) = +\infty$ $\lim\limits_{x \to \left(-\frac{d}{c}\right)^-} f(x) = -\infty$.

Si $c > 0$ et $bc - ad < 0$ alors $\lim\limits_{x \to \left(-\frac{d}{c}\right)^+} f(x) = -\infty$ $\lim\limits_{x \to \left(-\frac{d}{c}\right)^-} f(x) = +\infty$

Si $c < 0$ et $bc - ad > 0$ alors $\lim\limits_{x \to \left(-\frac{d}{c}\right)^+} f(x) = +\infty$ $\lim\limits_{x \to \left(-\frac{d}{c}\right)^-} f(x) = -\infty$

Si $c < 0$ et $bc - ad < 0$ alors $\lim\limits_{x \to \left(-\frac{d}{c}\right)^+} f(x) = -\infty$ $\lim\limits_{x \to \left(-\frac{d}{c}\right)^-} f(x) = +\infty$

Activité 8

Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer son ensemble de définition D_f et ses limites aux bornes de D_f.

a) $f_1 : x \mapsto \dfrac{x+2}{2x-4}$

b) $f_2 : x \mapsto \dfrac{x+1}{3-x}$

c) $f_3 : x \mapsto \dfrac{x-3}{2x-1}$

d) $f_4 : x \mapsto \dfrac{2x-3}{2-3x}$

III) Interprétations graphiques

Activité 1

Soit les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\frac{1}{2}x^2$ et $g(x)=x^3$.

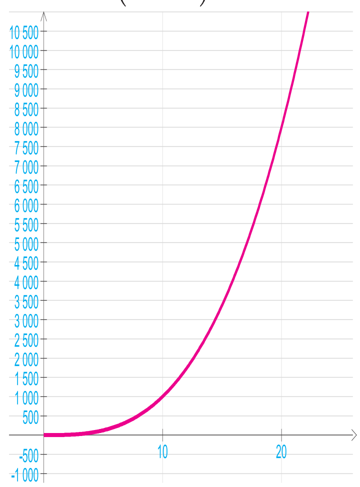
On désigne par $\mathscr{P}$ la parabole représentant f dans un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

1) Tracer la parabole $\mathscr{P}$.
2) a) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

   b) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$.
3) On donne ci-contre la branche de la courbe représentative de g correspondante à l'intervalle $[0,+\infty[$.

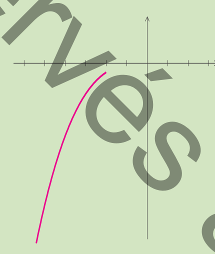
   a) Comparer cette branche de la courbe de g à celle de $\mathscr{P}$ lorsque x tend vers $+\infty$.

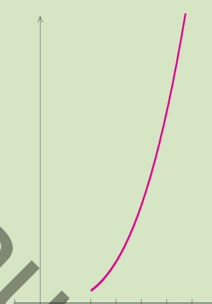
   b) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{g(x)}{x}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{x}$.



Retenons :

Soit f une fonction polynôme de degré supérieur ou égal à 2.
La courbe représentative de f admet une branche parabolique de direction celle de $\left(O,\vec{j}\right)$ au voisinage de $-\infty$ et $+\infty$.





Activité 2

Pour tous réels non nuls a et b, on considère les fonctions f_a et g_b définies sur $\mathbb{R}$ par :

$f(x)=ax^2$ et $g(x)=bx^3$. On désigne par C_a et Γ_b les courbes représentatives respectives de f_a et g_b dans un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

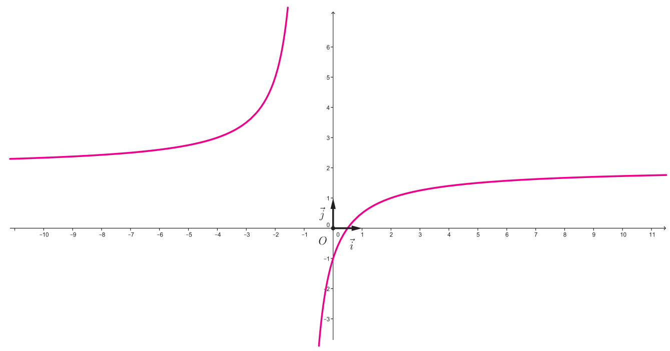
1) a) Déterminer suivant le signe de a, $\lim_{x \to -\infty} f_a(x)$ et $\lim_{x \to +\infty} f_a(x)$.

   b) Tracer une esquisse de la branche parabolique de C_a au voisinage de $-\infty$ et $+\infty$, suivant le signe de a.

2) Reprendre la question 1) pour la fonction g_b.

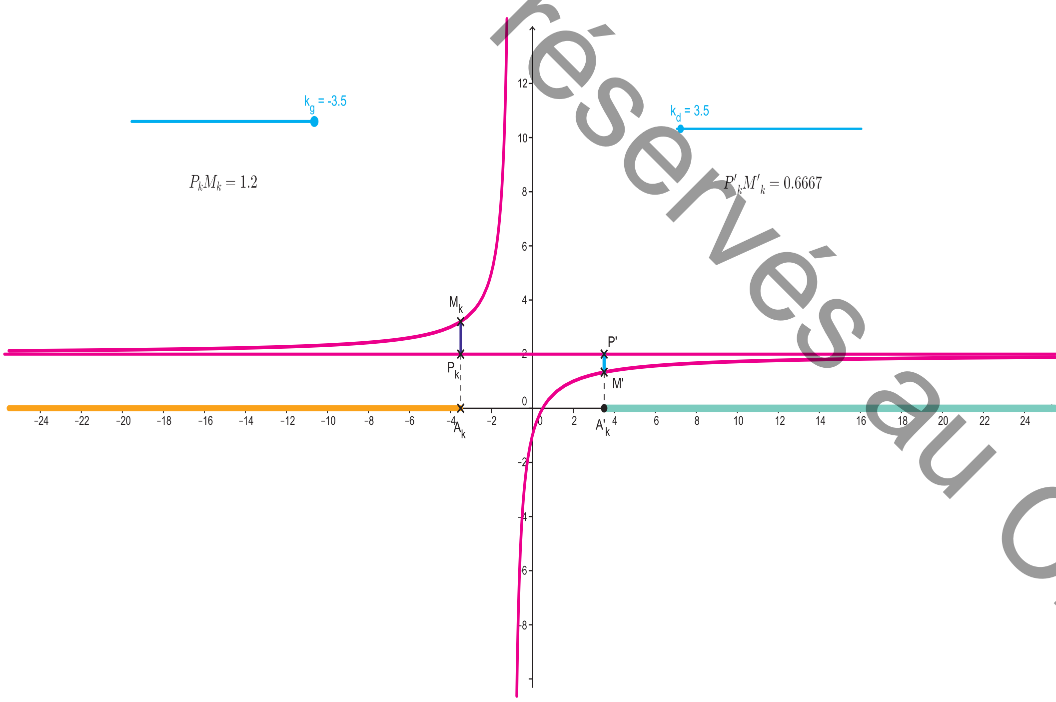
Activité 3

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ par $f(x) = \dfrac{2x-1}{x+1}$ dont la courbe représentative est ci-contre donnée.



On se propose dans cette activité d'interpréter graphiquement la limite de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

1) Ouvrir le fichier **Asymptote_H.ggb**.



2) Soit D la droite d'équation $y = 2$.

Pour tout réel $k \in]-\infty;-1[$, on associe les points $A_k(k,0), M_k(k, f(k))$ et $P_k(k;2)$.

a) Déplacer le curseur **k_g** pour faire varier les valeurs du réel *k*, abscisse du point A_k.

b)Quelle conjecture peut-on émettre sur la limite de la distance P_kM_k lorsque *k* tend vers $-\infty$?

c) Justifier que pour tout $k \in]-\infty;-1[$, $P_kM_k = -\dfrac{3}{k+1}$. Justifier alors votre conjecture.

d) Que peut-on conclure quant au comportement de la courbe C par rapport à D ?

3) Pour tout réel $k \in]-1;+\infty[$, on associe les points $A'_k(k,0), M'_k(k, f(k))$ et $P'_k(k;2)$.

a) Déplacer le curseur **k_d** pour faire varier les valeurs du réel *k*, abscisse du point A'_k.

b) Montrer que pour tout $k \in]-1;+\infty[$, $P'_k M'_k = \dfrac{3}{k+1}$. En déduire $\lim\limits_{k\to+\infty} \dfrac{3}{k+1}$.

d) Conclure.

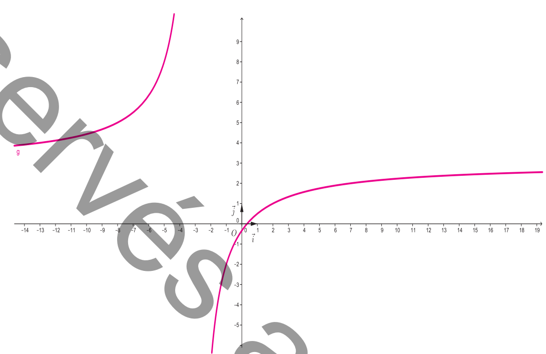
Activité 4

Dans le plan muni d'un repère orthogonal $(O,\vec{i},\vec{j})$, on considère la courbe représentative C de la fonction *g* définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-3\}$ par

$$g(x) = \frac{3x-1}{x+3}.$$

On se propose dans cette activité d'interpréter graphiquement la limite de *g* à gauche et à droite en -3.

En chargeant le fichier Asymptote_V.ggb, on obtient la figure suivante où Δ est la droite d'équation $x = -3$.

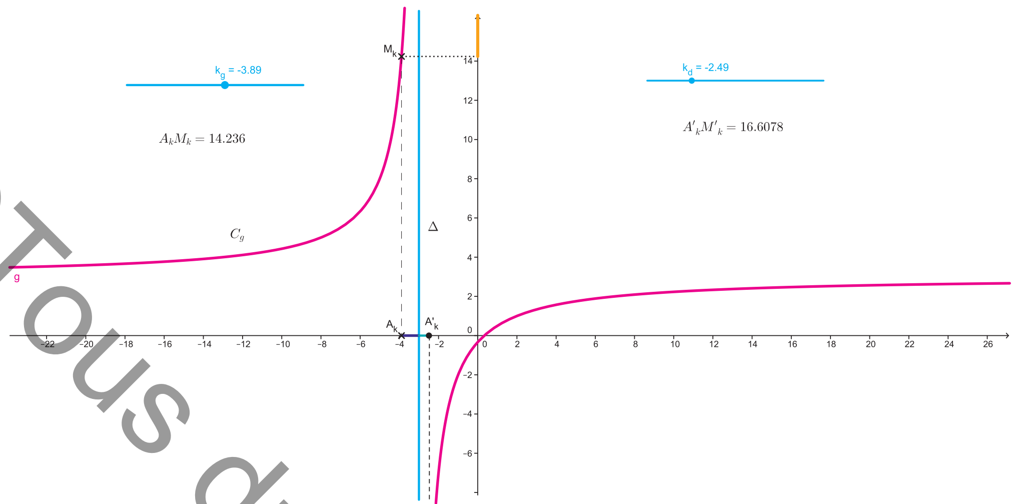


1) Pour tout réel $k \in]-5;-3[$, on associe les points $A_k(k,0)$ et $M_k(k, g(k))$.

a) Déplacer le curseur **k_g** pour faire varier les valeurs du réel *k*, abscisse du point A_k.

b)Justifier que $\lim\limits_{k\to-3^-} A_kM_k = +\infty$.

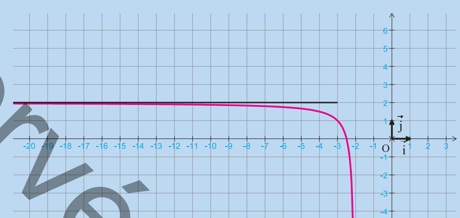
d) Interpréter alors le comportement de la courbe C_g par rapport à la droite Δ .



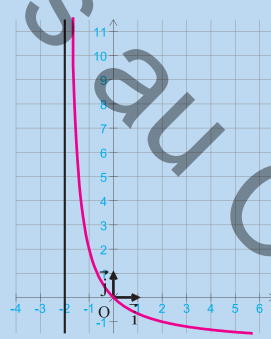
2) a) Pour $k \in \left]-3;-1\right[$, déplacer le curseur $\mathbf{k_d}$ pour varier la position du point A'_k.
b)Justifier que $\lim\limits_{k \to -3^+} A'_k M'_k = +\infty$. En déduire le comportement de la courbe C_g par rapport à la droite Δ .

Définitions :

Le plan est rapporté à un repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.



1) Soit ℓ un réel et f une fonction telle que
$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \ell$ $\left(\text{resp } \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell \right)$.
La droite D d'équation $y = \ell$ est appelée asymptote horizontale à la courbe représentative de f au voisinage de $-\infty$ $(\text{resp} + \infty)$.



2) Soit x_0 un réel et f une fonction vérifiant au moins une des limites suivantes :
$\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = +\infty$,
$\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = -\infty$ ou $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = +\infty$.
La droite D d'équation $x = x_0$ est appelée asymptote verticale à la courbe représentative de f.

Activité 5

Recopier et compléter le tableau suivant :

Fonctions	Limites	Interprétation graphique
f	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-3$	
g		La droite d'équation $x=-2$ est asymptote à C_g
h		La droite d'équation $y=2$ est asymptote à C_h
k	$\lim\limits_{x\to 2^+} k(x)=-\infty$	

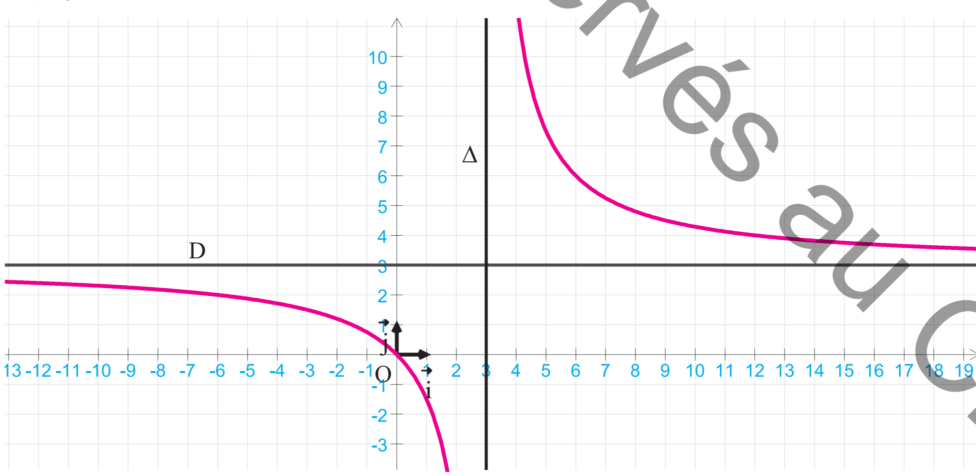
Activité 6

Déterminer les asymptotes éventuelles à chacune des courbes représentatives des fonctions suivantes :

$a)\ f(x)=\dfrac{x-1}{2x+1}$ $\quad b)\ g(x)=2\dfrac{x+2}{2x-3}$ $\quad c)\ h(x)=-\dfrac{3x}{x+1}$ $\quad d)\ k(x)=2+\dfrac{2}{x-2}$

Activité 7

La représentation graphique suivante est celle d'une fonction f qui admet pour asymptotes les droites $(D): y=3$ et $\Delta : x=3$

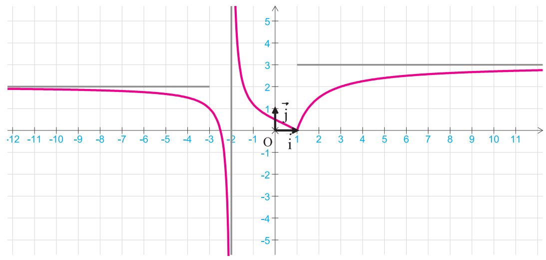


Déterminer graphiquement $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to3^-} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to3^+} f(x)$.

EXERCICES RÉSOLUS

Enoncé 1

La représentation graphique ci-contre est celle d'une fonction f.



A l'aide d'une lecture graphique, déterminer : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim\limits_{\substack{x\to-2\\x<-2}} f(x)$, $\lim\limits_{\substack{x\to-2\\x>-2}} f(x)$, $\lim\limits_{x\to1} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

En déduire les asymptotes éventuelles à la courbe de f.

Corrigé 1

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=2$, $\lim\limits_{\substack{x\to-2\\x<-2}} f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{\substack{x\to-2\\x>-2}} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to1} f(x)=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=3$

Ansi la courbe représentative de f admet une asymptote :

- horizontale d'équation $y = 2$ au voisinage de $-\infty$,
- verticale d'équation $x = -2$,
- horizontale d'équation $y = 3$ au voisinage de $+\infty$.

Enoncé 2

On considère les fonctions P et Q définies par $P(x)=x^2+x-6$ et $Q(x)=2x^2-3x-2$.

1) a) Résoudre chacune des équations $P(x)=0$ et $Q(x)=0$.

   b) En déduire une factorisation de $P(x)$ et $Q(x)$.

2) Soit f la fonction définie par $f(x)=\dfrac{x^2+x-6}{2x^2-3x-2}$.

   a) Déterminer l'ensemble de définition de f.

   b) Déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to2} f(x)$.

   c) Déterminer $\lim\limits_{\substack{x\to\frac{-1}{2}\\x<\frac{-1}{2}}} f(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x\to\frac{-1}{2}\\x>\frac{-1}{2}}} f(x)$.

Corrigé 2

1) a) $x^2+x-6=0$. $\Delta=1^2+24=25$. D'où $x'=\dfrac{-1-5}{2}=-3$ et $x''=\dfrac{-1+5}{2}=2$.

$2x^2-3x-2=0$. $\Delta=(-3)^2+16=25$. D'où $x'=\dfrac{3-5}{4}=\dfrac{-1}{2}$ et $x''=\dfrac{3+5}{4}=2$.

b) $P(x)=(x-2)(x+3)$ et $Q(x)=2(x-2)\left(x+\frac{1}{2}\right)$.

2) a) f est définie si et seulement si $2x^2-3x-2\neq 0$, équivaut à $x\neq\frac{-1}{2}$ et $x\neq 2$.

Ainsi l'ensemble de définition D_f de f est $\left]-\infty,\frac{-1}{2}\right[\cup\left]\frac{-1}{2},2\right[\cup]2,\infty[$.

b) On remarque que pour tout $x\in D_f$, $f(x)=\dfrac{(x-2)(x+3)}{2(x-2)\left(x+\frac{1}{2}\right)}=\dfrac{x+3}{2x+1}$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x+3}{2x+1}=\dfrac{1}{2}$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+3}{2x+1}=\dfrac{1}{2}$ et $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x+3}{2x\ \ 1}=1$.

c) On étudie d'abord le signe de $2x+1$ et d'en déduire celui de $\dfrac{1}{2x+1}$ sur $\left]-\infty,\frac{-1}{2}\right[\cup\left]\frac{-1}{2},+\infty\right[$.

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
$2x+1$		$-$	0	$+$	
$\frac{1}{2x+1}$		$-$	||	$+$	

Lorsque $x\in\left]-\infty,\frac{-1}{2}\right[$ et tend vers $-\frac{1}{2}$, $2x+1$ tend vers 0 tout en restant négatif, donc $\dfrac{1}{2x+1}$ tend vers $-\infty$. De même, si $x\in\left]\frac{-1}{2},+\infty\right[$ et tend vers $-\frac{1}{2}$, $2x+1$ tend vers 0 tout en restant positif, donc $\dfrac{1}{2x+1}$ tend vers $+\infty$. D'autre part $\lim\limits_{x\to\frac{-1}{2}} x+3=\dfrac{5}{2}$.

D'où $\lim\limits_{\substack{x\to\frac{-1}{2}\\ x<\frac{-1}{2}}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to\frac{-1}{2}\\ x<\frac{-1}{2}}}\dfrac{x+3}{2x+1}=-\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to\frac{-1}{2}\\ x>\frac{-1}{2}}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to\frac{-1}{2}\\ x>\frac{-1}{2}}}\dfrac{x+3}{2x+1}=+\infty$.

LE BILAN

- Soit f une fonction polynôme de degré inférieur ou égal à 3.
  - La limite de f en l'infini est celle de son monôme du plus haut degré.
  - La courbe représentative d'une polynôme de degré supérieur ou égal à 2 admet une branche parabolique de direction celle de l'axe des ordonnées au voisinage de $-\infty$ et $+\infty$.
- Soit f la fonction homographique définie par

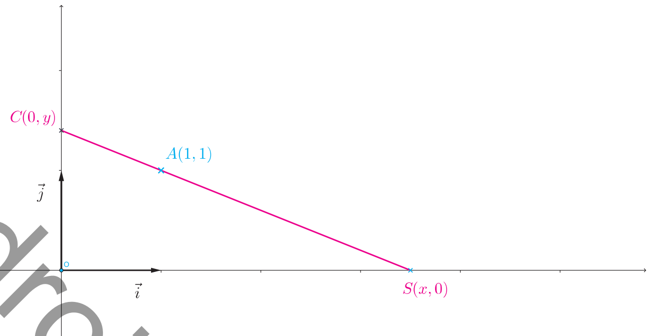
$$f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}, c\neq 0 \text{ et } bc-ad\neq 0$$

  - $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\frac{a}{c}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\frac{a}{c}$. La courbe représentative de f dans un repère $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ admet une asymptote horizontale d'équation $y=\frac{a}{c}$ au voisinage de $-\infty$ et $+\infty$.
  - $\lim\limits_{x\to\left(-\frac{d}{c}\right)^{+}} f(x)=\pm\infty$ ett $\lim\limits_{x\to\left(-\frac{d}{c}\right)^{-}} f(x)=\pm\infty$. La courbe représentative de f dans un repère $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ admet une asymptote verticale d'équation $x=-\frac{d}{c}$.

MOBILISER SES COMPÉTENCES

Situation 1

Une source de rayon laser S placée sur l'axe $(O,\vec{i})$ atteint une cible C placée sur l'axe $(O,\vec{j})$ en passant par le point A(1,1) comme l'indique la figure suivante.



Déterminer la position du point C lorsque x=2.
Déterminer la position du point S lorsque y=2.
Vers quelle position extrême le point C s'approche-t-il lorsque x devient très grand.

Stratégie de résolution

Exprimer y en fonction de x

Situation 2

On considère les fonctions f et g respectivement définies sur $\mathbb{R}^*$ et $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ par

$f(x)=\dfrac{x+1}{x}$ et $g(x)=\dfrac{x}{x+1}$

1) a) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to 1} g(x)$.

b) En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{f(x)+1}$.

2) a) Calculer $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{2}} f(x)$, $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x>-1}} g(x)$, $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x<-1}} g(x)$.

b) En déduire $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{2}} \dfrac{f(x)}{f(x)+1}$

3) Simplifier $g\big(f(x)\big)$ et retrouver les limites de 1) b) et 2) b) .

S'AUTO-ÉVALUER

QCM

Pour chacune des questions suivantes, quatre réponses sont proposées parmi lesquelles une seule est correcte. Indiquer la lettre qui lui correspond.

		A	B	C	D
1	Si f est la fonction définie par $f : x \mapsto x^3$ alors	$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$	$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$	$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$	$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=3$
2	Si f est la fonction définie par $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ alors	$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$	$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$	$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$	$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=1$
3	Si f est la fonction définie par $f : x \mapsto \frac{1}{2x-3}$ alors	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\frac{-1}{3}$	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$
4	Si f est la fonction définie par $f : x \mapsto \frac{1}{x-3}$ alors	$\lim\limits_{x\to3^-} f(x)=\frac{-1}{3}$	$\lim\limits_{x\to3^-} f(x)=-\infty$	$\lim\limits_{x\to3^-} f(x)=+\infty$	$\lim\limits_{x\to3^-} f(x)=0$
5	Si f est la fonction définie par $f : x \mapsto \frac{-2}{2x-4}$ alors	$\lim\limits_{x\to2^+} f(x)=-2$	$\lim\limits_{x\to2^+} f(x)=0$	$\lim\limits_{x\to2^+} f(x)=-\infty$	$\lim\limits_{x\to2^+} f(x)=+\infty$
6	Si f est la fonction définie par $f : x \mapsto \frac{3}{x}-4$ alors	$\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=-\infty$	$\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=+\infty$	$\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=3$	$\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=-4$

Vrai-Faux

Indiquer si les propositions suivantes sont vraies ou fausses ou on ne peut pas décider.

1) La courbe de la fonction $f : x \mapsto x^3+1$ admet une asymptote d'équation $y = 1$.
2) La courbe de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{4-2x}$ admet une asymptote d'équation $x = 2$.
3) La courbe de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{3}{x}+4$ admet une asymptote d'équation $y = 0$.
4) Soit a et b deux réels et f la fonction définie par $f(x)=\dfrac{x+b}{ax-2}$. On note par C sa courbe représentative dans un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

   a) Pour toutes valeurs de a et b, C admet une asymptote verticale.
   b) Pour toutes valeurs de a et b, C admet une asymptote horizontale.
   c) Si $a>0$ et $b>0$ alors $\lim\limits_{x\to\frac{2}{a}^+} f(x)=+\infty$.

EXERCICES D'ENTRAINEMENT

1

Calculer chacune des limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to-\infty} 17x$; $\lim\limits_{x\to-\infty} 1-x$; $\lim\limits_{x\to+\infty} x-2$

$\lim\limits_{x\to-\infty} 141-3x$; $\lim\limits_{x\to+\infty} -\frac{1}{2}x+10^{10}$

2

Déterminer les limites en $-\infty$ et en $+\infty$ de chacune des fonctions suivantes :

$a)\ f : x \mapsto 2x^2 - x + 2$; $b)\ g : x \mapsto -x^2 + 3x + 1$

$c)\ h : x \mapsto x^3 - x$; $d)\ k : x \mapsto x^2 - 3x^3 - x + 3$

3

Déterminer chacune des limites suivantes :

$a)\ \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{2}{x-1}$; $b)\ \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2x-1}{x+1}$

$c)\ \lim\limits_{x\to+\infty} 1-\frac{2}{x-3}$; $d)\ \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1-3x}{x-3}$

4

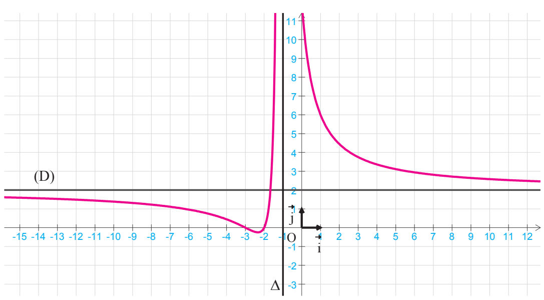
Déterminer chacune des limites suivantes :

$a)\ \lim\limits_{x\to-\infty} x^3 - \frac{1}{x+1}$; $b)\ \lim\limits_{x\to+\infty} x^2 + 2x - 1 + \frac{2x-1}{x+1}$

$c)\ \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x+3} - \frac{2}{x-3}$

5

Soit f la fonction dont la courbe représentative C_f est ci-dessous donnée.



Les droites (D) et Δ d'équations respectives $y = 2$ et $x = -1$ sont asymptotes à C_f.

Déterminer chacune des limites suivantes :

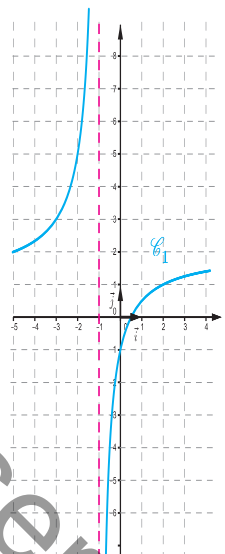
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-1^-} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x)$

6

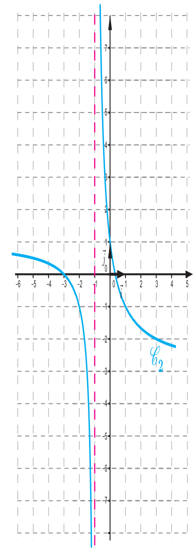
Retrouver le graphique correspondant à chacune des fonctions suivantes :

$f : x \mapsto \begin{cases} \frac{x-1}{x+1} & \text{si } x < -1 \\ \frac{4}{x+1} & \text{si } x > -1 \end{cases}$; $g : x \mapsto \begin{cases} \frac{3-x}{x+1} & \text{si } x < -1 \\ \frac{2x-3}{x+1} & \text{si } x > -1 \end{cases}$;

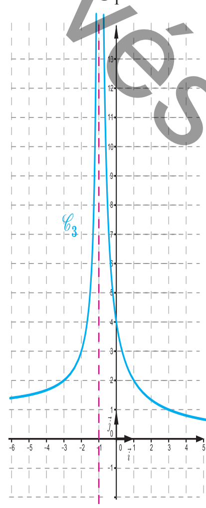
$h : x \mapsto \begin{cases} \frac{1-3x}{x+1} & \text{si } x < -1 \\ \frac{3+x}{x+1} & \text{si } x > -1 \end{cases}$; $k : x \mapsto \begin{cases} \frac{x-3}{x+1} & \text{si } x < -1 \\ \frac{2x-1}{x+1} & \text{si } x > -1 \end{cases}$



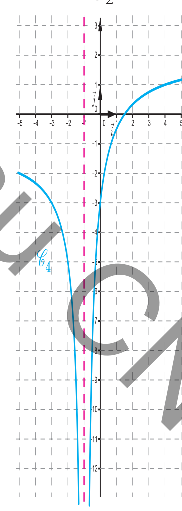
C_1



C_2



C_3



C_4

EXERCICES D'ENTRAINEMENT

7

Déterminer les asymptotes éventuelles à chacune des représentations graphiques des fonctions suivantes :

$a)\ f : x \mapsto \dfrac{x+1}{3x-6}$ $\qquad b) g : x \mapsto 3\dfrac{x-1}{3x-2}$

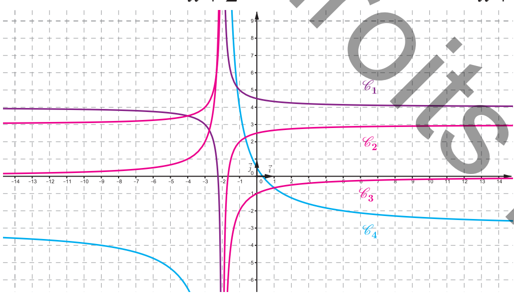
$c)\ h : x \mapsto -\dfrac{2x-4}{x+1}$ $\qquad d) k : x \mapsto 3+\dfrac{1}{x-1}$

8

Associer chacune des fonctions suivante à sa représentation graphique :

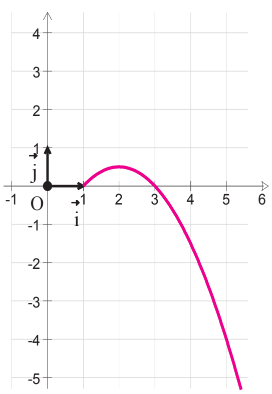
$a)\ f : x \mapsto -\dfrac{2}{x+2}$ $\qquad b) g : x \mapsto \dfrac{2-x}{x+2}$

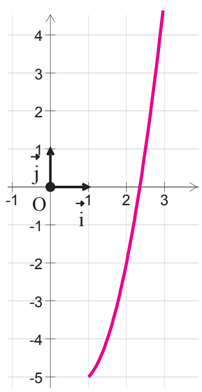
$c)\ h : x \mapsto \dfrac{2-3x}{x+2}$ $\qquad d) k : x \mapsto \dfrac{1}{x+2}-2$



9

Associer chacune des branches paraboliques au voisinage de $+\infty$ à la fonction polynôme correspondante :

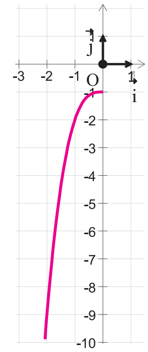


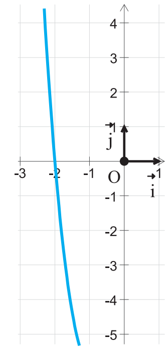


$a)\ f : x \mapsto 2x^2-3x-4$ $\qquad b)\ g : x \mapsto 2x-\dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{3}{2}$

10

Associer chacune des branches paraboliques au voisinage de $-\infty$ la fonction polynôme correspondante :





$a)\ f : x \mapsto x^3-1$ $\qquad b)\ g : x \mapsto -x^3+x^2+4x-4$

11

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=ax^3+2x^2+1$ et vérifiant $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

1) Montrer que $a \neq 0$
2) Donner le signe de a.

12

Soit la fonction $f : x \mapsto \dfrac{2x-3}{x-1}$.

1) a) Déterminer l'ensemble de définition D_f de f.
b) Déterminer les limites de $f(x)$ aux bornes de D_f

2) a) Justifier que pour tout $x \in D_f$,

$$f(x)=2-\frac{1}{x-1}.$$

b) Retrouver alors $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

13

On considère la fonctions $f : x \mapsto \dfrac{2x+1}{x-1}$ et C sa courbe représentative dans un repère orthonormé

1) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2) Calculer $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)$.Interpréter le résultat.

14

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{ax+1}{x-b}$ et C sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

Déterminer a et b sachant que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2$ et que la droite d'équation $x = 1$ est une asymptote à la courbe C.

15

Soit $f : x \mapsto \dfrac{ax+1}{2x-b}$ et C sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

Déterminer a et b sachant que les droites $y = 1$ et $x = 1$ sont deux asymptotes à C.

16

Soit la fonction $f : x \mapsto \dfrac{2x^2+3x-1}{x+1}$.

On note $u(x) = 2x^2+3x-1$ et $v(x) = \dfrac{1}{x+1}$.

1) Déterminer $\lim\limits_{x \to -\infty} u(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} v(x)$.

2) a) Montrer que pour tout $x \neq 0, f(x) = \dfrac{2x+3-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}$

   b) Déterminer $\lim\limits_{x \to -\infty} 2x+3-\dfrac{1}{x}$ et $\lim\limits_{x \to \infty} 1+\dfrac{1}{x}$.

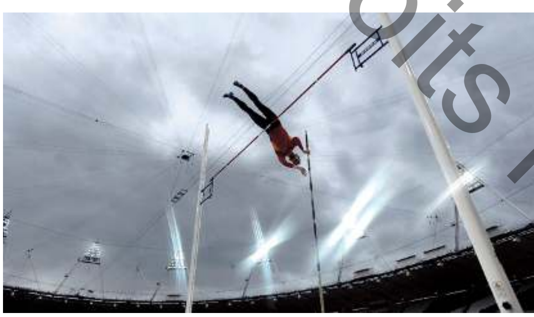
   c) Que peut-on déduire sur $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$?

3) Procéder de même pour déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

«Dans tous les sports, vous pouvez voir que les records sont en train de plafonner», déclare Steve Haake, directeur du Centre pour la recherche en ingénierie sportive de l'Université britannique de Sheffield Hallam

Certes, des athlètes continuent encore de battre des records, mais les marges de progression se réduisent énormément.

Ainsi, le record du saut en longueur masculin tenu depuis 1991, celui de la perche masculin remonte à 1994 et les performances en natation sur courte distance sont réparties à la baisse depuis l'interdiction des combinaisons intégrales spéciales en 2010

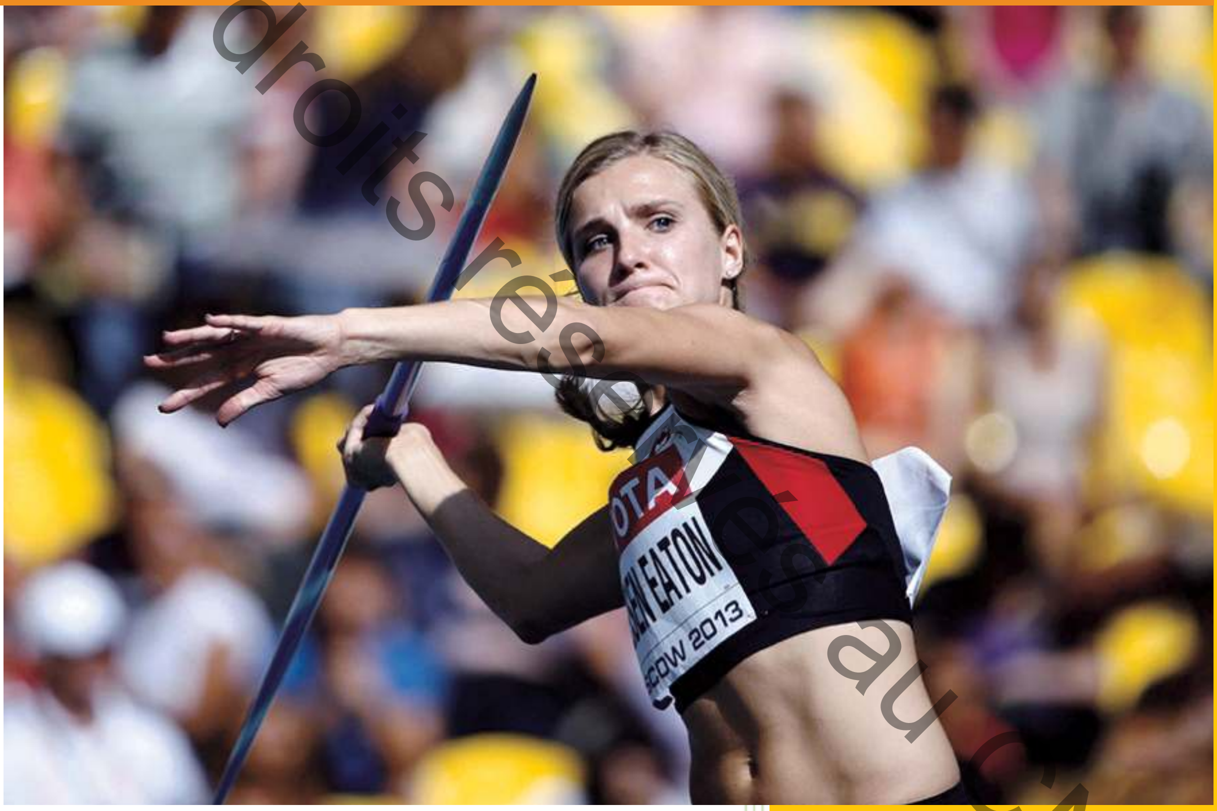


Selon ses calculs, les athlètes ont atteint 99% de leur potentiel dans les limites naturelles de la physiologie humaine.

D'ici 2027, la moitié des 147 disciplines sportives étudiées auront touché leur limite, estime-t-on et les records ne pourront pas être améliorés de plus de 0,05% au-delà de cette date, indique le modèle mathématique conçu par Geoffroy Berthelot.

Chapitre 4

Dérivation et applications

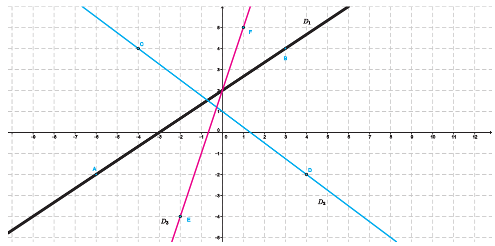


Sommaire

1) Nombre dérivé
2) Interprétation graphique du nombre dérivé
3) Fonction dérivée
4) Applications de la dérivation

Pour démarrer

Activité 1



Dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$, on a tracé les droites D_1, D_2, D_3.
Par lecture graphique, déterminer les coefficients directeurs de chacune des droites, D_1, D_2, D_3.

Activité 2

Construire dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ les droites Δ_1, Δ_2 et Δ_3 de coefficients directeurs respectifs $-1, 2$ et $\frac{2}{3}$ et passant toutes par le point $A(1,1)$.

Activité 3

Etudier le signe de chacune des fonctions suivantes :

a) $f : x \mapsto 2x+3$.

b) $g : x \mapsto 1-3x$

c) $h : x \mapsto x^2-3x-4$

d) $k : x \mapsto -2x^2+x-1$

I) Nombre dérivé

Activité 1

Lors d'une course contre la montre, la distance parcourue d'un cycliste sur un trajet plat, exprimé en km est donné selon l'équation horaire suivante : $d(t)=0,02t^2$ où t est exprimé en mn.

1. Calculer la distance parcourue au bout de :
   a) 30 mn.
   b) 60 mn.
2. Calculer la vitesse moyenne du cycliste entre les instants $t_1 = 30$ mn et $t_2 = 60$ mn.
3. Déterminer la vitesse moyenne du cycliste sur chacun des intervalles de temps [30,45] et [30,35].
4. Soit h un réel non nul.

   a) Vérifier que $\dfrac{d(30+h)-d(30)}{h}=0,02(60+h)$.

   b) En déduire $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{d(30+h)-d(30)}{h}$.

La vitesse instantanée d'un mobile à l'instant t_0 est la limite lorsque h tend vers zéro de la vitesse moyenne de ce mobile entre les instants t_0 et t_0+h.

Activité 2

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^2+1$.

1. a) Justifier que pour tout $x\in\mathbb{R}\setminus\{2\}$, $\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=x+2$.

   b) En déduire $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}$.

2. Déterminer $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h}$. Conclure.

Définition:

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et a un réel de I.
On dit que f est dérivable en a, s'il existe un nombre réel ℓ, tel que :

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\ell \text{ ou encore } \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\ell$$

Le réel ℓ, est alors appelé le nombre dérivé de f en a et il est noté $f'(a)$.

Activité 3

1) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^2-3$.

   a) Montrer que pour tout réel $x\neq 2$, on a $\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=x+2$.

   b) En déduire que f est dérivable en 2 et que $f'(2)=4$.

2) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}\setminus\{3\}$ par $g(x)=\dfrac{1}{x-3}$.

   a) Montrer que pour tout réel $h\neq 0$, on a $\dfrac{g(4+h)-g(4)}{h}=\dfrac{-1}{1+h}$.

   b) En déduire que g est dérivable en 4 et que $g'(4)=-1$.

Activité 4

Montrer que chacune des fonctions suivantes est dérivable en x_0 et déterminer son nombre dérivé en x_0.

a) $f(x)=3x-2; x_0=1.$

b) $g(x)=x^2-2x-3; x_0=-1.$

c) $h(x)=\dfrac{2}{x+1}; x_0=-2.$

d) $k(x)=x^3; x_0=0.$

II) Interprétation graphique du nombre dérivé

Activité 1

On considère la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{1}{x}$.

1. a) Construire dans un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ la courbe représentative C de *f*.

   b) Placer sur C les points *A* et *B* d'abscisses respectives 1 et 3.
   c) Déterminer le coefficient directeur de la droite (*AB*).
2. Pour tout réel $h \in \left]-1,+\infty\right[$, on considère le point $M\left(1+h, f\left(1+h\right)\right)$.

   a) Construire les droites (*AM*) pour $h=1$ et $h=-\dfrac{1}{2}$.

   b) Montrer que le coefficient directeur de la droite (*AM*) est $\dfrac{-1}{1+h}$.

   c) Justifier que $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}=-1$.
3. a) Déterminer l'équation de la droite D passant par A et de coefficient directeur -1.
   b) Construire la droite D.
   c) Que peut-on conclure quant à la position de C et D?

Définition :

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et $a \in I$. On désigne par $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

Si *f* est dérivable en *a* alors la droite D passant par *A*(*a*,*f*(*a*)) et de coefficient directeur *f'*(*a*) s'appelle la droite tangente à $\mathscr{C}$ en *A*.

Activité 2

Déterminer dans chacun des cas suivants le coefficient directeur de la droite tangente à la courbe représentative de la fonction *f* au point d'abscisse x_0.

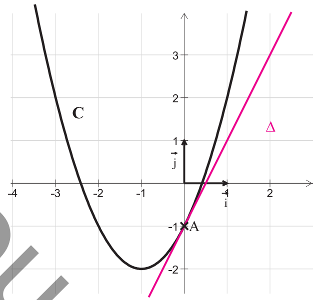
$a)\ f : x \mapsto 2x-1; x_0=\sqrt{2}.$ $\qquad b)\ f : x \mapsto -2x^2+1; x_0=\dfrac{1}{2}.$

$c)\ f : x \mapsto \dfrac{1}{x-1}; x_0=0.$ $\qquad d)\ f : x \mapsto x^3; x_0=2.$

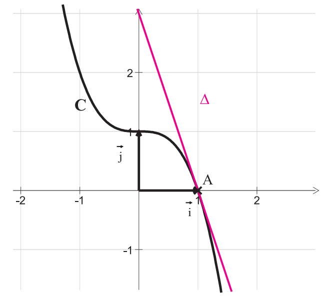
Activité 3

Dans chacun des cas suivants, $\mathscr{C}$ désigne la représentation graphique dans un repère orhonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ d'une fonction *f* dérivable en un réel *a* et Δ est la tangente à $\mathscr{C}$ au point *A*(*a*, *f*(*a*)). Déterminer graphiquement le nombre dérivé de *f* en *a*.

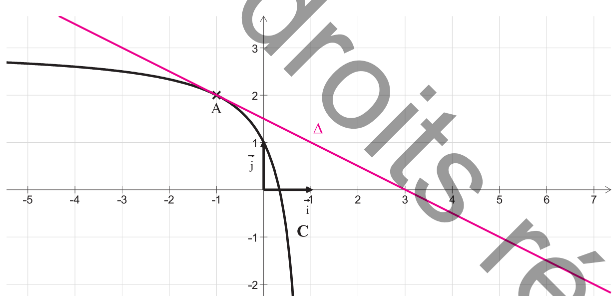
a)



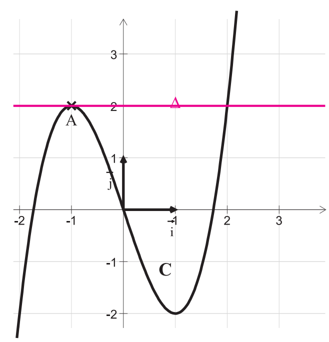
b)



c)



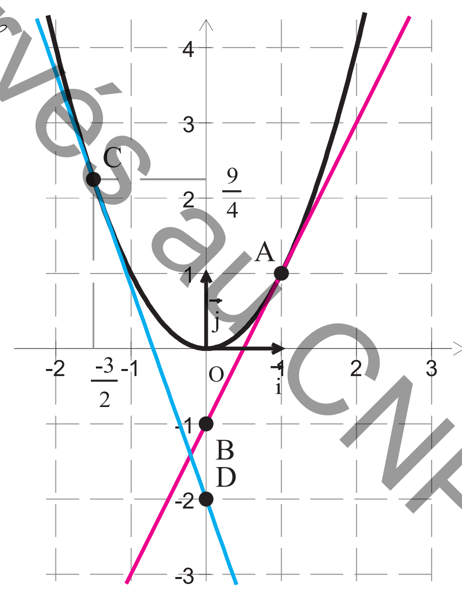
d)



Activité 4

On donne dans la figure ci-contre la courbe $\mathscr{C}$ représentative de la fonction $f : x \mapsto x^2$ et les droites (AB) et (CD), dans un repère du plan.

1) La droite (AB) est-elle tangente à $\mathscr{C}$? Justifier.
2) La droite (CD) est-elle tangente à $\mathscr{C}$? Justifier.



Retenons :

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et $a \in I$. Si f est dérivable en a alors la droite tangente à la courbe représentative C de f en A à pour équation : $y = f'(a)(x-a) + f(a)$

Activité 5

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^2-4x+3$.

Donner une équation de la droite tangente à la courbe représentative de f en chacun des points $A(0,f(0)),B(2,f(2))$ et $C(3,f(3))$.

III) Fonction dérivée

1) Definition

Activité 1

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^2$.

1) Calculer $f'(1)$ et $f'(-3)$.
2) a) Soit x_0 un réel. Justifier que pour tout $x \neq x_0$, on a $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=x+x_0$.

   b) En déduire que f est dérivable en x_0 et que $f'(x_0)=2x_0$.
3) Déterminer $f'\left(\sqrt{2}\right)$.

On dit que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que pour tout réel x, on a $f'(x) = 2x$.

Définition :

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I.
On dit que f est dérivable sur I lorsque pour tout x de I, f est dérivable en x.
Dans ces conditions, la fonction qui à tout x de I associe le nombre dérivé $f'(x)$ est appelée fonction dérivée de f et on la note f' :

$$f' : I \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \mapsto f'(x)$$

LE COURS

On donne dans le tableau suivant les fonctions dérivées de certaines fonctions :

Fonction f	Fonction dérivée f'	Intervalle(s) de dérivabilité
c un réel donné, $x \mapsto c$	$x \mapsto 0$	$\mathbb{R}$
a et b deux réels donnés, $x \mapsto ax+b$	$x \mapsto a$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto x^2$	$x \mapsto 2x$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto x^3$	$x \mapsto 3x^2$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \dfrac{1}{x}$	$x \mapsto \dfrac{-1}{x^2}$	$]-\infty,0[$ et $]0,+\infty[$
b un réel donné, $x \mapsto \dfrac{1}{x-b}$	$x \mapsto \dfrac{-1}{(x-b)^2}$	$]-\infty,b[$ et $]b,+\infty[$

2) OPERATIONS SUR LES FONCTIONS DERIVABLES

Nous admettons les résultats suivants :

Soit u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle ouvert I.

Les fonctions $u+v, ku(k \in \mathbb{R}), uv$ sont dérivables sur I et on a :

Dérivée d'une somme	$(u+v)'=u'+v'$
Dérivée d'un produit par un réel	$(ku)'=ku'$
Dérivée d'un produit	$(uv)'=u'v+uv'$

Si de plus v ne s'annule pas sur I, alors les fonctions $\dfrac{1}{v}$ et $\dfrac{u}{v}$ sont dérivables sur I et on a :

Dérivée de l'inverse	$\left(\dfrac{1}{v}\right)' = -\dfrac{v'}{v^2}$
Dérivée d'un quotient	$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v-uv'}{v^2}$

Activité 1

Déterminer la fonction dérivée de chacune des fonctions suivantes :

a) $f : x \mapsto x^2 + \dfrac{1}{x}$.

b) $g : (x) = \dfrac{2}{3}\left(x^3+x\right)$.

c) $k : x \mapsto (x-1)\left(x^2+x-1\right)$.

e) $k : x \mapsto \left(x^2+x-1\right)^2$.

d) $h : x \mapsto \dfrac{3}{2x-1}, x \in \left]-\infty,\dfrac{1}{2}\right[\cup \left]\dfrac{1}{2},+\infty\right[$

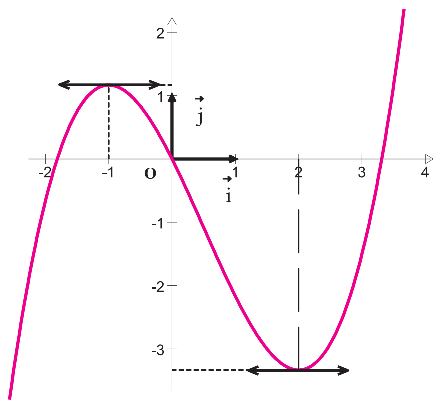
f) $h : x \mapsto \dfrac{2x+1}{x-1}, x \in]-\infty,1[\cup]1,+\infty[$

IV) Applications de la dérivation

1) DERIVEE ET SENS DE VARIATION

Activité 1

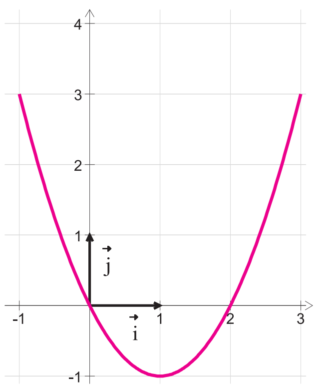
On a représenté dans un repère $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-2x$.



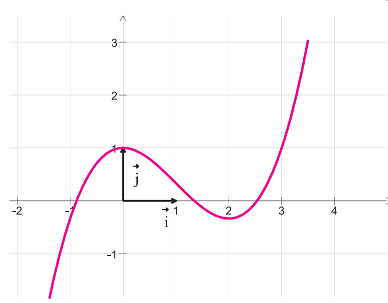
1. Par lecture graphique, donner le sens de variation de f sur chacun des intervalles $\left]-\infty,-1\right[$, $\left]-1,2\right[$ et $\left]2,+\infty\right[$
2. a) Déterminer pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f'(x)$.
   b) Déterminer le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$.
   c) Quel rapport peut-on établir entre les variations de f et le signe de $f'(x)$?

Activité 2

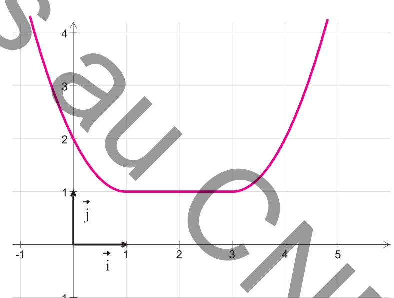
Le plan est muni d'un repère $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$. On donne ci-dessous les représentations graphiques en rouge des fonctions *f, g* et *h* ainsi que celles de leurs fonctions dérivées en bleu.
Identifier pour chaque fonction la courbe de sa fonction dérivée.



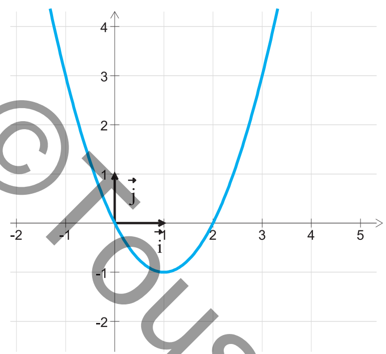
C_f



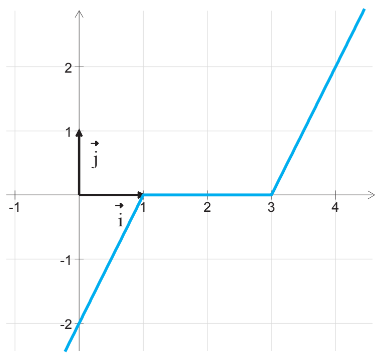
C_g



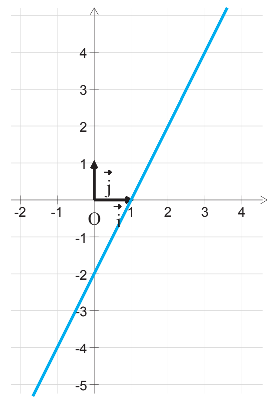
C_h



C_1



C_2



C_3

Théorème (admis)

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.
La fonction f est constante sur I, si et seulement si, pour tout x dans I, $f'(x)$ est nulle.
La fonction f est croissante sur I, si et seulement si, pour tout x dans I, $f'(x)$ est positive.
La fonction f est décroissante sur I, si et seulement si, pour tout x dans I, $f'(x)$ est négative.

Activité 3

Déterminer le sens de variation de chacune des fonctions suivantes :

a) $f : x \mapsto 2x^2 - 8x - 5$

b) $g : x \mapsto x^3 + x^2 - 5x - 2$

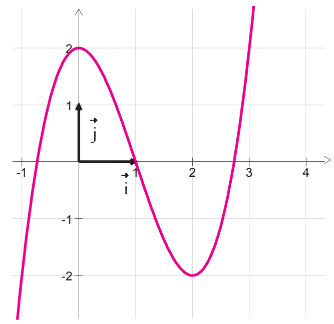
c) $h : (x) = x^3 + x + 1$

d) $k : x \mapsto \dfrac{x}{x-5}, x \in \left]5, +\infty\right[$

e) $h : x \mapsto \dfrac{3x+1}{2x-1}, x \in \left]-\infty, \dfrac{1}{2}\right[$

2) Derivee et extrema

Activité 1



On donne ci-contre la représentation graphique de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^3-3x^2+2$

1) a) Déterminer graphiquement le réel a en lequel f admet un maximum local.
   b) Calculer $f'(a)$.
2) a) Déterminer graphiquement le réel b en lequel f admet un minimum local.
   b) Calculer $f'(b)$.

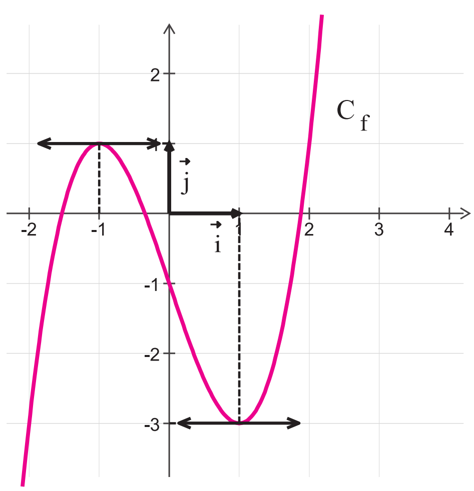
Théorème

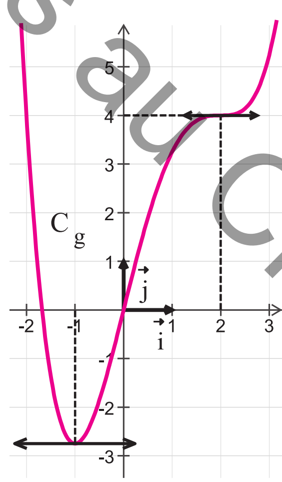
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I et x_0 un réel appartenant à I

Si f admet un extremum en x_0, alors $f'(x_0)=0$.

Activité 2

Le plan est muni d'un repère $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.On donne ci-dessous les représentations graphiques C_f et C_g respectivement des fonctions f et g, dérivables sur $\mathbb{R}$.





1) a) Déterminer graphiquement les réels α et β en lesquels f admet respectivement un minimum et un maximum.
   b) Dresser le tableau de signe de $f'(x)$.
2) Reprendre le travail pour la fonction g.

Théorème

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I et x_0 un réel appartenant à I
Si f' s'annule en x_0 en changeant de signe, alors f admet un extrema local en x_0.

1) Tableau de variation

Le signe de la dérivée d'une fonction, l'étude de ses variations et le calcul des limites aux bornes de son ensemble de définition peuvent être synthétisés dans un tableau, dit Tableau de variation.

Activité 1

Justifier que le tableau ci-dessous :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

est le tableau de variation de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^3 - 3x + 1$

Activité 2

Le tableau suivant est le tableau de variation d'une fonction f.

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$\|$	$-$	
$f(x)$	1	$\searrow$	$-\infty$ $\|$ $+\infty$	$\searrow$	1

1) Laquelle parmi les fonctions suivantes est associée au tableau de variation ci-dessus ?

$a) f : x \mapsto \dfrac{3-x}{x-2}$ $\qquad$ $b) f : x \mapsto \dfrac{x-1}{x-2}$ $\qquad$ $c) f : x \mapsto \dfrac{x-2}{x-3}$

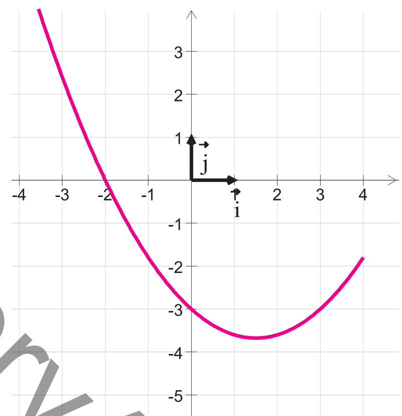
2) Dresser le tableau de variation de la fonction $u : x \mapsto \dfrac{x+1}{x+3}$.

Activité 3

Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 2$. On désigne par C_f sa courbe représentative dans un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

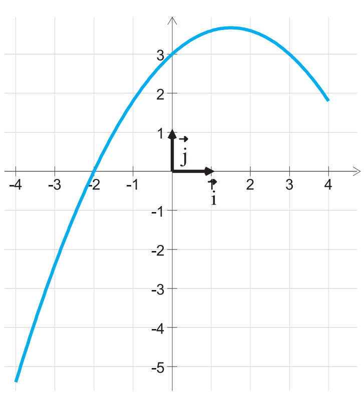
1) Dresser le tableau de variation de *f*.
2) A l'aide du tableau de variation, indiquer en quel(s) point(s) C_f coupe l'axe $(O,\vec{i})$.

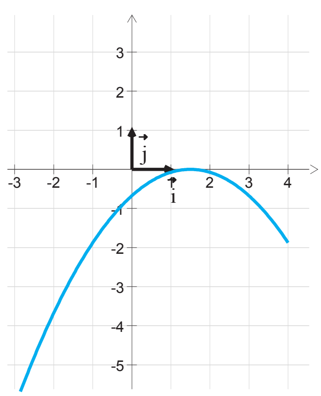
Activité 4

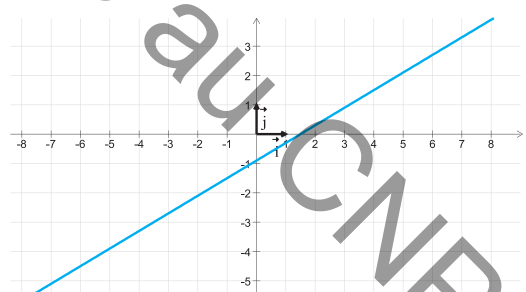


Soit *f* une fonction définie sur [-4 , 4] dont la courbe représentative est donnée ci-contre.

Associer à la fonction *f* la représentation graphique de sa fonction dérivée parmi les courbes suivantes :







EXERCICE RÉSOLU

Enoncé :

Le plan est rapporté à un repère $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$. Soit la fonction $f : x \mapsto x^3 - 3x^2 + 3x - 2$.

On désigne par $\mathscr{C}$ sa courbe représentative.

1) a) Calculer $f'(x)$ puis étudier son signe.
   b) Dresser le tableau de variation de f.
   c) La fonction f admet-elle un extrema local ?
2) Déterminer le point d'intersection de $\mathscr{C}$ avec l'axe $\left(O,\vec{j}\right)$ et donner le coefficient directeur de la tangente en ce point.
3) Vérifier que $\mathscr{C}$ coupe l'axe $\left(O,\vec{i}\right)$ au point d'abscisse 2, puis déterminer l'équation de la tangente à $\mathscr{C}$ en ce point.
4) Déterminer les abscisses des points de $\mathscr{C}$ en lesquels les tangentes ont pour coefficient directeur le réel 6.

Corrigé

1) a) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = 3x^2 - 6x + 3 = 3\left(x-1\right)^2$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) \geq 0$.
   b) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Comme $f'(x) \geq 0$ sur $\mathbb{R}$, alors f est croissante sur $\mathbb{R}$. D'où le tableau de variation de f :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	
f	$-\infty$		$\nearrow$		$+\infty$

   c) Comme f' s'annule uniquement en 1 sans changer de signe, alors f n'admet pas d'extrema.
2) La courbe $\mathscr{C}$ coupe $\left(O,\vec{j}\right)$ en $A\left(0,-2\right)$. La tangente à $\mathscr{C}$ en A a pour équation :
   $y = f'(0)x + f(0) = 3x - 2$.
3) Comme $f(2) = 2^3 - 3\times2^2 + 3\times2 - 2 = 0$, alors $\mathscr{C}$ coupe l'axe $\left(O,\vec{j}\right)$ au point $B\left(2,0\right)$.
   La tangente à $\mathscr{C}$ en A a pour équation $y = f'(2)\left(x-2\right) + f(2) = 3x - 6$
4) $f'(x) = 6$ équivaut $\left(x-1\right)^2 = 2$ équivaut $x = 1+\sqrt{2}$ ou $x = 1-\sqrt{2}$
   Les tangentes à $\mathscr{C}$ en chacun des points d'abscisses respectives $1+\sqrt{2}$ et $1-\sqrt{2}$ ont pour coefficient directeur le réel 6.

LE BILAN

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et a un réel de I. On désigne par $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

- On dit que f est dérivable en a, s'il existe un nombre réel ℓ, tel que : $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=\ell$ ou encore $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}=\ell$

  Le réel ℓ, est alors appelé le nombre dérivé de f en a et il est noté $f'(a)$.
- Si f est dérivable en a alors la droite D passant par $A(a,f(a))$ et de coefficient directeur $f'(a)$ s'appelle la droite tangente à $\mathscr{C}$ en A.

  L'équation de la droite tangente à $\mathscr{C}$ en A est $y=f'(a)\left(x-a\right)+f(a)$.
- On dit que f est dérivable sur I lorsque pour tout x de I, f est dérivable en x. Dans ces conditions, la fonction qui à tout x de I associe le nombre dérivé $f'(x)$ est appelée fonction dérivée de f et on la note f' :

$$\begin{aligned} f' : I &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto f'(x) \end{aligned}$$

- Soit f et g deux fonctions dérivables sur un intervalle ouvert I, alors :
  - $f+g, kf\left(k\in\mathbb{R}\right), f\times g$ sont dérivables sur I et on a
    $\left(f+g\right)'=f'+g',\ \left(kf\right)'=kf'$ et $\left(f\times g\right)'=f'\times g+f\times g'$
  - Si $g(x)\neq 0$ sur I alors $\dfrac{1}{g}$ et $\dfrac{f}{g}$ sont dérivables sur I et on a
    $\left(\dfrac{1}{g}\right)'=-\dfrac{g'}{g^2}$ et $\left(\dfrac{f}{g}\right)'=\dfrac{f'\times g-f\times g'}{g^2}$
- Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.
  - f est constante sur I, si et seulement si, pour tout x dans I, $f'(x)=0$.
  - f est croissante sur I, si et seulement si, pour tout x dans I, $f'(x)\geq 0$.
  - f est décroissante sur I, si et seulement si, pour tout x dans I, $f'(x)\leq 0$
- Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I et $x_0\in I$
  - Si f admet un extremum en x_0, alors $f'(x_0)=0$.
  - Si f' s'annule en x_0 en changeant de signe, alors f admet un extrema local en x_0.

MOBILISER SES COMPÉTENCES

Situation 1

Une sprinteuse court le 100 m en gardant son accélération constante, suivant l'équation horaire $d(t)=\dfrac{25}{36}t^2$

1. Quelle est la vitesse instantanée de la sprinteuse à l'instant $t = 5$s.
2. a) Déterminer le temps mis par cette sprinteuse.
   b) Donner sa vitesse à l'arrivée, arrondie au centième.

Situation 2

Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{1}{x}$. On désigne par $\mathscr{H}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

1) Tracer la courbe $\mathscr{H}$.
2) Montrer que pour tout point A de $\mathscr{H}$, l'aire du triangle OAB est constante, où B est le point d'intersection de la tangente à $\mathscr{H}$ en A et l'axe $\left(O,\vec{i}\right)$.

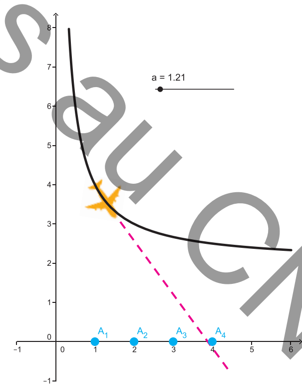
Stratégie de résolution

- Déterminer en fonction de a une équation de la tangente à $\mathscr{H}$ en A.
- Montrer que le point B a pour coordonnées $(2a,0)$.
- Calculer l'aire du triangle OAB. Conclure.

Situation 3

Sur l'écran du jeu vidéo que montre la figure ci-contre, on trouve un avion qui descend de gauche à droite en suivant une trajectoire $\mathscr{H}$ d'équation $y=2+\dfrac{2}{x}$ et tire à partir du point A de $\mathscr{H}$ un missile selon la tangente à $\mathscr{H}$ en direction des cibles placées sur l'axe (Ox) aux abscisses 1, 2 , 3 et 4.

En quels points de $\mathscr{H}$, l'avion doit-il tirer ses missiles pour atteindre chacune des quatre cibles.



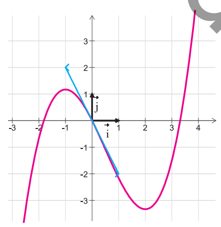
Stratégie de résolution

- Déterminer une équation de la tangente à $\mathscr{H}$ au point A d'abscisse a.
- Déterminer a pour que la tangente à $\mathscr{H}$ en A passe par les cibles, une à une.

S'AUTO-ÉVALUER

QCM

Pour chacune des questions suivantes, quatre réponses sont proposées parmi lesquelles une seule est correcte. Indiquer la lettre qui lui correspond.

		A	B	C	D
1	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{h^2-3h}{h}$	$-\infty$	-3	3	$+\infty$
2	La tangente à la parabole d'équation $y=x^2$ au point $A(-1,1)$ a pour coefficient directeur	-2	-1	1	2
3		$f'(0)=-2$	$f'(0)=-1$	$f'(0)=0$	$f'(0)=1$
4	$f(x)=x^2+3x-4$	$f'(x)=2x-1$	$f'(x)=2x+3$	$f(x)=x+3$	$f(x)=x^2+3$
5	$g(x)=\dfrac{3x+2}{2x-3}$	$g'(x)=\dfrac{12x}{(2x-3)^2}$	$g'(x)=\dfrac{12x-13}{2x-3}$	$g'(x)=-\dfrac{13}{2x-3}$	$g'(x)=-\dfrac{13}{(2x-3)^2}$
6	La dérivée *f'* de $f:x\mapsto x(2-x)$ est	$f':x\mapsto -1$	$f':x\mapsto 2$	$f':x\mapsto 2-x^2$	$f':x\mapsto 2-2x$

Vrai-Faux

Indiquer si les propositions suivantes sont vraies ou fausses ou on ne peut pas décider.

1) Le coefficient directeur de la tangente en tout point de l'hyperbole d'équation $y=\dfrac{1}{x}$, est strictement négatif.
2) La dérivée d'une fonction polynôme du second degré est une fonction affine.
3) La dérivée d'une fonction homographique est une fonction homographique.
4) Si une fonction *f* est dérivable sur $\mathbb{R}$ et admet un extrema en x_0 alors $f'(x_0)=0$.
5) Si une fonction *f* est dérivable sur $\mathbb{R}$ tel qu'il existe $x_0\in\mathbb{R}, f'(x_0)=0$ alors *f* admet un extrema en x_0.

EXERCICES D'ENTRAINEMENT

1

En utilisant la définition du nombre dérivé, déterminer pour chacune des fonctions suivantes son nombre dérivé en *a*.

$a)\ f : x \mapsto 2x-3;\ a=-1 \qquad b)\ f : x \mapsto -3x+\sqrt{2};\ a=\sqrt{2}$

$c)\ f : x \mapsto x^2+1;\ a=2 \qquad d)\ f : x \mapsto \frac{1}{2}x^2-x+1;\ a=1$

$e)\ f : x \mapsto x^3+3x;\ a=-2 \qquad f)\ f : x \mapsto -\frac{1}{3}x^3+1;\ a=\sqrt{3}$

2

En utilisant la définition du nombre dérivé, déterminer pour chacune des fonctions suivantes son nombre dérivé en *a*.

$a)\ g : x \mapsto \frac{1}{x};\ a=1 \qquad b)\ g : x \mapsto 1-\frac{3}{x};\ a=\sqrt{3}$

$c)\ g : x \mapsto \frac{1}{x+2};\ a=-1 \qquad d)\ g : x \mapsto \frac{2x-1}{x};\ a=2$

$e)\ g : x \mapsto \frac{x+1}{x-1};\ a=-2 \qquad f)\ g : x \mapsto \frac{x-2}{2x+1};\ a=\frac{1}{2}$

3

Déterminer pour chacune des fonctions suivantes sa fonction dérivée.

$1)\ f : x \mapsto 2x+5; \qquad 2)\ f : x \mapsto \sqrt{2}-2x$

$3)\ f : x \mapsto x^2+3x-1; \qquad 4)\ f : x \mapsto x^3-2x^2+2x-3$

$5)\ f : x \mapsto \frac{2x-1}{2x+1}; \qquad 6)\ f : x \mapsto \frac{2-x}{2x-5}$

4

Dans chacun des cas suivants, déterminer l'ensemble des réels *a* tels que $f'(a)=1$.

$1)\ f : x \mapsto x^2; \qquad 2)\ f : x \mapsto x^3 \qquad 3)\ f : x \mapsto \frac{1}{x}$

$4)\ f : x \mapsto x^2+3x-1; \qquad 5)\ f : x \mapsto x^3-2x^2+2x-3$

$6)\ f : x \mapsto \frac{2x-1}{2x+1}; \qquad 7)\ f : x \mapsto \frac{2-x}{2x-5}$

5

En utilisant la définition du nombre dérivé, calculer chacune des limites suivantes :

$1)\ \lim_{x\to 1}\frac{(x^2+x-1)-1}{x-1}; \qquad 2)\ \lim_{x\to 2}\frac{(x^3-3x^2+x+4)-2}{x-2}$

$3)\ \lim_{x\to 3}\frac{\left(\frac{2}{x-2}\right)-2}{x-3}; \qquad 4)\ \lim_{x\to -2}\frac{\left(\frac{2x+1}{x+1}\right)-3}{x+2}$

6

On considère les fonctions :

$f : x \mapsto x^2+2x+5$ et $g : x \mapsto x^3-3x^2+3x-1$

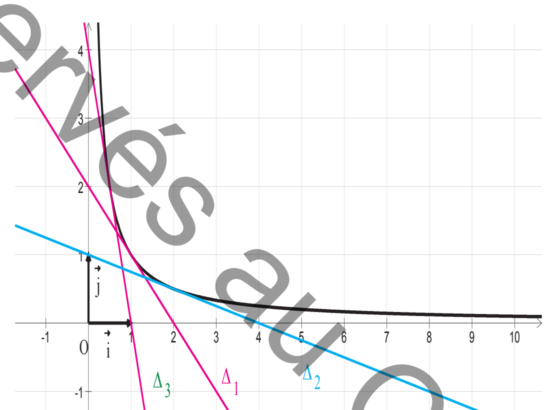
1) a) Déterminer la fonction dérivée *f* ' de *f*.
   b) Déterminer le réel *a* tel que $f'(a)=0$.
   c) *f* admet-elle un extrema en *a* ?
2) a) Déterminer la fonction dérivée *g* ' de *g*.
   b) Déterminer l'unique réel *b* tel que $g'(b)=0$.
   c) *g* admet-elle un extrema en *b* ?

7

On considère la fonction *f* définie sur $]0,+\infty[$ par

$f(x)=\frac{1}{x}$

On donne ci-dessous la courbe représentative C_f de *f* dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ et les tangentes Δ_1, Δ_2 et Δ_3 à C_f aux points d'abscisses respectives 1 ; 2 et $\frac{1}{2}$.



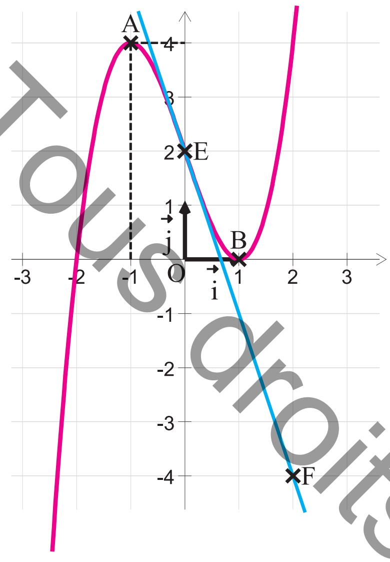
Par lecture graphique, déterminer :

$f\left(\frac{1}{2}\right), f(1), f(2), f'\left(\frac{1}{2}\right), f'(1)$ et $f'(2)$.

EXERCICES D'ENTRAINEMENT

8

On donne ci-dessous la courbe représentative C d'une fonction *f* dérivable sur $\mathbb{R}$.



Les tangentes à C aux points A et B sont parallèles à l'axe des abscisses et la droite (EF) est tangente à C en E.

1) A partir de l'observation du graphique, donner :
   a) $f(-1)$; $f(0)$ et $f(1)$.
   b) $f'(-1)$; $f'(1)$ et $f'(0)$.
   c) Le tableau de variation de *f*.
2) On admet que la fonction *f* est telle que pour tout $x \in \mathbb{R}, f(x) = x^3 + px + q$. On se propose de déterminer les réels *p* et *q*.
   a) En utilisant les coordonnées du point *E*, déterminer le réel *q*.
   b) Déterminer le réel *p* puis donner l'expression de $f(x)$.
   c) Retrouver alors l'équation de la tangent à C en *E*.

9

Soit *f* une fonction définie sur un intervalle ouvert I et *a* un réel de I. On suppose que *f* est dérivable en *a*. Dans chacun des cas suivants, déterminer l'équation de la tangente à la courbe représentative de *f* au point d'abscisse *a*.

a) $a = 2$; $f(2) = 3$; $f'(2) = 1$

b) $a = -2$; $f(-2) = -1$; $f'(-2) = -\dfrac{1}{2}$

c) $a = 3$; $f(3) = 2$; $f'(3) = -2$

10

Donner l'équation de la tangente à chacune des représentations graphiques des fonctions suivantes au point d'abscisse *a*.

a) $f : x \mapsto -2x^2 + 3;\ a = -1$

b) $f : x \mapsto 3x^2 - 12x + 5;\ a = 1$

c) $f : x \mapsto x^3 - 12x + 5;\ a = 1$

11

Soit la fonction $f : x \mapsto \dfrac{3x}{2x-1}$.

On désigne par C sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Montrer qu'il existe deux points M_1 et M_2 de C où les tangentes ont pout coefficient directeur -3.

12

Soit la fonction $f : x \mapsto x^3 + 2x^2 - 4x + 5$.

On désigne par C sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) Expliquer pourquoi C admet une tangente en chacun de ses points
2) Trouver les abscisses de tous les points de C en lesquels la tangente est :
   a) parallèle à l'axe des abscisses.
   b) parallèle à la droite d'équation $y = 3x + \dfrac{7}{2}$

13

Déterminer le sens de variation de chacune des fonctions suivantes :

1) $f : x \mapsto 2x + 5$; 2) $g : x \mapsto x^2 - 3x - 4$

3) $h : x \mapsto x^3 + 2x^2 + x + 1$; 4) $k : x \mapsto \dfrac{2x-1}{4-x}$

14

En utilisant les opérations sur les fonctions dérivées, déterminer pour chacune des fonctions suivantes sa fonction dérivée :

1) $f(x) = 2x + \dfrac{1}{2x}$; 2) $g(x) = 2x^2 - \dfrac{1}{x-1}$

3) $h(x) = x^3 + \dfrac{3x}{x-1} - 1$; 4) $k(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x+1}$

15

En utilisant les opérations sur les fonctions dérivées, déterminer pour chacune des fonctions suivantes sa fonction dérivée :

1) $f : x \mapsto 2015x + \dfrac{2014}{x}$.

2) $g : x \mapsto 17^2 x^2 + \dfrac{1}{x\sqrt{17}}$.

3) $h : x \mapsto (3x-2)^2$.

4) $k : x \mapsto (2-x)(x^2-4x+3)$.

5) $u : x \mapsto \left(x^2 - \dfrac{2}{x}\right)(2x-1)$.

6) $v : x \mapsto \dfrac{\left(\dfrac{2x-3}{x+2}\right)}{x-3}$.

16

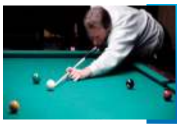
Soit la fonction $f : x \mapsto x^3 + x$ et C sa courbe représentative dans un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$

1) Montrer que *f* est impaire.
2) Etudier le sens de variation de *f*.
3) Déterminer une équation de la tangente D à C en O.
4) Etudier la position relative de C et D.

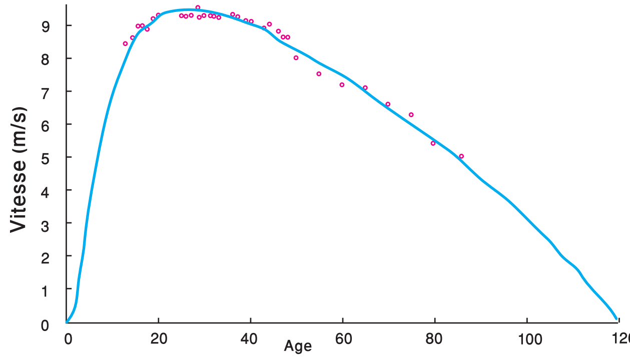
17

Soit la fonction $f : x \mapsto x^2 - 4x + 1$. On désigne par C sa courbe représentative dans un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$

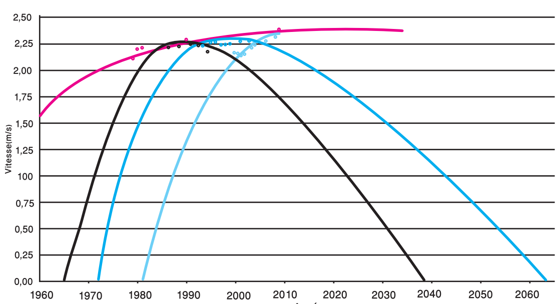
1) Déterminer $f'(x)$ pour tout réel x.
2) Soit A le point de C d'abscisse 0. Donner une équation de la tangente D à C en A.
3) Déterminer un point B de C tel que la tangente à C en B a pour coefficient directeur -2.



La relation performance/espérance de vie peut être modélisée par une relation simple dont la courbe représentative dite courbe d'espèce est donnée ci-contre.
Cette courbe décrit les vitesses enregistrées lors de l'épreuve du 100 mètres féminin en fonction de l'âge des championnes.



On constate l'extremum réalisé environ à l'âge de 30 ans par Florence Griffith-Joyner (actuelle détentrice du record du monde)



À partir des points maximum individuels, il est enfin possible, pour une épreuve sportive donnée, de prévoir l'évolution future des records de cette discipline (courbe rouge).