

REPUBLIQUE TUNISIENNE  
MINISTERE DE L'EDUCATION

# MATHÉMATIQUES

3ème année de l'enseignement secondaire

Section : Lettres

**Auteurs**

**Jaâfar BENI YAZID**  
Inspecteur Général

**Hikma SMIDA**  
Professeur Universitaire

**Evaluateurs**

**Taoufik CHARADA**  
Inspecteur

**Othman FERJANI**  
Inspecteur

Centre National Pédagogique

## — Remerciements —

---

*Messieurs Taoufik CHARRADA et Othman FERJANI ont évalué ce manuel. Nous le remercions pour leurs critiques et leurs conseils pertinents.*

*La mise en page de ce manuel est l'œuvre de l'équipe d'édition du CNP. Nous remercions tous les membres de cette équipe pour leur grande compétence et leur patience.*

***Les auteurs***

# Préface

*Cet ouvrage couvre le programme de la 3<sup>ème</sup> année secondaire section lettres applicable à la rentrée scolaire 2006.*

*Chaque chapitre comporte sept parties.*

## **I- Vérifier vos acquis**

*Cette rubrique comporte des activités qui ont pour rôle de rafraîchir les acquis antérieurs et d'identifier les lacunes éventuelles des élèves.*

## **II- Découvrir**

*Les activités proposées ont pour rôle d'introduire les notions nouvelles. Elles ont le plus souvent un objectif très précis. Elles préparent le cours et visent à permettre aux élèves de :*

- *Développer leur capacité à chercher, à expérimenter, à modéliser, à conjecturer et à raisonner.*
- *Construire les savoir et savoir-faire à connaître.*

## **III- L'essentiel du cours**

*Les résultats importants sont clairement dégagés dans cette rubrique afin que les élèves puissent constamment s'y référer.*

## **IV- Tests d'auto-évaluation**

*Cette rubrique favorise le travail autonome des élèves. Elle vise à permettre à l'élève de faire sa propre évaluation et d'estimer seul l'état de ses connaissances.*

## **V- Exercices et problèmes**

*Cette rubrique comporte :*

- *des exercices d'application directe du cours qui permettent aux élèves de s'entraîner et de se familiariser avec les notions étudiées.*
- *des exercices et des problèmes qui permettent aux élèves la mobilisation de leurs compétences, le perfectionnement du raisonnement, l'initiation à la recherche ...*

## **VI- Avec l'ordinateur**

*Dans cette rubrique les élèves utiliseront un logiciel pour chercher, expérimenter, conjecturer ou contrôler un résultat.*

## **VII- Mathématiques et culture**

*C'est une rubrique de culture mathématique générale qui propose aussi des éléments d'histoires de mathématiques.*

## — Sommaire —

---

<b>Chapitre 1</b>	<b>Problèmes du second degré</b>	<b>5</b>
<b>Chapitre 2</b>	<b>Dérivation et applications</b>	<b>17</b>
<b>Chapitre 3</b>	<b>Exemples de fonctions polynômes</b>	<b>36</b>
<b>Chapitre 4</b>	<b>Exemples de fonctions homographiques</b>	<b>54</b>
<b>Chapitre 5</b>	<b>Suites réelles</b>	<b>67</b>
<b>Chapitre 6</b>	<b>Statistiques</b>	<b>83</b>
<b>Chapitre 7</b>	<b>Probabilités</b>	<b>99</b>

# Chapitre 1

## Problèmes du second degré

### Vérifier vos acquis

#### 1. Répondre par vrai ou faux en justifiant la réponse

- 2 est une solution de l'équation  $x^2 - 5x + 10 = 0$ .
- $3x^2 - 5x + 3 = 0$  est une équation du 1<sup>er</sup> degré.
- L'équation  $7x^2 - 3x = 0$  est équivalente à l'équation  $x(7x - 3) = 0$ .
- L'ensemble des solutions dans  $\mathbb{R}$  de l'équation  $4x^2 + 4x + 1 = 0$  est  $S_{\mathbb{R}} = \{-1\}$ .
- L'équation  $9x^2 = 4$  est équivalente dans  $\mathbb{R}$  à l'équation  $3x = 2$ .
- L'équation  $(2x + 1)^2 + 5 = 0$  n'admet pas de solution dans  $\mathbb{R}$ .

Une solution d'une équation est dite aussi racine de cette équation

#### 2. À la manière de Diophante

Le mathématicien grec Diophante (vers 250 après J.C) a utilisé la méthode suivante pour chercher deux nombres dont la somme est 20 et le produit est 96.

- Il pose  $10 + n$  le plus grand nombre et  $10 - n$  le plus petit. Justifier ce choix.
- Expliquer alors pourquoi a-t-on  $100 - n^2 = 96$ .
- Quels sont alors les deux nombres cherchés ?

#### 3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes

- $23x^2 - 12x = 0$ .
- $16x^2 - 25 = 0$ .
- $4x^2 - 5 = 0$ .
- $7x^2 + 12 = 0$ .
- $9x^2 - 12x + 4 = 0$ .
- $25x^2 + 30x + 9 = 0$ .
- $(3x + 1)^2 - 4 = 0$ .
- $(2x - 1)^2 + \sqrt{3} = 0$ .
- $(2x + 3)(x + 1) = (x + 1)(x + 5)$ .

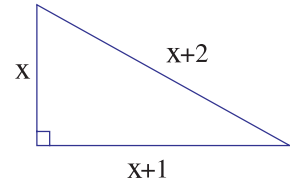
## Découvrir

### I. Equations du second degré

#### Activité 1

On veut chercher s'il y a un triangle rectangle dont les côtés sont trois entiers consécutifs. Soit  $x$  le plus petit de ces côtés.

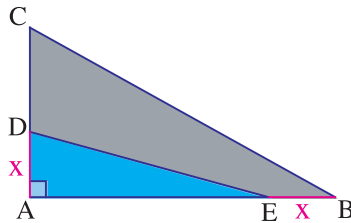
- Expliquer pourquoi l'on a  $x^2 + (x+1)^2 = (x+2)^2$ .
- Montrer que l'on a  $x^2 - 2x - 3 = 0$ .
- Compléter  $x^2 - 2x = (x - \dots)^2 - \dots$
- Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation  $x^2 - 2x - 3 = 0$ , en déduire la solution du problème posé.



#### Activité 2

Dans un triangle ABC rectangle en A, avec  $AB = 8$  et  $AC = 3$ , on place les points D et E respectivement sur  $[AC]$  et  $[AB]$  de sorte que  $AD = BE = x$ .

On cherche à déterminer  $x$  pour que l'aire du triangle ADE soit égale à celle du quadrilatère BCDE.



- Montrer que l'on a :  $x^2 - 8x + 12 = 0$ .
- Compléter  $x^2 - 8x = (x - \dots)^2 - \dots$
- Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation  $x^2 - 8x + 12 = 0$ , en déduire la solution du problème posé.

#### Activité 3

1. Vérifier que

- $x^2 - 6x = (x - 3)^2 - 9$ .
- $x^2 + 12x = (x + 6)^2 - 36$ .
- $x^2 - 5x = (x - \frac{5}{2})^2 - \frac{25}{4}$ .
- $x^2 + \sqrt{3}x = (x + \frac{\sqrt{3}}{2})^2 - \frac{3}{4}$ .

2. Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les équations.

a.  $x^2 - 6x - 7 = 0$ .

b.  $x^2 + 12x - 13 = 0$ .

c.  $x^2 - 5x + 6 = 0$ .

d.  $x^2 + \sqrt{3}x + 1 = 0$ .

### Définition

Soient  $a$ ,  $b$  et  $c$  trois réels tels que  $a \neq 0$ .

L'équation  $ax^2 + bx + c = 0$  est dite équation du second degré d'inconnue  $x$ .

### Activité 4

Les équations suivantes sont elles des équations du second degré ? Justifier votre réponse.

a.  $(x - 1)(x + 2) = x^2 - 3x + 1$ .

b.  $3x^2 - (x + 1)^2 = 2x + 5$ .

c.  $x^3 + 5x + 2 = 0$ .

### Activité 5

Les équations ci-dessous sont des exemples d'équations du second degré de la forme  $ax^2 + bx + c = 0$ .

a.  $3x^2 - x = 0$ .

b.  $9x^2 - 4 = 0$ .

c.  $x^2 + 7 = 0$ .

d.  $4x^2 - 20x + 25 = 0$ .

e.  $x^2 + x + 1 = 0$ .

f.  $9x^2 + 12x + 4 = 0$ .

g.  $x^2 - 8x + 15 = 0$ .

h.  $x^2 + 2x + 3 = 0$ .

i.  $-25x^2 + 30x - 9 = 0$ .

a. Résoudre ces équations dans  $\mathbb{R}$ .

b. Déterminer dans chacun des cas, le réel  $\Delta = b^2 - 4ac$  et vérifier sur ces exemples les résultats suivants.

- Si  $\Delta > 0$  alors l'équation proposée a deux solutions réelles distinctes données par les formules  $\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$  et  $\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ .

- Si  $\Delta = 0$  alors l'équation proposée a une solution réelle (double) donnée par la formule  $\frac{-b}{2a}$ .

- Si  $\Delta < 0$  alors l'équation proposée n'a pas de solution réelle.

c. Prener d'autres exemples d'équations du second degré et vérifier les résultats précédents.

## II. Inéquations du second degré

### Activité 1

Soit  $f$  un trinôme du second degré

$$f(x) = ax^2 + bx + c.$$

On pose  $\Delta = b^2 - 4ac$ .

1. Vérifier que  $f(x) = a \left[ \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right]$ .

2. a. Ecrire sous la forme canonique le trinôme  $f$  défini sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = 3x^2 - 5x + 2$ . Factoriser alors  $f(x)$  et étudier son signe suivant les valeurs de  $x$ .

b. Ecrire sous la forme canonique le trinôme  $g$  défini sur  $\mathbb{R}$  par  $g(x) = -3x^2 + 2x - 7$ . En déduire le signe de  $g(x)$ .

c. Soit le trinôme  $h$  défini sur  $\mathbb{R}$  par  $h(x) = -4x^2 + 12x - 9$ . Etudier le signe de  $h(x)$ .

3. Vérifier sur les exemples de la question 2 les résultats consignés dans le tableau ci-dessous.

• Soient  $a$ ,  $b$  et  $c$  trois réels avec  $a$  non nul. L'application définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = ax^2 + bx + c$  est appelée trinôme du second degré.

• La forme  $f(x) = a \left[ \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right]$ ,

où  $\Delta = b^2 - 4ac$ , s'appelle la forme canonique de  $f$ .

	Racine de $f(x) = 0$	Factorisation de $f(x)$	Signe de $f(x)$
$\Delta < 0$	L'équation n'a pas de racine.	On ne peut pas factoriser $f(x)$ .	Pour tout réel $x$ , $f(x)$ est du signe de $a$ .
$\Delta = 0$	L'équation a une seule racine $x_0 = \frac{-b}{2a}$ .	$f(x) = a(x - x_0)^2$ .	Pour tout $x \neq x_0$ , $f(x)$ est du signe de $a$ .
$\Delta > 0$	L'équation a deux racines distinctes : $x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ .	$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ .	$f(x)$ est de signe de $a$ à l'extérieur des racines. $f(x)$ est de signe de $(-a)$ entre les racines.

4. Prendre d'autres exemples de trinômes du second degré et vérifier les résultats précédents.

### Activité 2

Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les inéquations ci-dessous.

a.  $25x^2 - 30x + 9 \leq 0$ .

b.  $9 - 4x^2 \geq 0$ .

c.  $x^2 + x + 1 \geq 0$ .

d.  $5x^2 + 7x + 2 < 0$ .

### Activité 3

On considère un triangle ABC rectangle en A tel que  $AB = 4$  cm et  $AC = 3$  cm. Soit M un point du côté [BC]. M se projette orthogonalement sur [AB] et [AC] respectivement en P et Q. On pose  $CM = x$ .

1. Justifier que  $\frac{QM}{AB} = \frac{CM}{CB}$  et  $\frac{PM}{AC} = \frac{BM}{BC}$ . Déduire  $QM = \frac{4}{5}x$  et  $PM = \frac{3}{5}(5-x)$ .

2. On désigne par  $A(x)$  la mesure de l'aire du quadrilatère APMQ.

Vérifier que  $A(x)$  est un trinôme du second degré définie sur  $[0 ; 5]$  et déduire la valeur de  $x$  pour laquelle  $A(x)$  est maximale.

## IV. Exemples d'équations et d'inéquations du troisième degré

### Activité 1

Soit  $f(x) = 2x^3 - x^2 - 4x + 3$ .

1. a. Vérifier que  $f(x) = (2x + 3)(x^2 - 2x + 1)$ .  
b. Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation  $f(x) = 0$ .
2. Etudier le signe de  $2x + 3$ .
3. Etudier le signe de  $x^2 - 2x + 1$ .
4. a. Dresser dans un même tableau le signe de chacune des expressions précédentes.  
b. En déduire le signe de  $f(x)$ .
5. Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'inéquation  $f(x) \leq 0$ .

Soit a et b deux réels.

Le produit ab est positif, si et seulement si, a et b sont de même signe.

Le produit ab est négatif, si et seulement si, a et b sont de signe contraire.

### Activité 2

1. a. Vérifier que  $x^3 - 3x^2 + 2x = (x-1)(x^2 - 2x)$ .  
b. Résoudre dans  $\mathbb{R}$   $x^3 - 3x^2 + 2x = 0$ .
2. Compléter le tableau ci-dessous.

x	$-\infty$			$+\infty$
<b>Signe de <math>x-1</math></b>				
<b>Signe de <math>x^2-2x</math></b>				
<b>Signe de <math>(x-1)(x^2-2x)</math></b>				

3. Résoudre dans  $\mathbb{R}$ .

a.  $x^3 - 3x^2 + 2x = 0$ .

b.  $x^3 - 3x^2 + 2x \leq 0$ .

# L'essentiel du cours

## Définition

Soit  $a$ ,  $b$  et  $c$  trois réels tels que  $a \neq 0$ .

La fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = ax^2 + bx + c$  est appelée **fonction trinôme**. (L'expression " $ax^2 + bx + c$ " est aussi appelée trinôme).

Le réel  $\Delta = b^2 - 4ac$  est appelé **discriminant** du trinôme.

L'expression  $a \left[ \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right]$  est appelée **forme canonique** du trinôme.

Les solutions de l'équation  $ax^2 + bx + c = 0$ , s'il en existe, sont appelées **racines** du trinôme  $ax^2 + bx + c$ .

	Racine de $f(x) = 0$	Factorisation de $f(x)$	Signe de $f(x)$
$\Delta < 0$	L'équation n'a pas de racine.	On ne peut pas factoriser $f(x)$ .	Pour tout réel $x$ , $f(x)$ est du signe de $a$ .
$\Delta = 0$	L'équation a une seule racine $x_0 = \frac{-b}{2a}$ .	$f(x) = a(x - x_0)^2$ .	Pour tout $x \neq x_0$ , $f(x)$ est du signe de $a$ .
$\Delta > 0$	L'équation a deux racines distinctes $x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ .	$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ .	$f(x)$ est de signe de $a$ à l'extérieur des racines. $f(x)$ est de signe de $(-a)$ entre les racines.

# Test d'auto-évaluation

1. Choisir la bonne réponse.

- ◆ L'équation  $x^2 - 3x = 0$  a pour ensemble de solutions  
a.  $\{0\}$ .                      b.  $\{3\}$ .                      c.  $\{0,3\}$ .
- ◆ L'équation  $x^2 - x - 2 = 0$  a pour ensemble de solutions  
a.  $\{2\}$ .                      b.  $\emptyset$ .                      c.  $\{-1,2\}$ .
- ◆ L'inéquation  $-x^2 + 5x - 6 > 0$  a pour ensemble de solutions  
a.  $\{2,3\}$ .                      b.  $] 2, 3[$ .                      c.  $] -\infty, 2 [ \cup ] 3, +\infty [$ .
- ◆ L'inéquation  $x^2 + x - 2 \leq 0$  a pour ensemble de solutions  
a.  $\{-2, 1\}$ .                      b.  $[-2, 1]$ .                      c.  $] -2, 1[$ .
- ◆ L'inéquation  $x^2 + x + 1 > 0$  a pour ensemble de solutions  
a.  $\emptyset$ .                      b.  $\mathbb{R}$ .                      c.  $\mathbb{R}^+$ .

2. Les fonctions suivantes sont elles des fonctions trinômes ? Identifier les coefficients a, b et c si ce trinôme s'écrit  $ax^2 + bx + c$ .

- a.  $(2x - 1)^2$ .                      b.  $(1 + x)^2 - (2-x)^2$ .                      c.  $(3x - 1)(1 - x)$ .

3. Le tableau suivant donne le signe d'un trinôme.

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$	
$f(x) = ax^2 + bx + c$	-	0	+	0	-

Choisir alors ce qui convient.

1. a.  $\Delta > 0$ .                      b.  $\Delta = 0$ .                      c.  $\Delta < 0$ .
2. a.  $a > 0$ .                      b.  $a < 0$ .                      c.  $a = 2$ .
3. a.  $f(-1) < 0$ .                      b.  $f(-1) = 0$ .                      c.  $f(-1) > 0$ .
4. a.  $f(-1) = f(2)$ .                      b.  $f(3) < f(0)$ .                      c.  $f(2, 3) > f(1, 5)$ .

4. La forme canonique de  $2x^2 + 12x - 14$  est

- a.  $2(x-1)(x+7)$ .                      b.  $2[(x-3)^2 - 16]$ .                      c.  $2[(x+3)^2 - 16]$ .

# Exercices et problèmes

## Exercice 1

Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les équations ci-dessous.

a.  $(3x - 1)(-2x + 1) = 0$ .

b.  $3x^2 - 2\sqrt{3}x + 1 = 0$ .

c.  $-5x^2 + 1 = 0$ .

d.  $7x^2 - 15x = 0$ .

e.  $-x^2 - 8 = 0$ .

f.  $x^2 - x = (x - 1)(2x + 1)$ .

## Exercice 2

Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les équations ci-dessous.

a.  $5x^2 - 7x + 2 = 0$ .

b.  $x^2(x - 1)^2 = -3$ .

c.  $5x^2 + (x+1)^2 = 0$ .

d.  $x^2 - (\sqrt{2} + \sqrt{3})x + \sqrt{6} = 0$ .

e.  $(2x+1)^2 - (3x+2)^2 = 0$ .

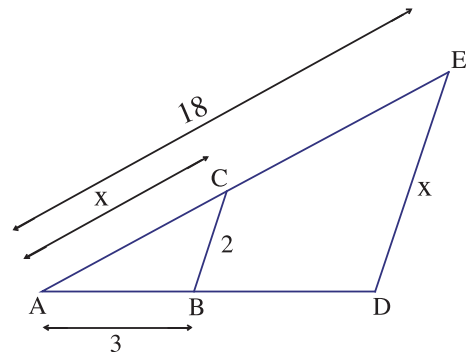
f.  $x^3 - 7x^2 + 12x = 0$ .

## Exercice 3

Un champ rectangulaire dont la longueur est quadruple de la largeur a pour aire  $48 \text{ cm}^2$ . Quelles sont les dimensions de ce champ ?

## Exercice 4

Dans la figure ci-contre, les droites (BC) et (DE) sont parallèles. Trouver  $x$  et BD.



## Exercice 5

Un terrain rectangulaire a pour périmètre  $156 \text{ m}$  et pour aire  $1505 \text{ m}^2$ . Quelles sont les dimensions de ce terrain ?

## Exercice 6

Peut-on trouver un carré tel que si on augmente de  $5 \text{ cm}$  la longueur de ses côtés, alors son aire sera augmentée de

a.  $25 \text{ cm}^2$ .

b.  $20 \text{ cm}^2$ .

c.  $41 \text{ cm}^2$ .

## Exercice 7

Un bateau descend une rivière sur un parcours de  $29 \text{ km}$  puis le remonte sur  $19 \text{ km}$ . Le voyage dure  $4 \text{ heures}$ .

Quelle est la vitesse propre de ce bateau sachant que la vitesse du courant est de  $2,5 \text{ km/h}$ . (Indication : raisonner sur la durée).

## Exercice 8

- L'aire d'un rectangle est  $575\text{m}^2$ , la largeur vaut les  $\frac{3}{5}$  de la longueur. Quelles sont ses dimensions ?
- Un côté d'un triangle rectangle vaut le triple de l'autre côté et l'aire est  $54\text{ cm}^2$ . Quelles sont les dimensions ?

## Exercice 9

### Problème babylonien de 1800 avant J.C

Une aire valant 1000 est formée par la somme de deux carrés. Le côté de l'un des carrés vaut 10 de moins que les  $\frac{2}{3}$  du côté de l'autre carré.  
Quels sont les côtés de ces carrés ?

## Exercice 10

On considère le trinôme  $f(x) = x^2 - x - 1$ .

- Calculer  $f(1 + \sqrt{2})$  et  $f(1 - \sqrt{2})$ .
- Le nombre  $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$  est-il une solution de l'équation  $x^2 - x - 1 = 0$  ?

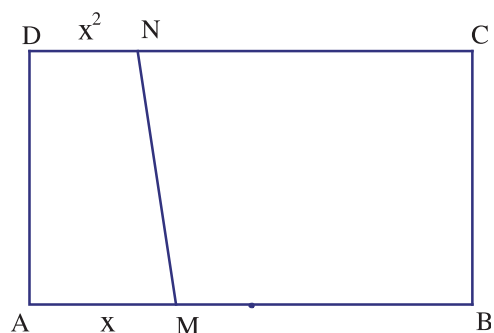
## Exercice 11

Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les inéquations suivantes.

- $x^2 + 1 > 0$ .
- $x^2 - 9 \leq 0$ .
- $4x^2 - 20x + 25 \leq 0$ .
- $x^2 - 9x + 20 > 0$ .
- $-x^2 + (\sqrt{3} - 2\sqrt{2}) + 2\sqrt{6} < 0$ .
- $12x^2 - 13x + 25 \geq 0$ .

## Exercice 12

ABCD est un rectangle de longueur  $AB = 2$ ,  $AM = x$  et  $DN = x^2$ . Pour Quelles valeurs de  $x$ , a-t-on l'aire du trapèze AMND est supérieure à l'aire du trapèze MBCN ?



## Exercice 13

Soit  $f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$ .

- Vérifier que  $f(x) = (x^2 - 1)(x - 2)$ .
- Résoudre dans  $\mathbb{R}$ .
  - L'équation  $f(x) = 0$ .
  - L'inéquation  $f(x) > 0$ .

# Avec l'ordinateur

## Utiliser un tableur pour résoudre une équation du second degré

On se propose de résoudre des équations du second degré, à l'aide d'un tableur. Ouvrir une feuille de calcul sur Excel et remplir un tableau comme ci-dessous.

	A	B	C	D	E	F	G
1	a	b	c	$\Delta$			
2				$=B2^2 - 4*A2*C2$			
3							

Dans la cellule E<sub>2</sub>

- Utiliser le menu du logiciel

Insertion / Fonction, puis sélectionner la fonction test SI et valider.

Remplir les champs de textes comme suit

D2 > = 0

Deux racines

Pas de racines

- Dans la cellule F2

- Utiliser le menu du logiciel

Insertion / Fonction, puis sélectionner la fonction test SI et valider.

Remplir les champs de textes comme suit

D2 > = 0

$(-B2-RACINE(D2))/(2*A2)$

(Laisser vide le troisième champ de texte)

- Dans la cellule G2

- Utiliser le menu du logiciel

Insertion / Fonction, puis sélectionner la fonction test SI et valider.

Remplir les champs de textes comme suit

D2 > = 0

$(-B2+RACINE(D2))/(2*A2)$

(Laisser vide le troisième champ de texte).

- Donner les valeurs a, b, c et sélectionner D2 et tirer vers les cellules E2, F2 et G2.

- Pour entrer d'autres valeurs de a, b et c, passer à la ligne suivante et pour les cellules E2, F2 et G2, tirer vers le bas.

Des problèmes de mesure conduisent très tôt aux équations du second degré.

De nombreux problèmes de ce type, datant des mathématiques babyloniennes nous sont parvenues grâce à des tablettes cunéiformes.

Les mathématiciens grecs étaient capables de résoudre de façon géométrique les équations du second degré. La description de ses méthodes se trouvent dans le livre X des « Eléments » d'Euclide ( 300 av. J.C environ ).

Les mathématiciens hindous, surtout Bhaskara (né en 1114) découvrirent que les racines arrivent par paires.

Grâce aux scientifiques arabes et surtout grâce à Al-Khwarizmi (780-850), la résolution des équations du second degré a connu un grand progrès. Al-Khwarizmi ramène toutes les équations du premier et du second degré à six types d'équations

$$ax^2 = c.$$

$$bx = c.$$

$$ax^2 = bx.$$

$$ax^2 + bx = c.$$

$$ax^2 + c = bx.$$

$$bx + c = ax^2.$$

(a,b,c sont des nombres strictement positifs, les seuls acceptés à l'époque). Cela nous paraît un peu insolite, mais cela vient du fait que le zéro n'était pas considéré comme un nombre et n'était donc pas accepté au second membre.

Le mot Al-jabr apparaît dans l'ouvrage « Al-kitab Al-mukhtassar fi hissab Al-jabr wal moukabala » et devient par la suite « Algèbre » en Europe.

La théorie des équations est utilisée par Al-Khwarizmi pour résoudre des problèmes d'héritages, de géométrie, de commerce et d'astronomie.

# Chapitre 2

## Dérivation et applications

**Vérifier vos acquis**

1. Représenter graphiquement la fonction affine définie par  $f(x) = 2x - 3$ .

2. Déterminer le tableau de signe de chacune des expressions suivantes.

$$f(x) = 2x + 3 ; \quad g(x) = -x + 5 ; \quad h(x) = -3x - 10.$$

3. Déterminer le tableau de signe de chacune des expressions suivantes.

$$f(x) = -2x^2 + 3x - 1 ; \quad g(x) = x^2 + 5x - 4 ; \quad h(x) = 3(x - 10)(-x + 3) ; \quad t(x) = x(x^2 - 2x + 2).$$

4. Soit  $\mathcal{C}$  la courbe représentative de la fonction définie par  $f(x) = x^2$ .

Calculer le coefficient directeur de la droite passant par les points A, B de  $\mathcal{C}$  d'abscisses respectives  $-1$  et  $2$ .

5. Population d'une ville.

Année n	1985	1990	1995	2000	2005
Population p(n) en milliers	50	62	75	90	108

Pour chaque période de 5 ans, calculer le taux de variation de la fonction  $n \mapsto p(n)$ .  
Quelle est la signification pratique de ce taux de variation ?

## Découvrir

### 1. Nombre dérivé

#### Activité 1

Une étude menée par une association pour la protection de l'environnement montre que dans  $x$  années (à compter d'aujourd'hui), la quantité totale de déchets solides sera approximativement de  $Q(x) = 10^4 (x^2 + 70)$  tonnes, où  $0 \leq x \leq 10$ .

1. Quelle est actuellement la quantité totale de déchets solides ?
2. Quelle sera cette quantité dans 10 ans ?
3. Que représentent les nombres  $\frac{Q(10)-Q(0)}{10}$  ;  $\frac{Q(5)-Q(2)}{3}$  ?
4. a. Soit  $x \neq 1$ . Calculer en fonction de  $x$  l'expression  $\frac{Q(x)-Q(1)}{x-1}$ .

b. Compléter le tableau ci-dessous.

$x$	0.9	0.99	0.999	0.9999	1.1	1.01	1.001	1.0001
$\frac{Q(x)-Q(1)}{x-1}$								

De quel réel se rapproche  $\frac{Q(x)-Q(1)}{x-1}$  lorsque  $x$  se rapproche de 1 ?

#### Activité 2

Le plan est muni d'un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

1. Tracer l'hyperbole  $H$  d'équation  $y = \frac{1}{x}$ .
2. Soit un réel  $b$  distinct de 1. On considère les points  $A(1,1)$  et  $B(b, \frac{1}{b})$ .
  - a. Vérifier que  $A$  et  $B$  appartiennent à  $H$ .
  - b. Calculer le coefficient directeur  $m(b)$  de la droite  $(AB)$  et donner une équation de  $(AB)$ .
  - c. Tracer la droite  $(AB)$  pour  $b = 0.9$  puis pour  $b = 0.5$ .
  - d. Compléter le tableau ci-dessous.

$b$	0.9	0.99	0.999	0.9999	1.1	1.01	1.001	1.0001
$m(b)$								

- e. Que devient l'équation de la droite  $(AB)$  lorsque  $b$  se rapproche de 1 ?
3. On désigne par  $T$  la droite d'équation  $y = -x + 2$ .

Tracer la droite  $T$ .  
Déterminer graphiquement le nombre de points d'intersection de  $T$  et  $H$ .  
Vérifier ce résultat par le calcul.

## Définition

Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle ouvert  $I$  et  $a$  un réel de  $I$ .

S'il existe un nombre réel  $\ell$  tel que  $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$  se rapproche de  $\ell$  lorsque  $x$  se rapproche de  $a$ , on dit que  $f$  est dérivable en  $a$ .

Le réel  $\ell$ , est alors appelé le nombre dérivé de  $f$  en  $a$  et il est noté  $f'(a)$ .

## Activité 3

1. Représenter la fonction  $f : x \mapsto x^2$ .
2. a. Soit  $x$  un réel non nul. Calculer  $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ .  
b. De quel réel se rapproche  $\frac{f(x)-f(0)}{x}$  lorsque  $x$  se rapproche de 0 ?  
c. Que peut-on dire de la dérivabilité de  $f$  en 0 ?
3. Reprendre la question précédente pour  $\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}$ .

## 2. Interprétation géométrique du nombre dérivé

### Tangente à une courbe

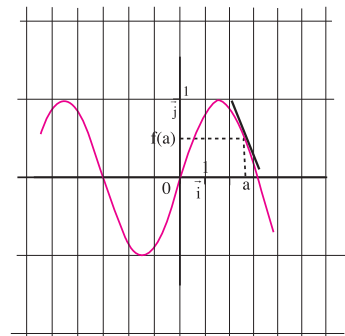
Le plan est muni d'un repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle ouvert  $I$  et  $a$  un réel de  $I$ .

$f$  est dérivable en  $a$ , si et seulement si, la courbe représentative de  $f$  admet au point  $M(a, f(a))$  une tangente  $T$ , de pente un réel.

Dans ce cas  $T$  a pour équation  $y = f'(a)(x - a) + f(a)$ .

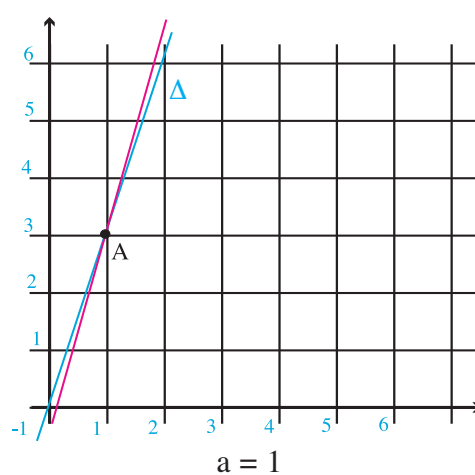
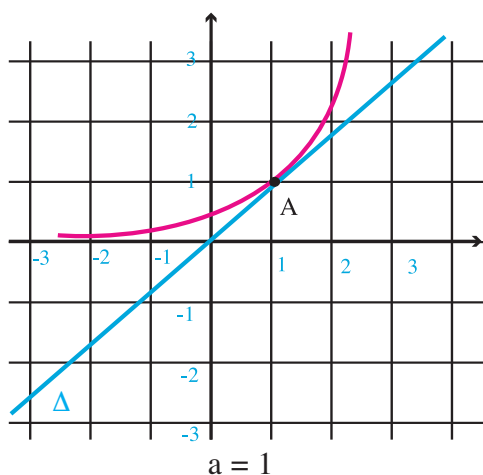
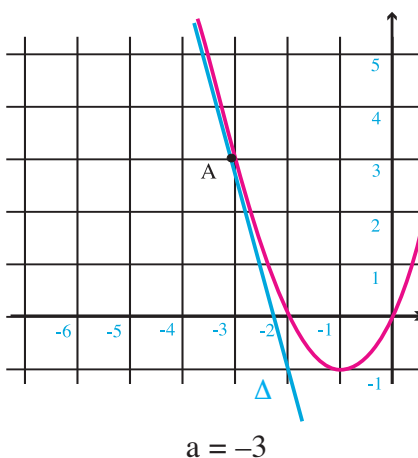
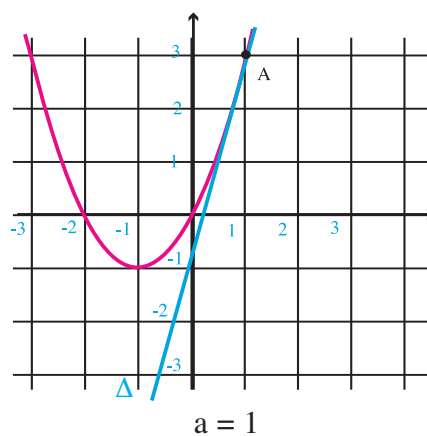
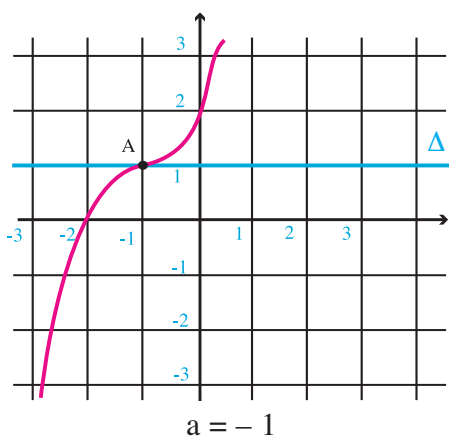
Un vecteur directeur de  $T$  est  $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ f'(a) \end{pmatrix}$ .



## Activité

Dans chacun des cas suivants, la courbe  $\mathcal{C}$  est la représentation graphique d'une fonction  $f$  dérivable en  $a$  et  $\Delta$  est la tangente à  $\mathcal{C}$  au point  $A(a, f(a))$ .

Déterminer le nombre dérivé de  $f$  au point d'abscisse  $a$ .



### 3. Fonction dérivée

#### Définition

Soit  $f$  une fonction définie et dérivable sur un intervalle ouvert  $I$ . On appelle fonction dérivée de  $f$  et on note  $f'$ , la fonction qui à tout réel  $x$  appartenant à  $I$  associe le nombre dérivé  $f'(x)$ , de  $f$  en  $x$ .

Le tableau ci-dessous donne les fonctions dérivées de quelques fonctions usuelles.

Fonction f	f'(x)
f est une fonction constante.	$f'(x) = 0, x \in \mathbb{R}.$
$f : x \mapsto ax + b.$	$f'(x) = a, x \in \mathbb{R}.$
$f : x \mapsto x^2.$	$f'(x) = 2x, x \in \mathbb{R}.$
$f : x \mapsto x^n, n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}.$	$f'(x) = nx^{n-1}, n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}, x \in \mathbb{R}.$
$f : x \mapsto \frac{1}{x}.$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}, x \in \mathbb{R}^*.$
$f : x \mapsto \frac{ax + b}{cx + d}.$	$f'(x) = \frac{ad - bc}{(cx + d)^2}, x \neq -\frac{d}{c}, c \neq 0.$

### Activité

Calculer les dérivées de chacune des fonctions ci-dessous.

$$f : x \mapsto 2x+3 ; g : x \mapsto x^3 ; h : x \mapsto x^5 ; k : x \mapsto \frac{2}{x+3} ; l : x \mapsto \frac{2x-5}{x-1}.$$

## 4. Opérations sur les fonctions dérivées

**Théorème (admis)**

Soit f et g deux fonctions dérivables sur un intervalle ouvert I et  $\alpha$  un réel  
 $f+g$  et  $\alpha f$  sont dérivables sur I et  $(f+g)' = f' + g'$  et  $(\alpha f)' = \alpha f'$ .

### Activité

Déterminer la fonction dérivée de chacune des fonctions ci-dessous.

$$x \mapsto x^2 - 2x + 5 ; x \mapsto x^3 + 1 ; x \mapsto x^3 - 5x^2 + x + 2 ; x \mapsto x^4 - 3x^2 + 5.$$

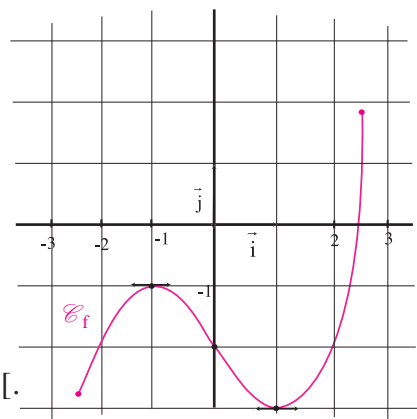
$$x \mapsto x - 2 + \frac{1}{x} ; x \mapsto \frac{2-3x}{x-1} ; x \mapsto (x-1)^2 - 2x + 5.$$

## 5. Dérivée et sens de variation

### Activité 1

On a représenté dans un repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ ,  
une fonction f définie et dérivable sur  $]-2,5, 2,5[$ .

- Donner la valeur de  $f(-1)$ ,  $f(0)$  et  $f(1)$ .
- Donner la valeur de  $f'(-1)$  et  $f'(1)$ .
- Déterminer graphiquement les variations de f sur  $]-2,5 -1[$ .
  - Déterminer graphiquement le signe de  $f'(x)$ , pour x appartenant à  $]-2,5 -1[$ .



4. a. Déterminer graphiquement les variations de  $f$  sur  $]-1, 1[$ .
- b. Déterminer graphiquement le signe de  $f'(x)$ , pour  $x$  appartenant à  $]-1, 1[$ .
5. a. Déterminer graphiquement les variations de  $f$  sur  $]1, 2,5[$ .
- b. Déterminer graphiquement le signe de  $f'(x)$ , pour  $x$  appartenant à  $]1, 2,5[$ .

### Théorème (admis)

Soit  $f$  une fonction dérivable sur un intervalle ouvert  $I$ .

La fonction  $f$  est constante sur  $I$ , si et seulement si, pour tout  $x$  appartenant à  $I$ ,  $f'(x) = 0$ .

La fonction  $f$  est croissante sur  $I$ , si et seulement si, pour tout  $x$  appartenant à  $I$ ,  $f'(x) \geq 0$ .

La fonction  $f$  est décroissante sur  $I$ , si et seulement si, pour tout  $x$  appartenant à  $I$ ,  $f'(x) \leq 0$ .

### Activité 2

Soit  $f$  une fonction définie et dérivable sur  $]-1, 3[$ .

On a résumé dans le tableau ci-dessous, le signe de la dérivée  $f'$  de  $f$ .

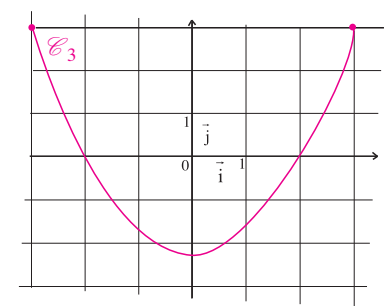
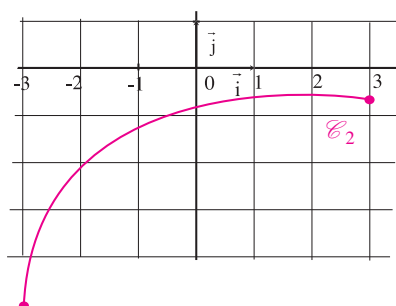
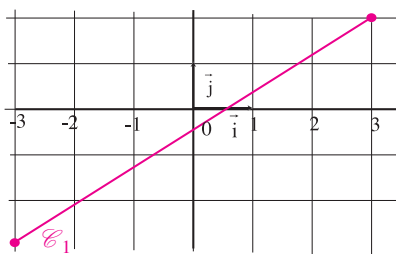
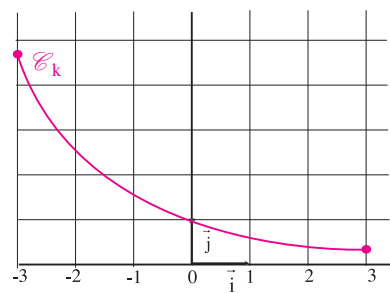
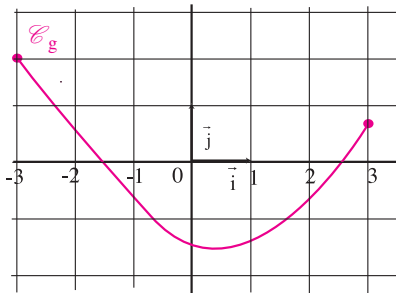
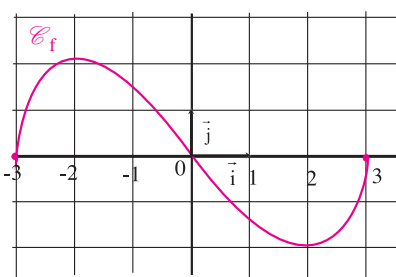
$x$	$-1$	$\frac{1}{3}$	$1$	$2$	$3$
$f'(x)$	$+$	$0$	$-$	$0$	$+$

Donner les variations de  $f$ , sur chacun des intervalles  $]-1, \frac{1}{3}[$  ;  $]\frac{1}{3}, 1[$  ;  $]1, 2[$  ;  $]2, 3[$ .

### Activité 3

On a représenté les fonctions  $f$ ,  $g$  et  $k$  ainsi que leurs fonctions dérivées  $f'$ ,  $g'$  et  $k'$ .

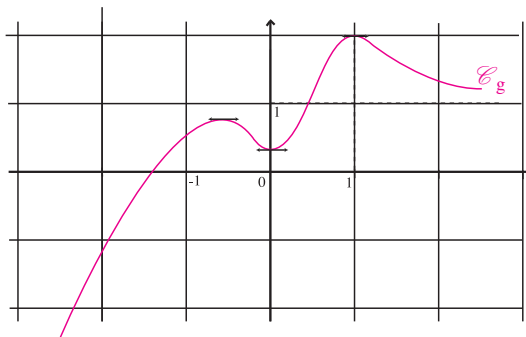
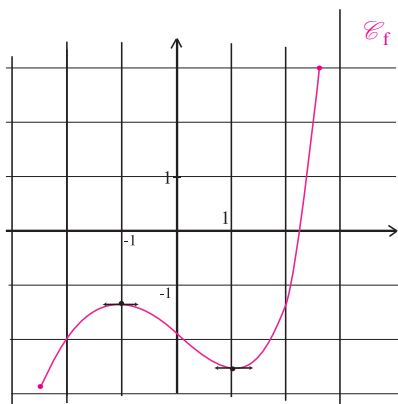
Identifier pour chaque fonction la courbe de sa fonction dérivée.



## 6. Dérivée et extremum

### Activité 1

Les courbes ci-dessous représentent des fonctions  $f$  et  $g$  dérivables sur  $]-2,5, +2,5[$ .



- Comparer  $f(x)$  et  $f(-1)$  pour tout  $x$  appartenant à  $]-1,5, -0,5[$ .
  - Donner la valeur de  $f'(-1)$ .
- Comparer  $f(x)$  et  $f(1)$  pour tout  $x$  appartenant à  $]0,5, 1,5[$ .
  - Donner la valeur de  $f'(1)$ .
- Comparer  $g(x)$  et  $g(1)$  pour tout  $x$  appartenant à  $]0,5, 1,5[$ .
  - Donner la valeur de  $g'(1)$ .
- Comparer  $g(x)$  et  $g(0)$  pour tout  $x$  appartenant à  $]-0,5, 0,5[$ .
  - Donner la valeur de  $g'(0)$ .

### Définition

Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle ouvert  $I$  et  $x_0$  un élément de  $I$ .

- S'il existe un intervalle ouvert  $J$  inclus dans  $I$  et centré en  $x_0$  tel que  $f(x) \leq f(x_0)$  pour tout  $x$  de  $J$ , on dit que  $x_0$  est un maximum local pour  $f$ .
- S'il existe un intervalle ouvert  $J$  inclus dans  $I$  et centré en  $x_0$  tel que  $f(x) \geq f(x_0)$  pour tout  $x$  de  $J$ , on dit que  $x_0$  est un minimum local pour  $f$ .

### Théorème (admis)

Soit  $f$  une fonction dérivable sur un intervalle ouvert  $I$  et  $x_0$  un élément de  $I$ .

Si  $f'$  s'annule en  $x_0$  en changeant de signe, alors  $f$  admet un extremum local en  $x_0$ .

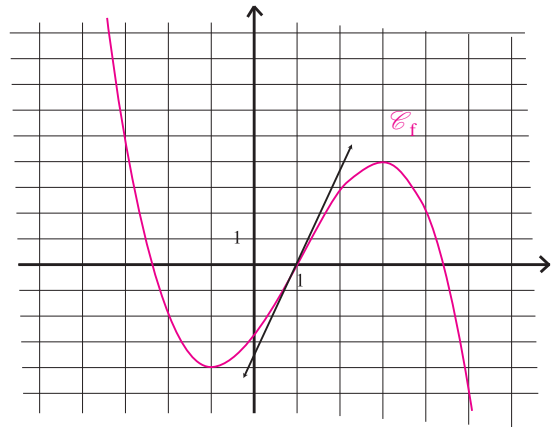
### Vocabulaire

Si  $f'$  est positive, puis s'annule en  $x_0$  en changeant de signe, alors on dit que  $f$  admet un maximum local en  $x_0$ .

Si  $f'$  est négative, puis s'annule en  $x_0$  en changeant de signe, alors on dit que  $f$  admet un minimum local en  $x_0$ .

## Activité 2

On a représenté ci-dessous une fonction  $f$ .  
Identifier ses extrema locaux.



## Activité 3

Soit  $f$  une fonction définie et dérivable sur  $]-1, 2[$ .

On a résumé dans le tableau ci-dessous, le signe et les valeurs qui annulent la dérivée  $f'$  de  $f$ .

$x$	-1	$\frac{1}{3}$	1	2	
$f'(x)$	+	0	-	0	+

- Déterminer le maximum local de  $f$ .
- Déterminer le minimum local de  $f$ .

## Activité 4

Pour chacune des fonctions  $f$  ci-dessous, étudier le signe de  $f'$  et en déduire les extrema locaux de  $f$ .

a.  $f: x \mapsto 2x^2 - 4x + 1$ .      b.  $f: x \mapsto x^3 + x^2 + x + 4$ .      c.  $f: x \mapsto x^4 + 2x^2 + 7$ .

## Activité 5

Soit  $h$  une fonction définie et dérivable sur  $]-3, 3[$ .

On a résumé dans le tableau ci-dessous, les variations de  $h$ .

$x$	-3	-2	1	3
$h'(x)$				
$h(x)$	$\frac{9}{2}$	$\frac{19}{3}$	$\frac{11}{6}$	$\frac{21}{2}$

Arrows indicate the direction of variation: from  $x = -3$  to  $x = -2$ ,  $h$  increases; from  $x = -2$  to  $x = 1$ ,  $h$  decreases; from  $x = 1$  to  $x = 3$ ,  $h$  increases.

Déterminer le signe de  $h'$  et préciser les extrema locaux de  $h$ .

# L'essentiel du cours

Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle ouvert  $I$  et  $a$  un réel de  $I$ .

S'il existe un nombre réel  $\ell$  tel que  $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$  se rapproche de  $\ell$  lorsque  $x$  se rapproche de  $a$ , on dit que  $f$  est dérivable en  $a$ .

Le réel  $\ell$ , est alors appelé le nombre dérivé de  $f$  en  $a$  et il est noté  $f'(a)$ .

## Tangente à une courbe

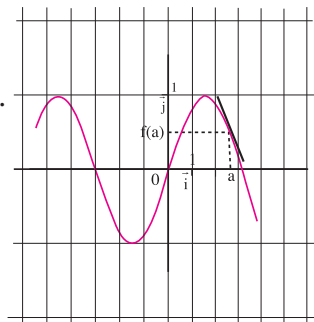
Le plan est muni d'un repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle ouvert  $I$  et  $a$  un réel de  $I$ .

$f$  est dérivable en  $a$ , si et seulement si, la courbe représentative de  $f$  admet au point  $M(a, f(a))$  une tangente  $T$ , de pente un réel.

Dans ce cas  $T$  a pour équation  $y = f'(a)(x-a) + f(a)$ .

Un vecteur directeur de  $T$  est  $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ f'(a) \end{pmatrix}$ .



## Dérivées usuelles

Fonction $f$	$f'(x)$
$f$ est une fonction constante.	$f'(x) = 0, x \in \mathbb{R}$ .
$f : x \mapsto ax + b$ .	$f'(x) = a, x \in \mathbb{R}$ .
$f : x \mapsto x^2$ .	$f'(x) = 2x, x \in \mathbb{R}$ .
$f : x \mapsto x^n, n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ .	$f'(x) = nx^{n-1}, n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}, x \in \mathbb{R}$ .
$f : x \mapsto \frac{1}{x}$ .	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}, x \in \mathbb{R}^*$ .
$f : x \mapsto \frac{ax + b}{cx + d}$ .	$f'(x) = \frac{ad - bc}{(cx + d)^2}, x \neq -\frac{d}{c}$ .

## Théorème

Soit  $f$  une fonction dérivable sur un intervalle ouvert  $I$ .

La fonction  $f$  est constante sur  $I$ , si et seulement si, pour tout  $x$  appartenant à  $I$ ,  $f'(x) = 0$ .

La fonction  $f$  est croissante sur  $I$ , si et seulement si, pour tout  $x$  appartenant à  $I$ ,  $f'(x) \geq 0$ .

La fonction  $f$  est décroissante sur  $I$ , si et seulement si, pour tout  $x$  appartenant à  $I$ ,  $f'(x) \leq 0$ .

## Théorème et définition

Soit  $f$  une fonction dérivable sur un intervalle ouvert  $I$  et  $x_0$  un élément de  $I$ .

Si  $f'$  s'annule en  $x_0$  en changeant de signe, alors  $f$  admet un extremum local en  $x_0$ .

# Test d'auto-évaluation

## I. Choisir la bonne réponse.

- Si  $x$  se rapproche de 0 alors  $\frac{x^2 + x}{x}$  se rapproche de  
a.  $-1$ .                      b.  $0$ .                      c.  $1$ .
- Le nombre dérivé en 0 de la fonction  $f$  définie par  $f(x) = x^2 - 2x + 3$  est  
a.  $3$ .                      b.  $-2$ .                      c.  $1$ .
- Le nombre dérivé en  $-2$  de la fonction  $f$  définie par  $f(x) = \frac{1}{x}$  est  
a.  $0$ .                      b.  $-\frac{1}{2}$ .                      c.  $-\frac{1}{4}$ .
- Le nombre dérivé en 0 de la fonction  $f$  définie par  $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$  est  
a.  $-1$ .                      b.  $2$ .                      c.  $0$ .
- La tangente à la courbe représentative de la fonction  $f : t \mapsto x^2 + x$  en son point d'abscisse 1 a pour équation  
a.  $y = 2x + 1$ .                      b.  $y = 3x + 2$ .                      c.  $y = 3x + 1$ .
- La tangente à la courbe représentative de la fonction  $f : t \mapsto x^2 + 2x + 1$  admet en son point d'intersection avec l'axe des ordonnées une tangente d'équation  
a.  $y = 1$ .                      b.  $y = 2x + 1$ .                      c.  $y = x + 1$ .

## II. Cocher la bonne réponse sachant que chacune des réponses proposées peut être vraie ou fausse.

- Soit la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$f(x) = x^3 - x^2 + x - 1.$$

- ◆ la fonction  $f$  s'annule en 1.
- ◆ la dérivée  $f'$  s'annule en 1 et  $\frac{1}{3}$ .
- ◆  $f$  est croissante sur  $]1, \frac{1}{3}[$ .

- Soit la fonction  $f$  définie sur  $]1, +\infty[$  par  $f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$ .

- ◆  $f'(x) = \frac{3}{(x-1)^2}$ .
- ◆  $f$  est décroissante sur  $]1, +\infty[$ .
- ◆ La fonction  $f$  ne s'annule jamais sur son intervalle de définition.

## III. Deux fonctions $f$ et $g$ dérivables en $x_0$ ont la même valeur en $x_0$ . Ont-elles le même nombre dérivé en $x_0$ ?

# Exercices et problèmes

## Exercice 1

a) Calculer le nombre dérivé de la fonction  $f$  au réel  $a$  indiqué, dans chacun des cas ci-dessous.

$$f(x) = \sqrt{x} ; a = \frac{21}{6}.$$

$$f(x) = x - \frac{1}{2} ; a = \frac{1}{2}.$$

$$f(x) = 5x^2 + x - 1 ; a = -3.$$

$$f(x) = x^4 - 3x^3 + 5 ; a = 1.$$

$$f(x) = \frac{4}{2x+3} ; a = -1.$$

$$f(x) = \frac{-1+x}{x+5} ; a = 2.$$

$$f(x) = 4x + 3 - \frac{1}{-x+1} ; a = 0.$$

$$f(x) = x^2 - 2x + 3 + \frac{x-2}{x} ; a = 2.$$

b) Le plan est muni d'un repère.

Déterminer, dans chacun des cas ci-dessus, une équation de la tangente à la courbe de  $f$  au point d'abscisse le réel  $a$  indiqué.

## Exercice 2

Déterminer la fonction dérivée de la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$ , dans chacun des cas ci-dessous.

$$f(x) = 3 - 2x.$$

$$f(x) = -x + 1,$$

$$f(x) = -3x^2 + 1,$$

$$f(x) = x^4 - 3x^3 + 2x - 1,$$

$$f(x) = -x^3 + x^2 + \sqrt{2}x,$$

$$f(x) = -x^2 - 1 + x^3,$$

## Exercice 3

Déterminer le domaine de définition de la fonction  $f$  puis la fonction dérivée de la fonction  $f$ , dans chacun des cas ci-dessous.

$$f(x) = -\frac{1}{x+1},$$

$$f(x) = \frac{1-5x}{-2x+2},$$

$$f(x) = \frac{x}{x+2},$$

$$f(x) = \frac{-2+5x}{x},$$

$$f(x) = \frac{-2x+2}{x-1},$$

$$f(x) = -\frac{1}{x+4} + 4.$$

## Exercice 4

Déterminer le domaine de définition de la fonction  $f$  puis la fonction dérivée de la fonction  $f$ , dans chacun des cas ci-dessous.

$$f(x) = 4x + \frac{1}{x-5},$$

$$f(x) = \frac{x-1}{4-x} + 2x - 1,$$

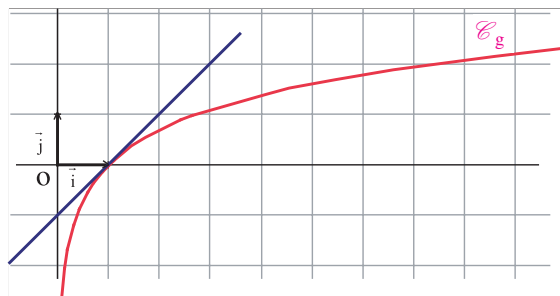
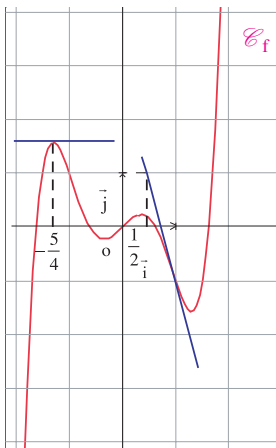
$$f(x) = 2x^4 - \frac{1}{x} + x^2 + 5,$$

$$f(x) = 2x + \frac{4x-1}{-2x+3} - 3,$$

## Exercice 5

Le plan est muni d'un repère orthonormé.

On a représenté ci-dessous, les courbes représentatives des fonctions  $f$  et  $g$ .



Déterminer  $f'(-\frac{5}{4})$ ,  $f'(1)$  et  $g'(1)$ .

## Exercice 6

Le plan est muni d'un repère orthonormé.

On désigne par  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{C}'$ , les courbes représentatives respectives des fonctions  $f$  et  $g$  définies sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = 2x^3 - x^2 - 2$  et  $g(x) = 2x^3 - x^2 + 1$ .

Soit  $T$  et  $T'$  les tangentes respectives à  $\mathcal{C}$  et à  $\mathcal{C}'$  au point d'abscisse 1.

1. Déterminer une équation de chacune des droites  $T$  et  $T'$ .
2. Quelle est la position relative des droites  $T$  et  $T'$  ?

## Exercice 7

Le plan est muni d'un repère orthonormé.

On désigne par  $\mathcal{C}$ , la courbe représentative de la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = x^3$ .

1. Déterminer la fonction dérivée de  $f$ .
2. Soit  $A$  et  $B$  les points de  $\mathcal{C}$  d'abscisses respectives  $-1$  et  $2$ .
  - a. Déterminer le coefficient directeur de la droite  $(AB)$ .
  - b. Déterminer les points de  $\mathcal{C}$  pour lesquels la tangente à  $\mathcal{C}$  est parallèle à la droite  $(AB)$ .

## Exercice 8

Le plan est muni d'un repère orthonormé.

On désigne par  $\mathcal{C}$ , la courbe représentative de la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = 2x^3 - 3x$ .

1. Déterminer la fonction dérivée de  $f$ .
2. Soit  $T$  et  $T'$  les tangentes à  $\mathcal{C}$  respectivement aux points d'abscisses  $2$  et  $-2$ .

Quelle est la position relative de  $T$  et  $T'$  ?

## Exercice 9

Le plan est muni d'un repère orthonormé.

On désigne par  $\mathcal{C}$ , la courbe représentative de la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = -x^2 + x + 1$ .

1. Déterminer la fonction dérivée de  $f$ .
2. Dans chacun des cas suivants, déterminer les coordonnées des points de  $\mathcal{C}$  où la tangente :
  - admet  $2$  pour coefficient directeur ;
  - est parallèle à la droite d'équation  $y = -2x + 1$ .

## Exercice 10

Le plan est muni d'un repère orthonormé.

On désigne par  $\mathcal{C}$ , la courbe représentative de la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = 2x^3 - x + 4$ .

1. Déterminer la fonction dérivée de  $f$ .
2. Dans chacun des cas suivants, déterminer les coordonnées des points de  $\mathcal{C}$  où la tangente :
  - admet  $2$  pour coefficient directeur ;
  - est parallèle à la droite d'équation  $y = -x + 3$ .

## Exercice 11

Le plan est muni d'un repère orthonormé.

On désigne par  $\mathcal{C}$ , la courbe représentative de la fonction  $f : x \mapsto \frac{5}{x+3}$ .

- Déterminer le domaine de définition de  $f$ .
- Déterminer la fonction dérivée de  $f$ .
- Dans chacun des cas suivants, déterminer les coordonnées des points de  $\mathcal{C}$  où la tangente :
  - admet  $-5$  pour coefficient directeur.
  - est parallèle à la droite d'équation  $y = -x + 1$ .

## Exercice 12

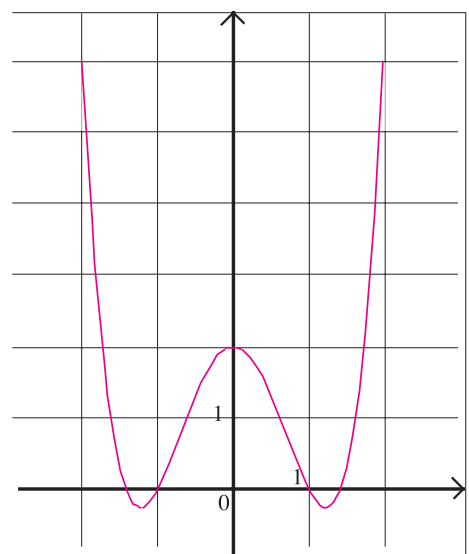
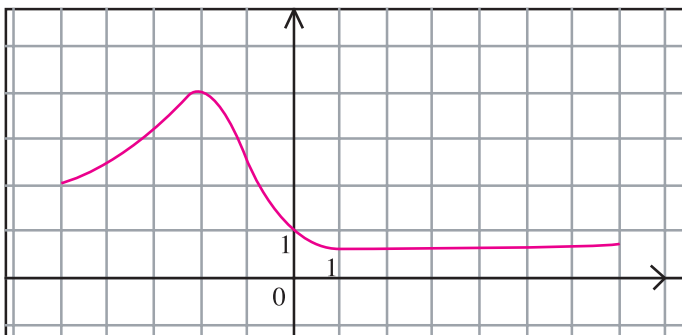
Le plan est muni d'un repère orthonormé.

On a résumé dans les tableaux ci-dessous, le signe de la dérivée ainsi que le sens de variation de chacune des fonctions  $f$  et  $g$ .

$x$	$-2$	$-\sqrt{\frac{3}{2}}$	$0$	$\sqrt{\frac{3}{2}}$	$2$
$f'(x)$	$-$	$0$	$+$	$0$	$-$
$f$	$6$	$-\frac{1}{4}$	$2$	$-\frac{1}{4}$	$6$

$x$	$-5$	$-2$	$2$	$7$
$g'(x)$	$+$	$0$	$-$	$0$
$g$	$\frac{29}{14}$	$4$	$\frac{6}{7}$	$\frac{53}{80}$

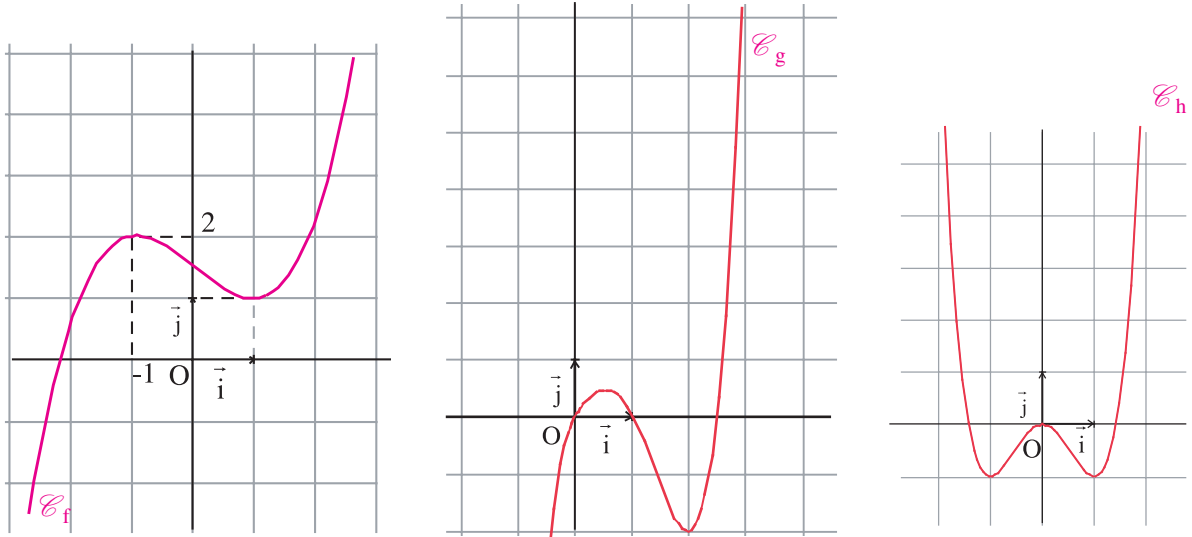
Associer à chacune des fonctions  $f$  et  $g$  sa représentation graphique.



### Exercice 13

Le plan est muni d'un repère orthonormé.

On a représenté ci-dessous, les courbes représentatives des fonctions  $f$ ,  $g$  et  $h$  définies sur  $\mathbb{R}$ .



1. Donner le sens de variation de chacune des fonctions  $f$ ,  $g$  et  $h$ .
2. En déduire le signe de la dérivée de chacune de ces fonctions.

### Exercice 14

Donner le sens de variation de chacune des fonctions ci-dessous sur l'intervalle  $I$  indiqué.

$$f: x \mapsto -x^2 - 2x + 3; I = \mathbb{R}.$$

$$g: x \mapsto 2x^3 - x^2 - x + 1; I = \mathbb{R}.$$

$$h: x \mapsto 2x^4 - x^3 - 1; I = \mathbb{R}.$$

$$l: x \mapsto \frac{4}{x-3}; I = ]-\infty, 3[.$$

$$k: x \mapsto -2 + \frac{x+1}{-x+1}; I = ]1, +\infty[.$$

### Exercice 15

Le plan est muni d'un repère orthonormé.

On désigne par  $\mathcal{C}$ , la courbe représentative de la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = x^3 - 3x$ .

1. Déterminer la fonction dérivée de  $f$ .
2. a. Montrer que la fonction  $f$  admet deux extrema.  
b. Préciser la nature de chacun des extrema de  $f$ .

### Exercice 16

Le plan est muni d'un repère orthonormé.

On désigne par  $\mathcal{C}$ , la courbe représentative de la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = 2x^3 - 2x^2 - 2x - 1$ .

1. Déterminer la fonction dérivée de  $f$ .
2. a. Montrer que la fonction  $f$  admet deux extrema locaux.  
b. Préciser la nature de chacun des extrema locaux de  $f$ .

# Avec l'ordinateur

## TP1 :

Visualisation de la tangente en un point à la courbe d'une fonction et la détermination de sa coefficient directeur sous GEOPLANW.

a. Traiter le texte suivant sous un logiciel de traitement de texte (Notepad, WordPad, Microsoft Word).

Position de Roxy: Xmin: -4.3426637431, Xmax: 5.6573362569, Ymax: 4.4143540353  
Objet dessinable Roxy, particularités: rouge, avec quadrillage, dessiné

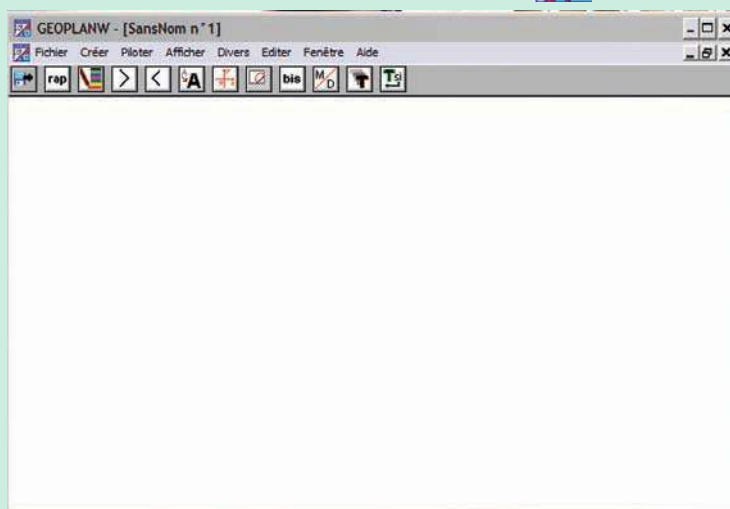
f fonction:  $x \mapsto (-x^2 + 5x - 1) / (x^2 + 1)$   
C graphe de f sur [-10,10] (1000 points, repère Roxy)  
Objet dessinable C, particularités: points liés  
X point libre sur la droite ox  
Objet libre X, paramètre: -4.7511702965  
Pas de pilotage au clavier de X: 0.001 (/ fenêtre,modifiable)  
x abscisse de X dans le repère ox  
M point de coordonnées (x,f(x)) dans le repère Roxy  
A point de coordonnées (2,f(2)) dans le repère Roxy  
Droite (AM)  
Objet dessinable (AM), particularités: bleu  
m coefficient directeur de la droite (AM) (repère Roxy)  
a abscisse de A (repère Roxy)  
dis = a-x

Hauteur de la zone des affichages: 50  
Af0 affichage du scalaire m (2 décimales)  
Position de l'affichage Af0: (0,0)  
Af1 affichage du scalaire dis (2 décimales)  
Position de l'affichage Af1: (224,0)

Sélectionner tout le texte est le copier : Aller dans la barre de menu et choisir

Edition / Copier

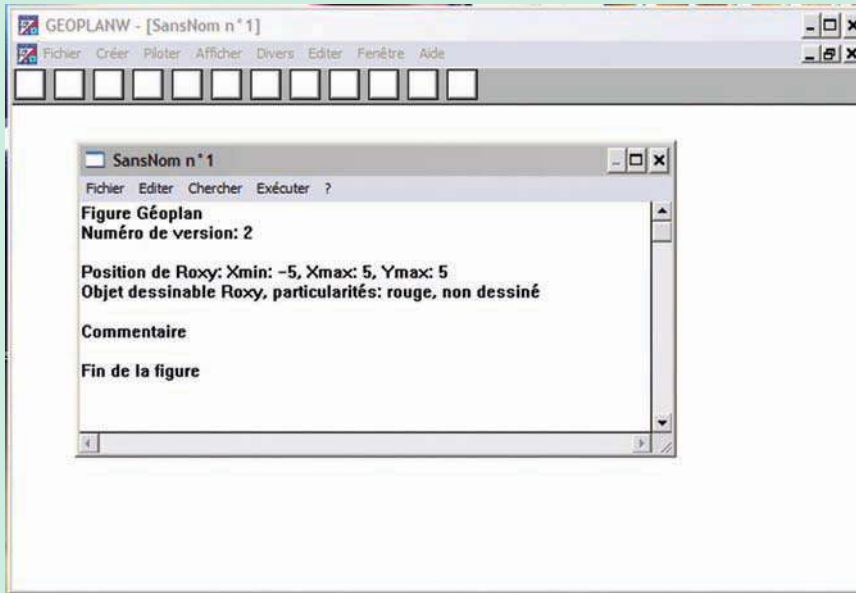
b. Ouvrir le programme GeoplanW en exécutant



c. Aller dans la barre de menu et choisir

Editer / Editer texte figure

On obtient



Effacer le texte suivant

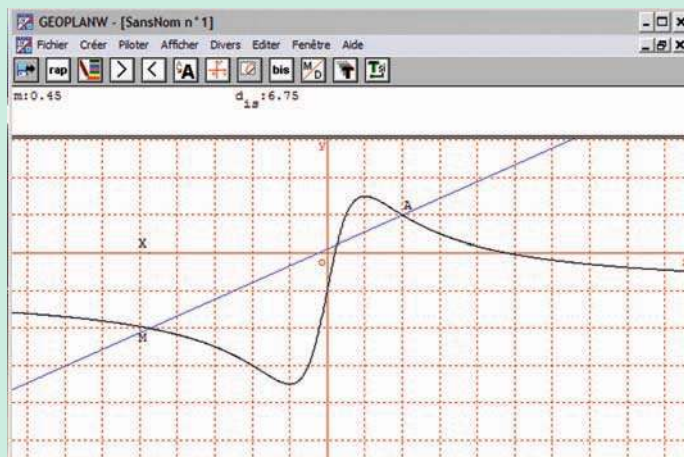
Position de Roxy: Xmin: -5, Xmax: 5, Ymax: 5  
Objet dessinable Roxy, particularités: rouge, non dessiné  
Commentaire  
Fin de la figure

Et la remplacer par le texte traiter au départ on procédant comme suit

Edition coller

d. Aller dans la barre de menu et choisir

Exécution



e. Avec les flèches du clavier en rapproche le point M au point A.  
m est coefficient directeur de la droite (AM) et  $d_{1s} = x_A - x_M$ .

L'étude d'une fonction à valeurs réelles comporte en particulier la détermination de ses extremums. C'est là un des objets du calcul différentiel classique lorsque la source de cette fonction est un espace numérique ; c'est l'objet de ce qu'Euler a appelé le calcul des variations lorsque cette source est un espace fonctionnel.

On rencontre déjà dans la plus haute antiquité des problèmes d'une telle nature. La légende ne veut-elle pas que Didon, lorsqu'elle fonda Carthage, ait délimité la plus grande étendue qu'elle pût circonscrire à l'aide de lanières découpées dans la peau d'un taureau ? Et il est bien connu que les Grecs caractérisaient un segment de droite comme la ligne de plus petite longueur joignant ses extrémités.

Ce n'est cependant qu'au XVIII<sup>e</sup> siècle, à la suite de l'essor du calcul infinitésimal, qu'Euler et Lagrange établirent les fondements du calcul des variations et donnèrent une première condition d'extremum. Cette équation d'Euler-Lagrange allait jouer un rôle très important, surtout en physique, où elle justifiait les principes variationnels : principe de Fermat pour la propagation de la lumière dans les milieux différemment réfringents ; principes de moindre action de Maupertuis et Hamilton pour la détermination des mouvements en mécanique analytique.

La recherche de conditions d'extremum se poursuit aux XVIII<sup>e</sup> et XIX<sup>e</sup> siècles, notamment avec les travaux de Legendre, Jacobi et Weierstrass, pour aboutir au début du XX<sup>e</sup> siècle à une théorie bien élaborée que l'on situe aujourd'hui dans le cadre du calcul différentiel au sens de Fréchet dans les espaces de Banach. Mais de difficiles problèmes relatifs à l'existence de ces extremums restent encore ouverts.

Plus récemment, les travaux de Morse relancèrent l'intérêt porté au calcul des variations. Utilisant à la fois des techniques d'analyse fonctionnelle, de topologie algébrique et de topologie différentielle, ils sont à l'origine de ce qu'on appelle maintenant l'analyse différentielle globale, une des théories carrefours de la mathématique actuelle.

# Chapitre 3

**Exemples de  
fonctions  
polynômes**

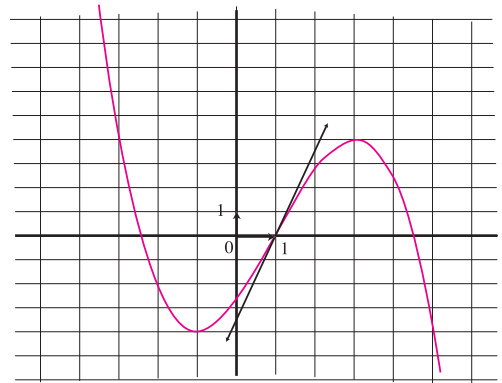
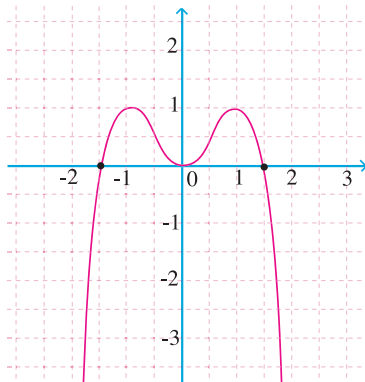
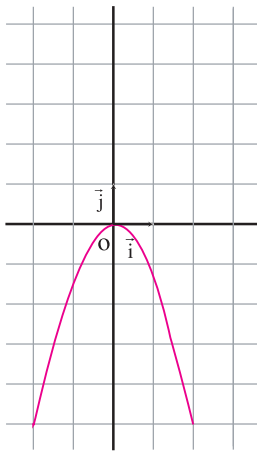
# Chapitre

# 3

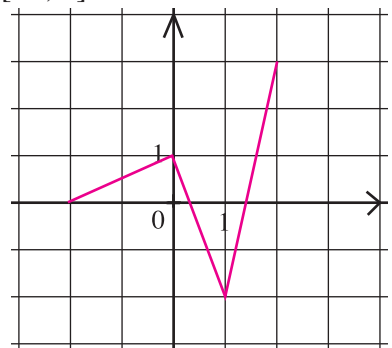
## Exemples de fonctions polynômes

### Vérifier vos acquis

1. Les graphiques ci-dessous représentent des fonctions définies sur  $\mathbb{R}$ .  
Indiquer dans chaque cas les variations de la fonction.



2. Le graphique ci-contre représente une fonction  $f$  définie sur  $[-2, 2]$ .
- Déterminer les images par  $f$  de  $-2$  ;  $0$  ;  $1$ .
  - Déterminer les antécédents par  $f$  de  $1$  et  $2$ .
  - Indiquer le sens de variation de  $f$  sur  $[-2, 2]$ .

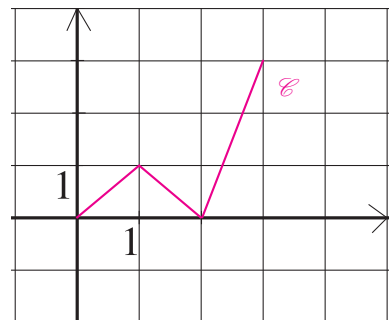


3. Indiquer la bonne réponse.

La fonction définie par  $f(x) = x^3 + 2x$  est

- paire.
- impaire.

4.  $f$  est une fonction paire définie sur  $[-2, 2]$  et de courbe représentative  $\mathcal{C}$ . Compléter  $\mathcal{C}$ .



## Découvrir

### 1. Limites à l'infini d'une fonction polynôme

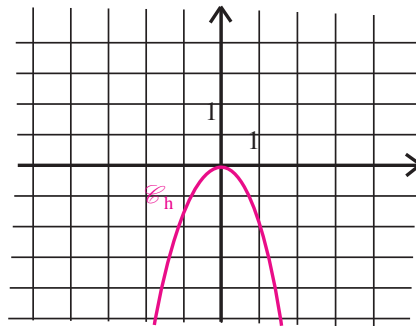
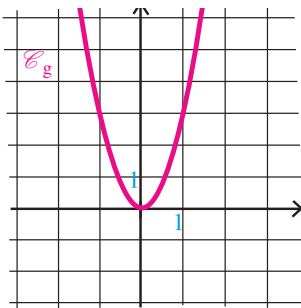
#### Activité 1

Le plan est muni d'un repère orthogonal  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

Soit  $g$  et  $h$  les fonctions définies sur  $\mathbb{R}$  respectivement par  $g(x) = 2x^2$  et  $h(x) = -2x^2$ .

On donne ci dessous leurs représentations graphiques respectives  $\mathcal{C}_g$  et  $\mathcal{C}_h$ .

On appelle fonction polynôme de degré  $n$  toute fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ ,  $a_n \neq 0$ .



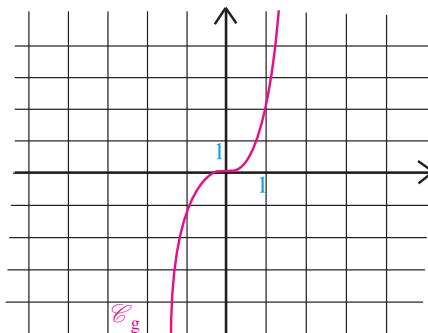
1. a. Calculer  $g(10^{10})$  ;  $g(10^{100})$ .  
b. Que peut-on conjecturer pour  $g(x)$ , lorsque  $x$  prend des valeurs positives de plus en plus grandes ?
2. a. Calculer  $g(-10^{10})$  ;  $g(-10^{100})$ .  
b. Que peut-on conjecturer pour  $g(x)$ , lorsque  $-x$  prend des valeurs positives de plus en plus grandes ?
3. Reprendre les mêmes questions pour la fonction  $h$ .

#### Activité 2

Le plan est muni d'un repère orthogonal  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

Soit  $g$  et  $h$  les fonctions définies sur  $\mathbb{R}$  respectivement par  $g(x) = 2x^3$  et  $h(x) = -2x^3$ .

On donne ci-dessous la représentation graphique de  $g$ .



1. a. Calculer  $g(10^{10})$  ;  $g(10^{100})$ .  
b. Que peut-on conjecturer pour  $g(x)$ , lorsque  $x$  prend des valeurs positives de plus en plus grandes ?

2. a. Calculer  $g(-10^{10})$  ;  $g(-10^{100})$  .

b. Que peut-on conjecturer pour  $g(x)$ , lorsque  $-x$  prend des valeurs positives de plus en plus grandes ?

3. Reprendre les mêmes questions pour la fonction  $h$  définie par  $h(x) = -2x^3$ .

### Définition

Soit  $f$  une fonction définie sur  $\mathbb{R}$  .

Lorsque le réel  $f(x)$  prend des valeurs positives de plus en plus grandes lorsque  $x$  prend des valeurs positives de plus en plus grandes, on dit que  $f$  tend vers  $+\infty$  lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$  et on écrit  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ .

Lorsque le réel  $f(x)$  prend des valeurs positives de plus en plus grandes lorsque  $-x$  prend des valeurs positives de plus en plus grandes, on dit que  $f$  tend vers  $+\infty$  lorsque  $x$  tend vers  $-\infty$  et on écrit  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ .

Lorsque le réel  $-f(x)$  prend des valeurs positives de plus en plus grandes lorsque  $x$  prend des valeurs positives de plus en plus grandes, on dit que  $f$  tend vers  $-\infty$  lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$  et on écrit  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ .

Lorsque le réel  $-f(x)$  prend des valeurs positives de plus en plus grandes lorsque  $-x$  prend des valeurs positives de plus en plus grandes, on dit que  $f$  tend vers  $-\infty$  lorsque  $x$  tend vers  $-\infty$  et on écrit  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ .

Le théorème ci-dessous donne les limites à l'infini des fonctions polynômes.

### Théorème (admis)

$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0, a_n > 0, n$ pair.	$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$	$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$
$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0, a_n < 0, n$ pair.	$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$	$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$
$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0, a_n > 0, n$ impair.	$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$	$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$
$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0, a_n < 0, n$ impair.	$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$	$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$

### Activité 3

Déterminer les limites des fonctions ci-dessous, en  $+\infty$  et en  $-\infty$ .

$$g(x) = 5x - 1 \quad ; \quad f(x) = -3x^2 + x - 2 \quad ; \quad k(x) = 4x^2 + 1;$$

$$h(x) = -x^3 + 2x^2 - x + 2 \quad ; \quad l(x) = -2x^4 + x^3 - x + 5.$$

## 2. Fonctions du type $x \mapsto ax^2 + bx + c$ , $a$ non nul

### Activité 1

Le plan est muni d'un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

Soit la fonction  $f : x \mapsto 2x^2 - x - 1$  et  $\mathcal{C}$  sa courbe représentative.  
On a dressé ci-dessous le tableau de variation de  $f$ .

X	$-\infty$	$\frac{1}{4}$	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
f	$+\infty$	$-\frac{9}{8}$	$+\infty$

Le tableau de variation d'une fonction dérivable  $f$  est un tableau où sont résumées les données suivantes :

- L'ensemble de définition de  $f$ .
- Le signe de la dérivée  $f'$  et les valeurs annulant  $f'$ .
- Les variations de  $f$  et les limites de  $f$  aux bornes de son ensemble de définition.

1. Calculer  $f'(x)$  et déterminer une équation des tangentes à  $\mathcal{C}$  aux points  $x$  d'abscisses  $-1$  ;  $1$  et  $2$ .
2. Déterminer les coordonnées du point d'intersection de  $\mathcal{C}$  avec l'axe des ordonnées.
3. Déterminer les coordonnées des points d'intersection de  $\mathcal{C}$  avec l'axe des abscisses.
4. Tracer  $\mathcal{C}$ .

### Activité 2

Le plan est muni d'un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = x^2 - 2x + 4$  et  $\mathcal{C}$  sa courbe représentative.

1. Vérifier que pour tout réel  $x$ ,  $f'(x) = 2x - 2$ .
2. Déterminer les limites de  $f$  en  $+\infty$  et en  $-\infty$ .
3. Dresser le tableau de variation de  $f$ .
4. Déterminer le point de la courbe  $\mathcal{C}$  d'abscisse nulle.
5. Déterminer l'intersection de  $\mathcal{C}$  avec l'axe des abscisses.
6. Tracer  $\mathcal{C}$ .

### Activité 3

Le plan est muni d'un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

L'évolution de la population d'une ville dans  $x$  années est modélisée par

la fonction  $x \mapsto P(x) = -x^2 + 70x + 3000$ ,  $0 \leq x \leq 100$ .

On désigne par  $\mathcal{C}$  la courbe représentative de  $P$ .

1. Quelle est actuellement la population de la ville ? Quelle sera-t-elle dans 10 ans ?
2. Dresser le tableau de variation de  $f$ .
4. Déterminer les coordonnées du point d'intersection de  $\mathcal{C}$  avec l'axe des ordonnées.
5. Calculer  $P(100)$  et en déduire l'intersection de  $\mathcal{C}$  avec l'axe des abscisses.
6. Tracer  $\mathcal{C}$ .

### 3. Fonctions du type $x \mapsto ax^3 + bx^2 + cx + d$ , $a$ non nul

#### Activité 1

Le plan est muni d'un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

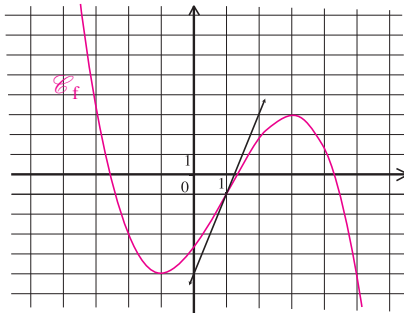
On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = x^3 - 3x$ .

On désigne par  $\mathcal{C}$  sa courbe représentative.

- a. Calculer  $f'(x)$ .  
b. Donner une équation de la tangente à  $\mathcal{C}$  en 0.  
c. Déterminer le signe de  $f'(x)$ .
- Déterminer  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .
- Dresser le tableau de variation de  $f$ .
- Tracer  $\mathcal{C}$ .

#### Activité 2

La courbe représentative  $\mathcal{C}$  ci-dessous est celle d'une fonction polynôme du troisième degré définie par  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ,  $a$  non nul.



- Utiliser le graphique pour
  - Déterminer le signe de  $f'(x)$ .
  - Déterminer une équation de la tangente au point d'abscisse 1.
  - Déterminer les limites de  $f$  en  $+\infty$  et en  $-\infty$ .
  - Dresser le tableau de variation de  $f$ .
  - Résoudre l'équation  $f(x) = 0$ .
- Reproduire le graphique et représenter les fonctions  $x \mapsto |f(x)|$  ;  $x \mapsto f(x) + 2$  ;  $x \mapsto -f(x)$ .

#### Activité 3

Le plan est muni d'un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

Soit  $f$  et  $g$  les fonctions définies respectivement par  $f(x) = x^3 - x$  et  $g(x) = x^2 - 1$ .

- Etudier et représenter  $f$ .
- Etudier et représenter  $g$ .
- Résoudre graphiquement  $f(x) = g(x)$  ;  $f(x) \geq g(x)$  ;  $f(x) \leq g(x)$ .
- Retrouver les résultats de la 3<sup>ème</sup> question par le calcul.

## Activité 4

On a représenté ci-dessous le tableau de variation d'une fonction polynôme du type  $f : x \mapsto ax^3 + bx^2 + cx + d$ ,  $a$  non nul.

$x$	$-\infty$	$0$	$2$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$0$	$-0$	$+$
$f(x)$	$-\infty$	$\frac{31}{27}$	$1$	$+\infty$

1. Déterminer le signe de  $a$ .
2. Déterminer les extrema de  $f$ .
3. Représenter graphiquement  $f$ .

## Activité 5

La quantité de fromage (en Kg) produit par une usine  $t$  heures après 9h est  $Q(t) = (2t + 10)(3t + 8)^2 - 640$ ,  $0 \leq t \leq 6$ .

1. Quelle est la quantité de fromage produite à 12h ?
2. Etudier et représenter la fonction  $Q$ .
3. Déterminer le taux moyen de production entre 9h et 12h.

## 3. Fonctions du type $x \mapsto ax^4 + bx^2 + c$ , $a$ non nul

### Activité 1

Le plan est muni d'un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = x^4 - 4x^2 + 1$ .

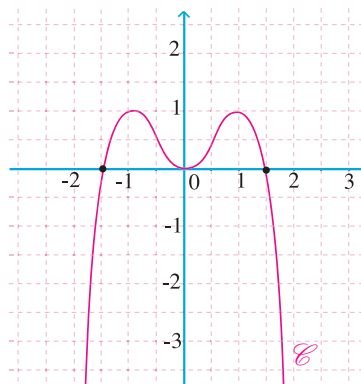
On désigne par  $\mathcal{C}$  sa courbe représentative.

1. a. Calculer  $f'(x)$ .  
 b. Donner une équation de la tangente à  $\mathcal{C}$  en 0.  
 c. Déterminer le signe de  $f'(x)$ .
2. Déterminer  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .
3. Dresser le tableau de variation de  $f$ .
4. Tracer  $\mathcal{C}$ .

## Activité 2

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  dont la représentation graphique  $\mathcal{C}$  est donnée ci-dessous.

1. Dresser le tableau de variation de  $f$ .
2. Résoudre l'équation  $f(x) = 0$ .
3. Résoudre l'équation  $f'(x) = 0$ .
4. Déterminer les extrema locaux de  $f$ .
5. Reproduire le graphique et représenter les fonctions  
 $x \mapsto |f(x)|$  ;  $x \mapsto f(x) - 1$  ;  $x \mapsto f(x - 1)$  ;  $x \mapsto -f(x)$  ;  $x \mapsto 2f(x)$ .
- 6 Représenter la droite  $D$  d'équation  $y = -x + 2$  et déterminer graphiquement l'intersection de  $D$  et  $\mathcal{C}$ .



# L'essentiel du cours

## Théorème

$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0, a_n > 0, n \text{ pair.}$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$	$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$
$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0, a_n < 0, n \text{ pair.}$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$	$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$
$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0, a_n > 0, n \text{ impair.}$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$	$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$
$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0, a_n < 0, n \text{ impair.}$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$	$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$

## Tableau de variation

Le tableau de variation d'une fonction dérivable  $f$  est un tableau où sont résumées les données suivantes :

- L'ensemble de définition de  $f$ .
- Le signe de la dérivée  $f'$  et les valeurs annulant  $f'$ .
- Les variations de  $f$  et les limites de  $f$  aux bornes de son ensemble de définition.

## Plan d'étude d'une fonction

Pour étudier une fonction, on procède selon les étapes suivantes

1. Déterminer l'ensemble de définition.
2. Déterminer les limites aux bornes de l'ensemble de définition.
3. Calculer la dérivée et étudier son signe.
4. Dresser le tableau de variation.
5. Tracer la courbe.

# Test d'auto-évaluation

## I. Répondre par vrai ou faux.

1. Soit la fonction sur définie  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = x^3 - 3x + 1$ .

La fonction  $f$  est

- ◆ croissante sur  $[-1, 1]$ ,
- ◆ décroissante sur  $[0, +\infty[$ ,
- ◆ croissante sur  $[3, +\infty[$ .

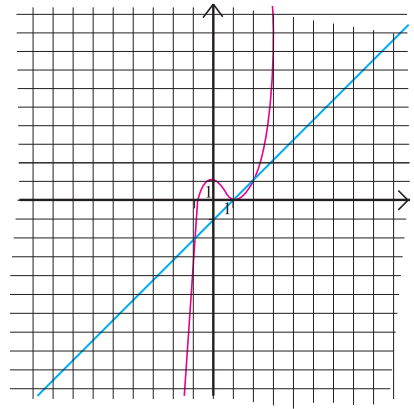
2. On a représenté ci-contre la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = x^3 - 2x^2 + 1$  et la droite  $D$  d'équation  $y = x - 1$ .

Alors

- ◆ L'ensemble des solutions de l'équation  $f(x) = x - 1$  est
  - a.  $\{-1, 2\}$ .
  - b.  $\{1, 2\}$ .
  - c.  $\{-1, 1, 2\}$ .

- ◆ L'ensemble des solutions de l'équation  $f(x) \geq x - 1$  est

- a.  $]-\infty, -1] \cup [1, 2]$ .
- b.  $[-1, 1] \cup [2, +\infty[$ .
- c.  $[-1, 2]$ .

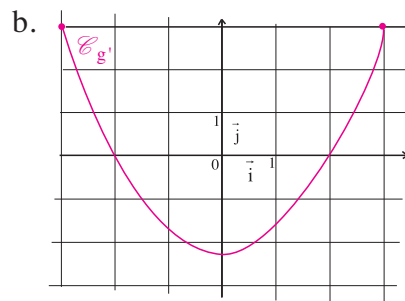
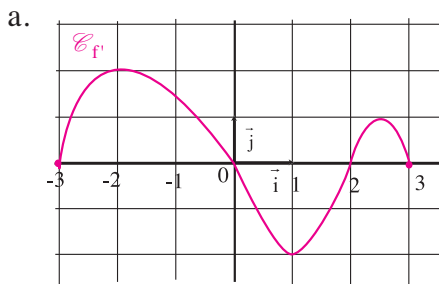


3. Soit  $f$  définie par  $f(x) = x^4 - 2x^2$ .

- ◆ La fonction  $f$  présente un maximum sur  $[-1, 1]$ .
- ◆ La fonction  $f$  présente un minimum sur  $[0, 2]$ .
- ◆  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ .

## II. Les courbes représentées sont celles des dérivées $f'$ et $g'$ de deux fonctions $f$ et $g$ dérivables sur $]-3, 3[$ .

Dresser les tableaux de variation des fonctions  $f$  et  $g$  sur l'intervalle  $]-3, 3[$ .



# Exercices et problèmes

## Exercice 1

Calculer les limites suivantes

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x-1); \lim_{x \rightarrow -\infty} (-3x-50); \lim_{x \rightarrow +\infty} (-3x^2 - x+1); \lim_{x \rightarrow -\infty} (5x^2 - 1); \lim_{x \rightarrow -\infty} (5x^2 - 10x+1);$$
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (-15x^2 - x - 36).$$

## Exercice 2

Calculer les limites suivantes

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 - x); \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 + x); \lim_{x \rightarrow +\infty} (-3x^3 + x^2 - x + 1); \lim_{x \rightarrow -\infty} (-3x^3 + 5x^2 - 1).$$

## Exercice 3

Calculer les limites suivantes

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^4 - x^2 + 1); \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^4 + x - 1000); \lim_{x \rightarrow +\infty} (-3x^4 + x^2 + 10^{1000}); \lim_{x \rightarrow -\infty} (3x^4 - 5x^2 - 10^{10000}).$$

## Exercice 4

Dresser le tableau de variation de chacune des fonctions ci-dessous

$$f : x \mapsto -x^2; f : x \mapsto -x^2 - 4x - 4; f : x \mapsto x^2 - 2x + \frac{1}{2}; f : x \mapsto -3x^2 + x; f : x \mapsto 2x^2 + \frac{1}{3}.$$

## Exercice 5

Dresser le tableau de variation de chacune des fonctions ci-dessous

$$f : x \mapsto 5x^3 + x + 1; f : x \mapsto x^3 - 2x^2 + x - 5; f : x \mapsto -x^3 - 4; f : x \mapsto -x^4 + x^3 + 1.$$

## Exercice 6

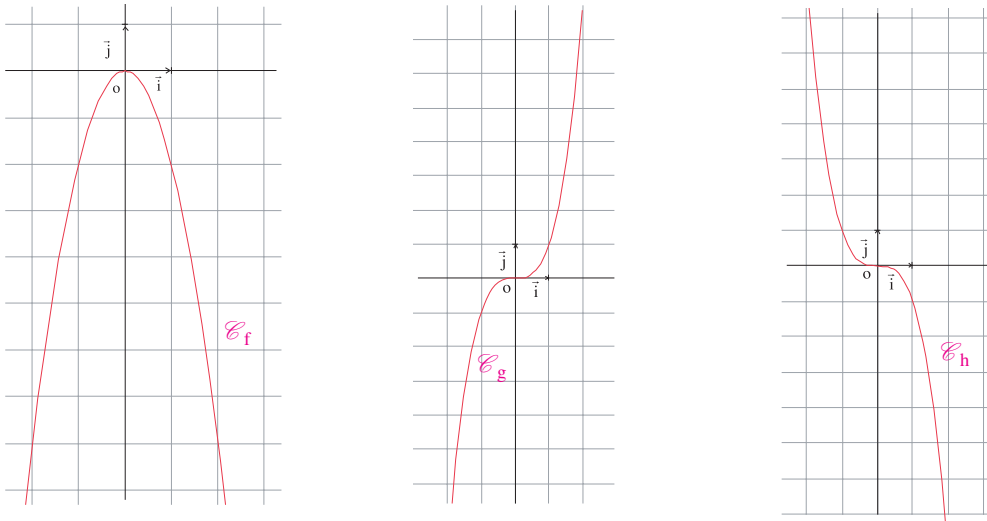
Dresser le tableau de variation de chacune des fonctions ci-dessous

$$f : x \mapsto 5x^4 + x^2; f : x \mapsto x^4 - 2x^2 + 5; f : x \mapsto -x^4 - 4; f : x \mapsto -x^4 + x^3 + 1$$

## Exercice 7

Le plan est muni d'un repère orthonormé.

On a représenté ci-dessous, les courbes représentatives des fonctions  $f$ ,  $g$  et  $h$ .



Dresser le tableau de variation de chacune des fonctions  $f$ ,  $g$  et  $h$ .

## Exercice 8

Pour chacune des fonctions ci-dessous, déterminer l'ensemble de définition, étudier ses limites aux bornes de l'ensemble de définition, calculer la dérivée, étudier son signe, puis dresser le tableau de variation et déterminer les extrema éventuels.

1.  $f(x) = 4x^2 - 8$ .
2.  $g(x) = x^3 - x$ .
3.  $h(x) = 2x^4 - 8x^2 + 5$ .

## Exercice 9

Le plan est muni d'un repère orthonormé.

On désigne par  $\mathcal{C}$  la courbe représentative de la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = x^2 + 2x - 1$ .

1. Dresser le tableau de variation de  $f$ .
2. Donner les équations des tangentes à  $\mathcal{C}$  aux points d'abscisses  $-1$  et  $0$ .
3. Tracer la courbe  $\mathcal{C}$ .
4. En déduire les courbes représentatives des fonctions  $x \mapsto f(x) + 1$  ;  $x \mapsto -f(x)$  ;  $x \mapsto f(x + 1)$ .

## Exercice 10

Le plan est muni d'un repère orthonormé.

On désigne par  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{P}'$  les paraboles d'équations respectives  $y = x^2$  et  $y = -\frac{1}{3}x^2 + 1$ .

1. Déterminer les coordonnées des points d'intersection de  $\mathcal{P}$  et de  $\mathcal{P}'$ , on notera  $A$  le point d'abscisse négative et  $B$  le point d'abscisse positive.
2. Soient  $T$  et  $T'$  les tangentes respectives à  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{P}'$  au point  $A$ . Déterminer une équation de chacune des droites  $T$  et  $T'$ .

- Soient  $D$  et  $D'$  les tangentes respectives à  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{P}'$  au point  $B$ .  
Déterminer une équation de chacune des droites  $D$  et  $D'$ .
- Tracer  $\mathcal{P}, \mathcal{P}', T, T', D$  et  $D'$ .

## Exercice 11

Le plan est muni d'un repère orthonormé.

On désigne par  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{C}'$ , les courbes représentatives respectives des fonctions  $f$  et  $g$  définies sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = x^2 + 2x - 1$  et  $g(x) = -x^2 - 6x - 9$ .

- Montrer que  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{C}'$  se coupent en un seul point que l'on notera  $A$ .
- Montrer que les courbes  $\mathcal{C}$  et à  $\mathcal{C}'$  admettent au point  $A$  la même tangente  $T$  dont on déterminera une équation.
- Tracer  $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$  et  $T$ .

## Exercice 12

Le plan est muni d'un repère orthonormé.

On désigne par  $\mathcal{C}$  la courbe représentative de la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = -x^3 - x - 1$ .

- Dresser le tableau de variation de  $f$ .
- Donner les équations des tangentes à  $\mathcal{C}$  aux points d'abscisses  $-1$  et  $1$ .
- Tracer la courbe  $\mathcal{C}$ .
- En déduire les courbes représentatives des fonctions  $x \mapsto 2f(x) + 1$  ;  
 $x \mapsto -f(x) + 2$  ;  $x \mapsto f(x - 1)$ ,  $x \mapsto |f(x)|$ .

## Exercice 13

Le plan est muni d'un repère orthonormé.

On désigne par  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{C}'$ , les courbes représentatives respectives des fonctions  $f$  et  $g$  définies sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = x^2 + x + 2$  et  $g(x) = x^3 + x^2 + x + 2$ .

- Dresser le tableau de variation de  $f$  et  $g$ .
- Tracer les courbes  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{C}'$ .
- Résoudre graphiquement les inéquations  $f(x) > 0$  ;  $g(x) > 0$  ;  $g(x) \leq f(x)$ .

## Exercice 14

Le plan est muni d'un repère orthonormé.

On désigne par  $\mathcal{C}$  la courbe représentative de la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = 3x^4 - x^2 + 3$ .

- Dresser le tableau de variation de  $f$ .
- Donner les équations des tangentes à  $\mathcal{C}$  aux points d'abscisses  $0$  et  $0.25$ .
- Tracer la courbe  $\mathcal{C}$ .
- Résoudre graphiquement les équations  $f(x) = 0$  ;  $f(x) = 3$  ;  $f(x) = -1$ .
- Résoudre graphiquement les inéquations  $f(x) \leq 0$  ;  $f(x) \geq 3$  ;  $f(x) \leq -1$ .

## Exercice 15

Le plan est muni d'un repère orthonormé.

On considère les fonctions  $f : x \mapsto x^4 + 2x^2 - 3$  et  $g : x \mapsto x^3 - x$ .

On désigne par  $\mathcal{C}_f$  et  $\mathcal{C}_g$  les courbes représentatives respectives des fonctions  $f$  et  $g$ .

1. a. Vérifier que  $x^4 - x^3 + 2x^2 + x - 3 = (x^2 - 1)(x^2 - x + 3)$ , pour tout réel  $x$ .

b. Montrer que les courbes  $\mathcal{C}_f$  et  $\mathcal{C}_g$  se coupent en deux points distincts dont on déterminera les coordonnées.

2. Tracer les courbes  $\mathcal{C}_f$  et  $\mathcal{C}_g$ .

3. Résoudre graphiquement l'inéquation  $x^4 - x^3 + 2x^2 + x - 3 > 0$ .

# Avec l'ordinateur

Visualisation des courbes représentatives des fonctions

$x \mapsto f(x+a)$  ;  $x \mapsto f(x)+k$ . GEOPLANW

## 1. Fonction $g : x \mapsto f(x+a)$

Ouvrir le programme GeoplanW en exécutant



a. Définir le réel  $a$  dans  $[-5, 5]$

Aller dans la barre de menu et choisir

Créer/ Numérique/ Variable réel libre dans l'intervalle



Et valider l'écran ci-dessous comme suit



b. Définir la fonction usuelle  $f$ , fonction carrée.

Aller dans la barre de menu et choisir

Créer/ Numérique/ Fonction numérique

Et valider l'écran ci-dessous comme suit

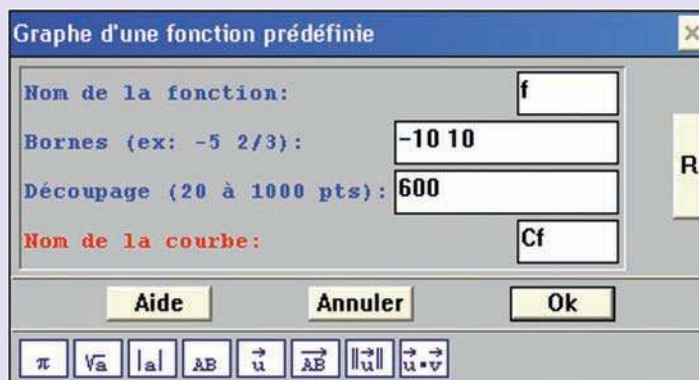






Attention : la variable est un X majuscule puisque x est utilisé pour le repère  $R_{oxy}$   
 Définir la fonction g définie par  $g(x) = f(x + a)$  de la même façon comme on a défini la fonction f sauf que dans la case Expression de la fonction on choisit  $f(X+a)$ .

c. Tracer la courbe  $C_f$  de la fonction f.  
 Aller dans la barre de menu et choisir

Créer/ Ligne/ Courbe/ Graphe d'une fonction prédéfinie

Et valider l'écran ci-dessous



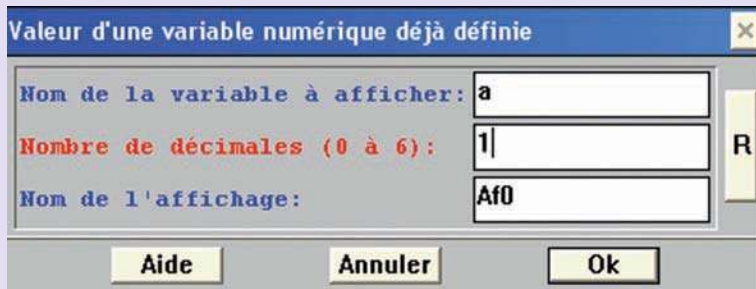
Faire apparaître le repère par le bouton , puis les graduations et le quadrillage en utilisant la barre de style  Réduire ou agrandir le graphique, s'il y a lieu, par les boutons  .

d. Tracer la courbe  $C_g$  de la fonction g (comme on a fait pour la courbe de f).

e. Afficher le réel a avec un décimal.

Aller dans la barre de menu et choisir Créer/ Affichage/ Scalaire déjà défini

Et valider l'écran ci-dessous.



Piloter le réel a au clavier.

Aller dans la barre de menu et choisir **Piloter/ Piloter au clavier**

Et sélectionner le réel a dans les objets construits.

e. Faire varier le réel a à l'aide des flèches du clavier.

Comment se déplace la courbe  $C_g$  par rapport à la courbe  $C_f$  ?

f. Pour visualiser la transformation, Créer le réel libre X1 dans l'intervalle  $[-10, 10]$  et les points  $A(X1, f(X1))$ ,  $M(X1, g(X1))$  et  $N(X1 + a, f(X1 + a))$  par exemple, pour créer le point N, Aller dans la barre de menu et choisir

**Créer/ Point/ Repéré dans le plan**



Piloter le réel X1.

## 2. Fonction $g : x \mapsto f(x) + k$

a. Créer la fonction g d'expression  $f(x) + k$  avec  $f(x) = x^2$  et la courbe  $C_g$  de cette fonction g.

b. Piloter le réel k au clavier. Comment se déplace la courbe  $C_g$  par rapport à la courbe  $C_f$  ?

c. Pour visualiser la transformation, Créer le réel libre X1 dans l'intervalle  $[-10, 10]$  et les points  $M(X1, f(X1))$  et  $N(X1, g(X1))$

d. Vérifier en modifiant la fonction usuelle f.

## Les fonctions

Le concept de fonction est un concept largement universel qui se rencontre pratiquement dans toutes les disciplines scientifiques : mathématiques, physique, biologie, technologie mais également en sciences humaines etc.... Il est également présent dans notre vie quotidienne sous forme de représentation graphique dans nos journaux.

### Les principales étapes historiques du développement du concept de fonction

#### 1. L'Antiquité

Le concept de fonction apparaît lors de cette période sous la forme de tables numériques notamment chez les babyloniens pour exécuter des calculs (tables de carrés, de racines carrées, de cubes et de racines cubiques) ou pour compiler des éphémérides du soleil, de la lune ou d'autres planètes.

Le développement de la trigonométrie entraîna l'usage de tables de cordes, l'équivalent des tables de sinus qui seront développées par les hindous quelques siècles plus tard.

Aucune formule algébrique, aucune expression littérale n'a jamais été introduite. Il n'y avait pas d'idée de fonction, dans l'Antiquité, mais plutôt de relations fonctionnelles.

#### 2. Le Moyen Age

Au cours du Moyen Age, l'idée que les lois quantitatives de la nature étaient de type fonctionnel a commencé à se dessiner. Une fonction est définie soit par une description verbale de sa propriété, soit par un graphe.

#### 3. La période moderne (à partir de la fin du XVI<sup>ème</sup> siècle)

Avec les progrès de l'écriture symbolique en algèbre (Viète), se développe la notion de relation fonctionnelle exprimée de façon explicite par une formule. Plusieurs mathématiciens ont alors travaillé sur le concept de fonction.

Descartes expose l'idée qu'une équation entre  $x$  et  $y$  est une manière d'introduire une dépendance fonctionnelle : la connaissance de la valeur d'une variable permet de déterminer la valeur de l'autre.

Leibniz se sert du mot "fonction" pour désigner des quantités qui dépendent d'une variable et introduit les termes de "constante", de "variable", de "coordonnées" et de "paramètre".

Euler définit la fonction d'une quantité variable comme une expression analytique constituée de cette quantité variable et de constantes.

Le point de vue qui domine alors est l'aspect purement formel du concept de fonction. Par la suite, ce concept évoluera au rythme des difficultés rencontrées.

# Chapitre 4

**Exemples de  
fonctions  
homographiques**

# Chapitre

# 4

## Exemples de fonctions homographiques

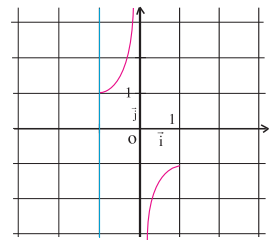
### Vérifier vos acquis

Indiquer la bonne réponse.

1. L'ensemble de définition de la fonction  $f : x \mapsto \frac{x-1}{x+1}$ .

- a.  $\mathbb{R}$ .      b.  $]-\infty, -1[ \cup ]-1, +\infty[$       c.  $]-\infty, 1[ \cup ]1, +\infty[$ .

2. Le plan est muni d'un repère. La courbe  $\mathcal{C}$  ci-contre est la courbe représentative d'une fonction  $f$ .

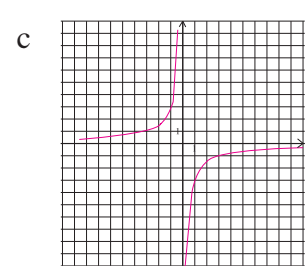
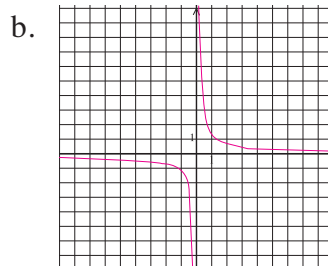
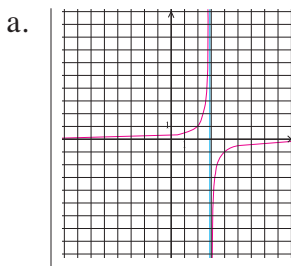


- a.  $f$  est définie sur  $[-1, 1]$ .      b.  $f$  est définie sur  $[-1, 0[ \cup ]0, 1]$ .      c.  $f$  est impaire.

3. La fonction  $f : x \mapsto \frac{2x+1}{x-3}$ .

- a. est paire.      b. est impaire.      c. n'est pas définie en 3.

4. Le plan est muni d'un repère. La courbe représentative de la fonction  $f : x \mapsto -\frac{3}{x}$  est



5. Le tableau de variation de la fonction  $f : x \mapsto -\frac{3}{x}$  est

a.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f	0	$+\infty$	0

Diagram showing arrows: from 0 to  $-\infty$  (downward), from  $+\infty$  to 0 (downward).

b.

x	$-\infty$	3	$+\infty$
f	0	$+\infty$	0

Diagram showing arrows: from 0 to  $-\infty$  (downward), from  $+\infty$  to 0 (downward).

c.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f	0	$+\infty$	0

Diagram showing arrows: from 0 to  $+\infty$  (upward), from  $-\infty$  to 0 (upward).

## Découvrir

### 1. Ensemble de définition

#### Activité

1. Résoudre les équations ci-dessous.

$$3x + 5 = 0 \quad ; \quad -x - 2 = 0 \quad ; \quad -2x + 0.3 = 0.$$

2. En déduire l'ensemble de définition de chacune des fonctions ci-dessous.

$$x \mapsto \frac{x+1}{3x+5} \quad ; \quad x \mapsto \frac{2x+\sqrt{2}}{-x-2} \quad ; \quad x \mapsto \frac{-\sqrt{3}x+1}{-2x+0.3}.$$

#### Définition

Soit  $a, b, c$  et  $d$  des réels tels que  $c \neq 0$  et  $ad - bc \neq 0$ .

La fonction  $x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d}$  est appelée fonction homographique et est définie pour tout réel  $x$  différent de  $-\frac{d}{c}$ .

Son ensemble de définition est  $]-\infty, -\frac{d}{c}[ \cup ]-\frac{d}{c}, +\infty[$ .

### 2. Limites aux bornes de l'ensemble de définition

#### Activité 1

On considère la fonction  $f : x \mapsto \frac{x-5}{2x+1}$ .

- Déterminer l'ensemble de définition de  $f$ .
- a. Utiliser la calculatrice pour donner des valeurs approchées de  $f(10^{10})$ ,  $f(10^{15})$ .  
b. Que peut-on conjecturer pour  $f(x)$ , lorsque  $x$  prend des valeurs positives de plus en plus grandes ?
- a. Utiliser la calculatrice pour donner des valeurs approchées de  $f(-10^{10})$ ,  $f(-10^{15})$ .  
b. Que peut-on conjecturer pour  $f(x)$ , lorsque  $-x$  prend des valeurs positives de plus en plus grandes ?

#### Définition

Soit  $a, b, c$  et  $d$  des réels tels que  $c \neq 0$  et  $ad - bc \neq 0$  et  $f$  la fonction  $x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d}$ .

Le réel  $f(x)$  se rapproche de  $\frac{a}{c}$ , lorsque  $x$  prend des valeurs positives de plus en plus grandes (respectivement lorsque  $-x$  prend des valeurs positives de plus en plus grandes).

On dit que  $f(x)$  tend vers  $\frac{a}{c}$  lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$  (respectivement vers  $-\infty$ ) et on écrit

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{a}{c} \quad (\text{respectivement } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \frac{a}{c}).$$

## Activité 2

Calculer les limites suivantes

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2-x}{3+x} ; \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2-x}{3+x} ; \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x-5}{x-1} ; \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x-5}{x-1} .$$

### Interprétation géométrique

Le plan est muni d'un repère orthogonal  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

Soit  $a, b, c$  et  $d$  des réels tels que  $c \neq 0$  et  $ad - bc \neq 0$ .

Soit  $f$  la fonction  $x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d}$  et  $\mathcal{C}$  la courbe représentative de  $f$ .

Puisque  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{a}{c}$ , la courbe  $\mathcal{C}$  se rapproche de la droite  $D$  d'équation  $y = \frac{a}{c}$ , lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$ . On dit alors que la droite d'équation  $y = \frac{a}{c}$  est une asymptote à  $\mathcal{C}$ , au voisinage de  $+\infty$ .

De même, puisque  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \frac{a}{c}$ , la courbe  $\mathcal{C}$  se rapproche de la droite  $D$  d'équation  $y = \frac{a}{c}$ , lorsque  $x$  tend vers  $-\infty$ . La droite d'équation  $y = \frac{a}{c}$  est une asymptote à  $\mathcal{C}$ , au voisinage de  $-\infty$ .

### Remarque

Sachant que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \frac{a}{c}$  on dit que la droite d'équation  $y = \frac{a}{c}$  est asymptote à  $\mathcal{C}$ , au voisinage de l'infini.

## Activité 3

Le plan est muni d'un repère orthogonal  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

Pour chacune des fonctions ci-dessous, étudier les limites en  $+\infty$  et en  $-\infty$  et donner une équation de l'asymptote à la courbe au voisinage de l'infini.

$$x \mapsto \frac{-2x+\sqrt{3}}{x-5} ; x \mapsto \frac{-4}{x-5} ; x \mapsto \frac{-2x}{3x-1} .$$

## Activité 4

On considère la fonction  $f: x \mapsto \frac{x-5}{2x+1}$ .

1. Déterminer l'ensemble de définition de  $f$ .

2. Recopier et compléter le tableau ci-dessous.

x	-0.58	-0.59	-0.48	-0.487
f(x)				

3. a. Que peut-on conjecturer pour f(x), lorsque x se rapproche de -0.5 en restant supérieur à -0.5 ?

b. Que peut-on conjecturer pour f(x), lorsque x se rapproche de -0.5 en restant inférieur à -0.5 ?

4. Reprendre les mêmes questions pour la fonction  $g : x \mapsto \frac{2x + 3}{2x + 1}$ .

Le tableau ci-dessous nous donne les limites d'une fonction

homographique  $f : x \mapsto \frac{ax + b}{cx + d}$ , quand x tend vers  $-\frac{d}{c}$ .

Si x se rapproche de  $-\frac{d}{c}$  en restant supérieur (respectivement inférieur) à  $-\frac{d}{c}$ , on écrit  $x \rightarrow -\frac{d}{c}^+$  (respectivement  $x \rightarrow -\frac{d}{c}^-$ ).

### Théorème admis

$f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$ , $c \neq 0$ ad $-bc > 0$	$\lim_{x \rightarrow -\frac{d}{c}^-} f(x) = +\infty$	$\lim_{x \rightarrow -\frac{d}{c}^+} f(x) = -\infty$
$f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$ , $c \neq 0$ ad $-bc < 0$	$\lim_{x \rightarrow -\frac{d}{c}^-} f(x) = -\infty$	$\lim_{x \rightarrow -\frac{d}{c}^+} f(x) = +\infty$

### Activité 5

Calculer les limites ci-dessous

$$\lim_{x \rightarrow -4^-} \frac{3}{x + 4} ; \lim_{x \rightarrow -7^+} \frac{-5}{x + 7} ; \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x - 7}{x - 1} ; \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-3x + 1}{x} ; \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{5 - 6x}{1 - x}.$$

### Interprétation géométrique

Le plan est muni d'un repère orthogonal  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

Soit a, b, c et d des réels tels que  $c \neq 0$  et  $ad - bc \neq 0$ .

Soit f la fonction  $x \mapsto \frac{ax + b}{cx + d}$  et  $\mathcal{C}$  la courbe représentative de f.

Comme  $\lim_{x \rightarrow -\frac{d}{c}^+} f(x) = +\infty$  ou  $\lim_{x \rightarrow -\frac{d}{c}^+} f(x) = -\infty$ , ou  $\lim_{x \rightarrow -\frac{d}{c}^-} f(x) = +\infty$ , ou  $\lim_{x \rightarrow -\frac{d}{c}^-} f(x) = -\infty$ , la

courbe  $\mathcal{C}$  se rapproche de la droite d'équation  $x = -\frac{d}{c}$ . On dit que la droite d'équation

$x = -\frac{d}{c}$  est une asymptote à la courbe  $\mathcal{C}$  au voisinage de  $-\frac{d}{c}$ .

## Activité 6

Le plan est muni d'un repère orthogonal  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

Pour chacune des fonctions ci-dessous, étudier sa limite au réel  $a$  indiqué et donner une équation de l'asymptote à la courbe au voisinage de ce réel.

$$x \mapsto \frac{-2x+5}{x-0.5}, \quad a = 0.5.$$

$$x \mapsto \frac{4}{x-5}, \quad a = 5.$$

$$x \mapsto \frac{2x}{3x-4}, \quad a = \frac{4}{3}.$$

## 3. Etude et représentation graphique d'une fonction homographique

### Activité 1

Le plan est muni d'un repère orthogonal  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

Nous avons dressé ci-contre le tableau de variation d'une fonction homographique  $f$ .

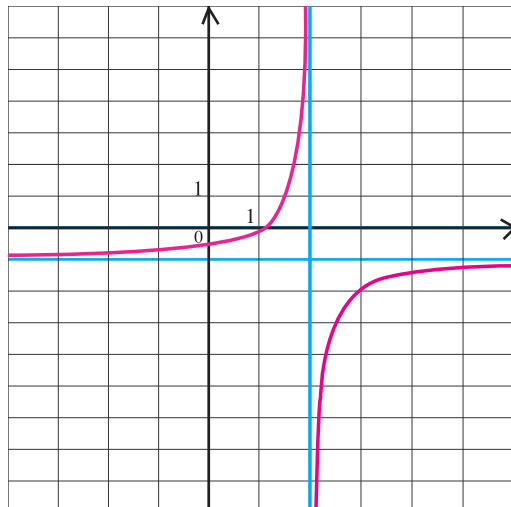
$x$	$-\infty$	$1$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$		$-$
$f$	$0$ ↙ $-\infty$		$+\infty$ ↘ $0$

1. Déterminer l'ensemble de définition de  $f$ .
2. Déterminer les limites de  $f$  aux bornes de son ensemble de définition et préciser les asymptotes.
3. Tracer la courbe représentative de  $f$ .

### Activité 2

Le plan est muni d'un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

On a représenté ci-dessous une fonction homographique  $f$ .



1. Déterminer l'ensemble de définition de  $f$ .
2. Déterminer les limites de  $f$  aux bornes de son ensemble de définition et préciser les asymptotes.
3. Déterminer les variations de  $f$  et le signe de  $f'$ .

### Activité 3

On désigne par  $\mathcal{C}$  la représentation graphique dans le plan muni d'un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  de la fonction  $f$  définie par  $f(x) = \frac{2x-2}{x-2}$ , par  $\Delta$  la droite d'équation  $x = 3$  et par  $A$  le point de  $\mathcal{C}$  d'ordonnée 0.

1. Déterminer l'ensemble de définition de  $f$ .
2. Déterminer les limites de  $f$  lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$ ,  $-\infty$ ,  $2^+$ ,  $2^-$ .  
En déduire les asymptotes à la courbe  $\mathcal{C}$  de  $f$ .
3. a. Etudier les variations de  $f$  et dresser son tableau de variation.  
b. Déterminer une équation de la tangente  $T$  à  $\mathcal{C}$  en  $A$ .  
c. Tracer la courbe  $\mathcal{C}$  et la droite  $T$ .
4. Soit  $B$  le point d'intersection de  $\mathcal{C}$  avec  $\Delta$ .  
Trouver une équation cartésienne de la droite  $(AB)$ .

# L'essentiel du cours

## Définition

Soit  $a, b, c$  et  $d$  des réels tels que  $c \neq 0$  et  $ad - bc \neq 0$ .

La fonction  $x \mapsto \frac{ax + b}{cx + d}$  est appelée fonction homographique et est définie pour tout réel  $x$  différent de  $-\frac{d}{c}$ .

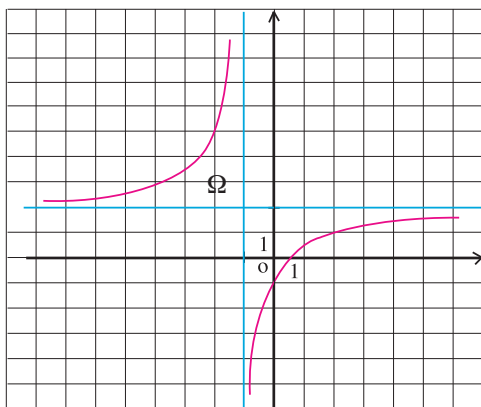
Son ensemble de définition est  $]-\infty, -\frac{d}{c}[ \cup ]-\frac{d}{c}, +\infty[$ .

## Théorème

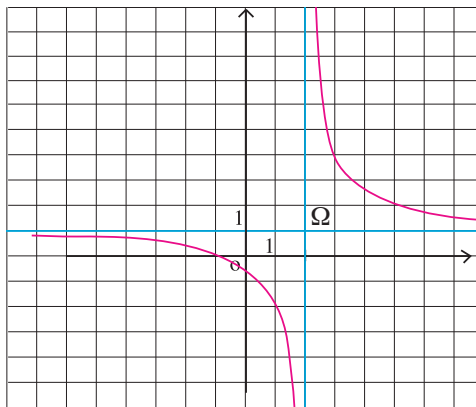
$f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}, c \neq 0, ad - bc > 0$	$\lim_{x \rightarrow -\frac{d}{c}^-} f(x) = +\infty$	$\lim_{x \rightarrow -\frac{d}{c}^+} f(x) = -\infty$
$f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}, c \neq 0, ad - bc < 0$	$\lim_{x \rightarrow -\frac{d}{c}^-} f(x) = -\infty$	$\lim_{x \rightarrow -\frac{d}{c}^+} f(x) = +\infty$

## Représentation graphique

La représentation graphique d'une fonction homographique  $x \mapsto \frac{ax + b}{cx + d}$  est une hyperbole de centre  $\Omega(-\frac{d}{c}; \frac{a}{c})$  d'asymptotes les droites d'équations  $x = -\frac{d}{c}$  et  $y = \frac{a}{c}$ .



$$ad - bc > 0$$



$$ad - bc < 0$$

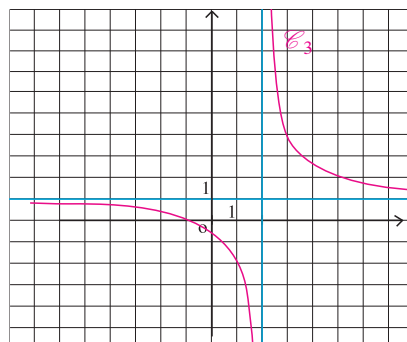
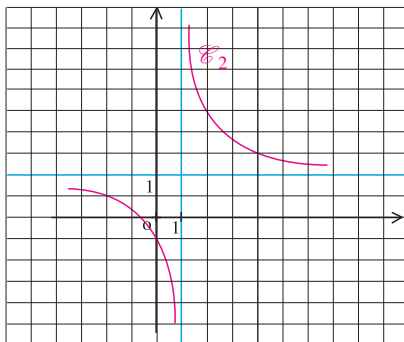
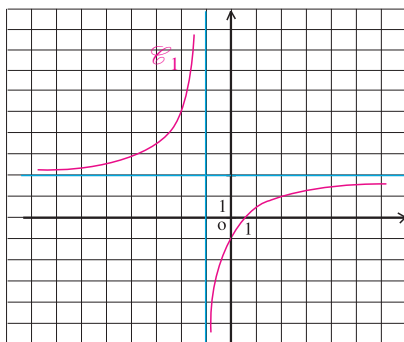
# Test d'auto-évaluation

◆ Les courbes  $\mathcal{C}_1$ ,  $\mathcal{C}_2$  et  $\mathcal{C}_3$  ci-dessous sont les courbes représentatives des trois fonctions

$$f : x \mapsto \frac{2x+1}{x-1}$$

$$g : x \mapsto \frac{x+1}{x-2}$$

$$h : x \mapsto \frac{2x-1}{x+1}$$



Associer chaque fonction à sa courbe.

◆ La fonction définie sur  $\mathbb{R}^*$  par  $f(x) = \frac{1}{x}$  est

- a. décroissante sur  $\mathbb{R}^*$ .
- b. décroissante sur  $]-\infty, 0[$  et croissante sur  $]0, +\infty[$ .
- c. décroissante sur  $]-\infty, 0[$  et décroissante sur  $]0, +\infty[$ .

◆ Le plan est rapporté à un repère orthonormé. La courbe  $\mathcal{C}$  représentative de la fonction

f définie par  $f(x) = \frac{2x+1}{x+1}$  admet comme centre de symétrie le point.

- a.  $\Omega(1 ; 2)$ .
- b.  $\Omega(2 ; 1)$ .
- c.  $\Omega(-1 ; 2)$ .

# Exercices et problèmes

## Exercice 1

Calculer les limites suivantes

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x+2} ; \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x-5}{x+1} ; \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-5x+2}{x} ; \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2-x}{3-x}.$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{5}{x-2} ; \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{3-x}{x-1} ; \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{3-x}{x-4} ; \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{1-x}{x+2}.$$

## Exercice 2

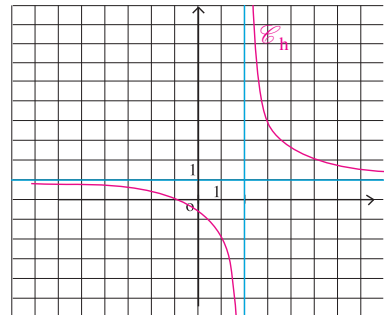
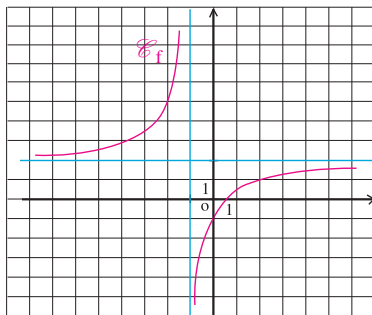
Dresser le tableau de variation de chacune des fonctions ci-dessous.

$$f : x \mapsto \frac{1}{x+3} ; f : x \mapsto \frac{x+5}{-x+4} ; f : x \mapsto \frac{-1+2x}{3x+5} ; f : x \mapsto \frac{-2x+1}{x}.$$

## Exercice 3

Le plan est muni d'un repère orthonormé.

On a représenté ci-dessous, les courbes représentatives des fonctions  $f$ ,  $g$  et  $h$ .



Dresser le tableau de variation de chacune des fonctions  $f$ ,  $g$  et  $h$ .

## Exercice 4

Le plan est muni d'un repère orthonormé.

On désigne par  $\mathcal{C}$  la courbe représentative de la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = -\frac{x}{x+6}$ .

1. Dresser le tableau de variation de  $f$ .
2. Tracer la courbe  $\mathcal{C}$ .

## Exercice 5

Le plan est muni d'un repère orthonormé.

On désigne par  $\mathcal{C}$  la courbe représentative de la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = \frac{-x+1}{x-2}$ .

1. Dresser le tableau de variation de  $f$ .
2. Tracer la courbe  $\mathcal{C}$ .

## Exercice 6

Le plan est muni d'un repère orthonormé.

On considère les fonctions  $f : x \mapsto \frac{x-3}{x+1}$  et  $g : x \mapsto x^2 - 6x + 9$ .

On désigne par  $\mathcal{C}_f$  et  $\mathcal{C}_g$  les courbes représentatives respectives des fonctions  $f$  et  $g$ .

- a. Vérifier que  $g(x) = (x - 3)^2$ .  
b. Montrer que les courbes  $\mathcal{C}_f$  et  $\mathcal{C}_g$  se coupent en trois points distincts dont on déterminera les coordonnées.
- Tracer les courbes  $\mathcal{C}_f$  et  $\mathcal{C}_g$ .
- Résoudre graphiquement l'inéquation  $f(x) \leq g(x)$ .

## Exercice 7

Le plan est muni d'un repère orthonormé.

On considère les fonctions  $f : x \mapsto \frac{x}{-x+2}$  et  $g : x \mapsto -x^2$ .

On désigne par  $\mathcal{C}_f$  et  $\mathcal{C}_g$  les courbes représentatives respectives des fonctions  $f$  et  $g$ .

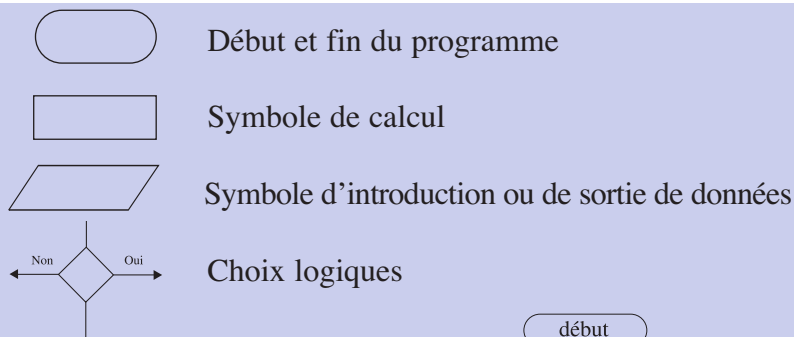
- Montrer que les courbes  $\mathcal{C}_f$  et  $\mathcal{C}_g$  se coupent en trois points distincts dont on déterminera les coordonnées.
- Tracer les courbes  $\mathcal{C}_f$  et  $\mathcal{C}_g$ .
- Résoudre graphiquement l'inéquation  $f(x) \geq g(x)$ .

# Avec l'ordinateur

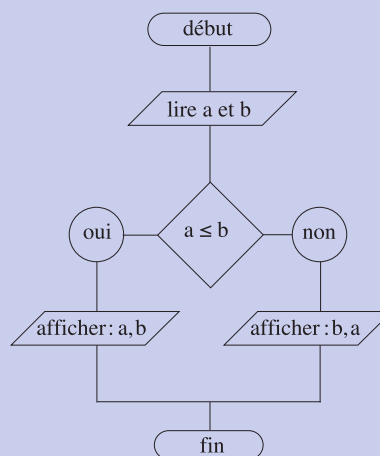
## Organigramme

Un organigramme est un schéma représentant l'organisation d'un travail à accomplir par un ordinateur ou une machine programmable. Il peut traduire par exemple un algorithme de classement, un algorithme de calcul...

Les symboles utilisés dans l'élaboration d'un organigramme sont généralement les suivants



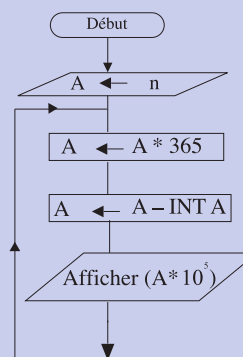
Voici, à titre d'exemple un organigramme qui traduit l'algorithme de classement de deux nombres réels dans l'ordre croissant.



Elaborer un organigramme qui traduise un algorithme de classement de trois réels dans l'ordre décroissant.

L'organigramme suivant permet de construire une suite de nombre aléatoire, c'est à dire se succédant au hasard.

- Introduire un nombre A de ]0, 1[.
- Multiplier A par 365
- Prendre la partie décimale de A.
- Copier les 5 premiers chiffres.
- Recommencer.



Etablir un organigramme pour le calcul de l'expression  $\frac{2x+1}{3x-5}$  pour différentes valeurs de la variable x et le faire exécuter par l'ordinateur ou une machine programmable.

La courbe représentative de la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$  est une hyperbole.

Etymologiquement, le mot hyperbole provient du grec ( hyperballein, lancer au-delà). Le nom d'hyperbole, ( de parabole et d'ellipse ) est dû à **Apollonios de Perge**.

**Apollonios de Perge** ( 262 av J.C, 180 av J.C ) est un savant grec. On lui doit un traité complet sur les sections coniques c'est à dire l'intersection d'un cône de révolution et d'un plan ne passant pas par le sommet

Si le plan coupe toutes les génératrices du cône du même côté du sommet, la section est une **ellipse** (un cercle si le plan est perpendiculaire à l'axe du cône)

Si le plan est parallèle à l'une des génératrices, le plan ne coupe qu'une nappe du cône, la section est une **parabole**.

Si le plan rencontre à la fois les deux nappes du cône, la section est une **hyperbole**.

# Chapitre 5

## Suites réelles

## Vérifier vos acquis

### Activité 1

**Cocher la réponse exacte.**

- Soit la suite  $u$  définie pour tout entier naturel  $n$  par  $u_n = n^2 + 3$ . Le terme  $u_3$  est égale à  
 a. 9.                      b.  $3^3$ .                      c. 12.
- Soit la suite  $u$  définie par  $u_0 = 0$  et pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_{n+1} = 2u_n + 1$ .  
 Le terme  $u_3$  est égal à  
 a. 7.                      b.  $2u_1 + 1$ .                      c. 11.
- Soit la suite  $v$  définie pour tout entier naturel  $n$  par  $v_n = 2 \times 3^n$ .  
 Le terme  $v_{2n}$  est égal à  
 a.  $4 \times 3^n$ .                      b.  $2 \times 6^n$ .                      c.  $2 \times 3^{2n}$ .
- Soit la suite  $u$  définie pour tout entier naturel  $n$  par  $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 3u_n - 2 \end{cases}$ .  
 La suite  $u$  est une suite  
 a. arithmétique.      b. géométrique.      c. ni arithmétique ni géométrique.
- La somme des 2006 premiers termes de la suite définie pour tout entier naturel  $n$ , par  $u_n = (-1)^n$  est égale à  
 a. -1.                      b. 0.                      c. 1.
- Soit  $u$  la suite arithmétique de raison 2 et de premier terme  $u_0 = 5$ . Le  $n^{\text{ième}}$  terme de la suite  $u$  est égal à  
 a.  $5 + 2n$ .                      b.  $5 + 2(n-1)$ .                      c.  $5 + 2(n+1)$ .
- Soit  $v$  une suite géométrique de raison 3. Le terme  $v_n$  est égal à  
 a.  $v_1 \times 3^n$ .                      b.  $v_1 \times 3^{n+1}$ .                      c.  $v_1 \times 3^{n-1}$ .
- Soit  $(u_n)$  une suite arithmétique. La somme  $S = u_1 + u_2 + \dots + u_n$  est égale à  
 a.  $(n+1)(u_1 + u_n)$       b.  $n \frac{u_1 + u_2}{2}$                       c.  $\frac{n+1}{2}(u_1 + u_n)$
- Soit  $v$  une suite géométrique de raison 2 et de premier terme  $v_0 = 1$ .  
 La somme  $S_n = v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_n$  est égale à  
 a.  $2^n - 1$ .                      b.  $2^{n+1} - 1$ .                      c.  $2^{n-1} - 1$ .
- Dans la représentation graphique d'une suite arithmétique  $(u_n)$  les points de coordonnées  $(n, u_n)$  sont situés sur  
 a. une droite.                      c. une hyperbole.                      c. une parabole.

## Activité 2

- Trouver trois réels  $x_1, x_2, x_3$  tels que les réels  $4, x_1, x_2, x_3, 64$  soient cinq termes consécutifs d'une suite arithmétique.
- Trouver trois réels  $x_1, x_2, x_3$  tels que les réels  $3, x_1, x_2, x_3, 48$  soient cinq termes consécutifs d'une suite géométrique.

## Activité 3

### Problème égyptien

Extrait du papyrus de Rhind (écrit vers 1650 avant J.C, acheté en 1858 à Louksor par l'Écossais Henry Rhind et conservé au British Museum).

Comment diviser 100 pains entre 5 hommes de façon que les 5 parts forment une suite arithmétique et que le septième de la somme des trois plus grandes parts soit égal à la somme des deux plus petites.

## Découvrir

### 1. Limite d'une suite arithmétique

#### Activité 1

Au 1<sup>er</sup> Janvier 2006, Mr X place dans une banque une somme de 1000 dinars à intérêts simples au taux de 7%.

Pour tout entier naturel  $n$ , on note  $S_n$  la somme totale (capital initial+intérêts) au 1<sup>er</sup> janvier 2006 +  $n$ . Ainsi  $S_0 = 1000$  dinars.

1. Calculer  $S_1$ ,  $S_2$  et  $S_3$ .
2. Montrer que  $(S_n)$  est une suite arithmétique dont on précisera la raison  $r$ .
3. Exprimer  $S_n$  en fonction de  $n$ .
4. Quelle sera la somme  $S_n$  en 2020 ?
5. Dans combien d'années la somme  $S_n$ 
  - a. aura-t-elle doublé ?
  - b. aura-t-elle triplé ?
6. Déterminer l'entier  $n_0$  tel que pour tout entier  $n$  supérieur à  $n_0$  la somme  $S_n$  dépassera 1 milliard.

#### Activité 2

Soit  $V$  la suite arithmétique de premier terme  $V_0 = 400$  et de raison  $r = -10$ .

1. Exprimer  $V_n$  en fonction de  $n$ .
2. A partir de quel rang  $n_0$ , les termes de la suite  $V$  sont négatifs.
3. Déterminer l'entier  $n_1$ , tel que pour tout entier  $n$  supérieur à  $n_1$ .
  - a.  $V_n < -10^6$ .
  - b.  $V_n < -10^9$ .

On admet le théorème suivant

#### Théorème (admis)

- Le terme général d'une suite arithmétique  $(u_n)$  de raison strictement positive tend vers  $+\infty$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$ . On écrit  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ .
- Le terme général d'une suite arithmétique  $(u_n)$  de raison strictement négative tend vers  $-\infty$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$ . On écrit  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$ .

#### Remarque

Si la raison d'une suite arithmétique est nulle alors la suite est constante c'est à dire que tous ses termes sont égaux au premier terme et on a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = V_0$ .

### Activité 3

Déterminer la limite de la suite  $u$  de terme général

a.  $u_n = \frac{-2n+3}{5}$ .

b.  $u_n = 5n + \sqrt{2}$ .

c.  $u_n = 2(1+2+3+\dots+n) - (n^2 + n + 1)$ .

d.  $u_n = 1+2+3+\dots+n - \frac{1}{2}(n^2 + 1)$ .

### Activité 4

Soit  $u$  la suite définie sur  $\mathbb{N}$  par  $u_0 = -3$  et pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_{n+1} = u_n + \frac{3}{5}$

Déterminer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ .

## 2. Limite d'une suite géométrique

### Activité 1

1. Tracer un rectangle  $A_1B_1C_1D_1$  de centre  $O$  et de dimensions 12cm et 8cm. Déterminer son aire  $a_1$ .
2. Tracer dans une deuxième étape le rectangle  $A_2B_2C_2D_2$  tels que  $A_2, B_2, C_2$  et  $D_2$  sont respectivement les milieux de  $[OA_1], [OB_1], [OC_1]$  et  $[OD_1]$ . Déterminer son aire  $a_2$ .
3. Tracer dans une troisième étape le rectangle  $A_3B_3C_3D_3$  où  $A_3, B_3, C_3$  et  $D_3$  sont les milieux respectifs de  $[OA_2], [OB_2], [OC_2]$  et  $[OD_2]$ . Déterminer son aire  $a_3$ .
4. On répète le procédé pour obtenir à chaque étape  $n$ , un rectangle  $A_nB_nC_nD_n$ .  
On désigne par  $a_n$  l'aire du rectangle  $A_nB_nC_nD_n$ .
  - a. Quelle est la nature de la suite  $(a_n)$ .
  - b. Montrer que pour tout entier naturel  $n$  non nul, on a  $a_n = 96 \times \left(\frac{1}{4}\right)^n$ .
5.
  - a. Déterminer, à l'aide de votre calculatrice l'entier naturel  $n_0$ , tel que pour tout entier  $n$  supérieur à  $n_0$  on a  $a_n < 10^{-3}$ .
  - b. Déterminer, à l'aide de votre calculatrice l'entier naturel  $n_1$ , tel que pour tout entier  $n$  supérieur à  $n_1$  on a  $a_n < 10^{-6}$ .
  - c. Déterminer, à l'aide de votre calculatrice l'entier naturel  $n_2$ , tel que pour tout entier  $n$  supérieur à  $n_2$  on a  $a_n < 10^{-9}$ .
  - d. Quelle conjecture peut-on émettre pour la limite de  $a_n$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$  ? Ce résultat est-il prévisible ?

### Activité 2

Soit  $(u_n)$  la suite géométrique de premier terme  $u_0 = 2$  et de raison  $q = -\frac{1}{2}$ .

1. Calculer  $u_1, u_2$  et  $u_3$ .
2.
  - a. Déterminer, à l'aide de votre calculatrice, l'entier naturel  $n_0$ , tel que pour tout entier naturel  $n$  supérieur à  $n_0$ ,  $|u_n| < 10^{-6}$ .
  - b. Déterminer, à l'aide de votre calculatrice, l'entier naturel  $n_1$ , tel que pour tout entier naturel  $n$  supérieur à  $n_1$ ,  $|u_n| < 10^{-9}$ .

- c. Quelle conjecture peut-on émettre pour la limite de  $|u_n|$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$  ?  
 d. Déduire la limite de  $u_n$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$ .

On admet le résultat général suivant.

### Théorème et définition

Soit  $(u_n)$  une suite géométrique de raison  $q$ .

Si  $-1 < q < 1$  alors la limite de la suite  $(u_n)$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$  est 0.

On dit que la suite  $(u_n)$  converge vers 0 et on écrit  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ .

### Activité 3

Dans chacun des cas suivants, exprimer  $u_n$  en fonction de  $n$  et déterminer le plus petit entier naturel  $n_0$  (respectivement  $n_1$  et  $n_2$ ) tel que pour tout entier  $n$  supérieur à  $n_0$  (respectivement  $n_1$  et  $n_2$ ) on a  $|u_n| > 10^3$  respectivement  $|u_n| > 10^6$  et  $|u_n| > 10^9$ .

- a.  $(u_n)$  est une suite géométrique de raison  $q = 2$  et de premier terme  $u_0 = \frac{1}{1000}$ .  
 b.  $(u_n)$  est une suite géométrique de raison  $q = \frac{3}{2}$  et de premier terme  $u_0 = \frac{3}{2}$ .  
 c.  $(u_n)$  est une suite géométrique de raison  $q = 3$  et de premier terme  $u_0 = -1$ .

### Activité 4

Le plan est muni d'un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

Soit quatre suites géométriques  $(u_n)$ ,  $(v_n)$ ,  $(w_n)$  et  $(t_n)$  définies par

$$u_n = \left(\frac{3}{2}\right)^n ; \quad v_n = 6 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n ; \quad w_n = -\left(\frac{3}{2}\right)^n \quad \text{et} \quad t_n = 6 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n .$$

1. Représenter ces suites pour  $n \leq 6$ .
2. Quelles conjectures peut-on émettre quant au comportement de chacune de ces suites quand  $n$  tend vers l'infini ?
3. Vérifier la réponse en utilisant la touche  $y^x$  de la calculatrice.

On admet le résultat général suivant.

### Théorème (admis)

Soit  $(u_n)$  une suite géométrique de raison  $q$  et de premier terme non nul  $u_0$ .

- Si  $q > 1$  alors la limite de la suite  $(u_n)$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$  est égale à  $+\infty$  si  $u_0 > 0$  et  $-\infty$  si  $u_0 < 0$ .
- Si  $q \leq -1$  alors la suite  $(u_n)$  n'a pas de limite.

### Remarque

- Si le premier terme  $u_0$  est nul, alors tous les termes de la suite géométrique  $(u_n)$  sont nuls. La suite est alors nulle.
- Si la raison de la suite géométrique est égale à 1, alors tous les termes de la suite sont égaux à  $u_0$ . La suite est alors constante.

## Activité 5

Dire si chacune des suites suivantes admet une limite. Si oui, la préciser.

a.  $u_n = -\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n$       b.  $u_n = \left(\frac{\sqrt{2}}{5}\right)^n$       c.  $u_n = \frac{3}{5}\left(-\frac{4}{3}\right)^n$

d.  $u_n = \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^n$       e.  $u_n = \frac{3^{n+1}}{2^n}$       f.  $u_n = \frac{2}{3^n} + \frac{1}{3^{n+1}}$

## 3. Suites Récurrentes

### Activité 1

1. Trouver le terme manquant dans les suites  $(u_n)$  ci-dessous.

- 1 ; 4 ; 7 ; 10 ; ? ; 16 ; ...
- 64 ; - 32 ; 16 ; - 8 ; ? ; - 2 ; ...
- 1 ; 3 ; 7 ; 15 ; ? ; 63 ; ...
- 1 ; 1 ; 5 ; 17 ; ? ; 161 ; ...
- 1 ; 1 ; 2 ; 3 ; 5 ; 8 ; ? ; 21 ; ...
- 2 ; 1 ; - 1 ; - 5 ; ? ; - 29 ; ...

2. Dans chacun des cas précédents, trouver une formule permettant de calculer un terme  $u_n$  connaissant les termes de rang précédent.

3. Demander à vos camarades de classe, de trouver le terme manquant, dans une suite de nombres que vous leur proposez.

### Activité 2

Au 1<sup>er</sup> Janvier 2006, une ville en pleine expansion avait une population de 30.000 habitants. On suppose qu'à partir du 1<sup>er</sup> janvier 2006.

- Le nombre d'habitants de la ville augmente chaque année de 8% du fait des naissances et des décès.
- 2000 nouvelles personnes viennent s'installer chaque année dans cette ville.

Pour tout entier naturel  $n$ , on note  $u_n$  le nombre d'habitants de cette ville au 1<sup>er</sup> Janvier de l'année 2006 +  $n$ .

1. Calculer  $u_0$ ,  $u_1$  et  $u_2$ .
2. Justifier que, pour tout entier naturel  $n$ , on a  $u_{n+1} = 1,08u_n + 2000$ .
3. Pour tout entier naturel  $n$ , on pose  $v_n = u_n + 25000$ .
  - a. Calculer  $v_0$ .
  - b. Montrer que  $(v_n)$  est une suite géométrique dont on précisera la raison.
  - c. Exprimer  $v_n$  en fonction de  $n$ . En déduire que  $u_n = 55000 \times (1,08)^n - 25000$ .
4. Quel sera le nombre d'habitants de la ville (arrondi à l'unité) au 1<sup>er</sup> Janvier 2026 ?

### Activité 3

Soit  $u$  la suite définie sur  $\mathbb{N}$  par 
$$\begin{cases} u_0 = -2 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n - 3 \text{ pour tout } n \text{ dans } \mathbb{N}. \end{cases}$$

Soit  $f$  la fonction affine définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = \frac{1}{2}x - 3$ .

1. a. Vérifier que  $u_{n+1} = f(u_n)$ .  
b. Placer dans un repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  les points  $A_n (n ; u_n)$  pour  $n = 0, 1, 2, 3, 4$  et  $5$ .
2. La lecture graphique laisse prévoir que  $u$  converge vers un nombre  $L$ . Lequel ?
3. Soit la suite  $v$  définie sur  $\mathbb{N}$  par  $v_n = u_n + 6$ .
  - a. Quelle est la nature de la suite  $v$  ?
  - b. Déterminer la limite de la suite  $v$ .
  - c. Exprimer  $u_n$  en fonction de  $v_n$ .
  - d. Déterminer la limite de la suite  $u$ .

### Théorème (admis)

Soit  $a$  un nombre réel non nul.

• Si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$  alors 
$$\begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} (au_n + b) = +\infty \text{ si } a > 0 \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} (au_n + b) = -\infty \text{ si } a < 0 \end{cases}$$

• Si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$  alors 
$$\begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} (au_n + b) = -\infty \text{ si } a > 0 \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} (au_n + b) = +\infty \text{ si } a < 0 \end{cases}$$

• Si la suite  $(u_n)$  n'a pas de limite alors la suite  $(au_n + b)$  n'a pas de limite.

### Activité 4

On considère la suite  $(u_n)$  définie sur  $\mathbb{N}$  par  $u_0 = -2$  et pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n - 5$ .

1. Déterminer le réel  $a$  pour que la suite  $(v_n)$  définie par  $v_n = u_n + a$  soit une suite géométrique.
2. Calculer alors  $v_n$  puis  $u_n$  en fonction de  $n$ .
3. Déterminer la limite de  $v_n$  puis celle de  $u_n$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$ .

### Activité 5

On considère la suite  $(u_n)$  définie sur  $\mathbb{N}$  par 
$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{4} \end{cases}$$

1. Le plan étant muni d'un repère orthonormé.

a. Construire les droites D et D' d'équations  $y=x$  et  $y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}$  respectives

b. En utilisant D et D', représenter sur l'axe des abscisses les quatre premiers termes de la suite  $(u_n)$ .

c. Proposer une conjecture concernant la limite de la suite  $(u_n)$ .

2. Soit  $v_n = u_n - \frac{1}{2}$ .

a. Montrer que  $(v_n)$  est une suite géométrique dont on déterminera le premier terme et la raison.

b. Exprimer  $v_n$  en fonction de n.

c. En déduire l'expression de  $u_n$  en fonction de n.

d. Calculer la limite de la suite  $(u_n)$ .

# L'essentiel du cours

## 1. suites arithmétiques et géométriques

	Suite arithmétique de raison $r$ et de premier terme $u_0$ .	Suite géométrique de raison $q$ et de premier terme $u_0$ .
Définition	$u_{n+1} = u_n + r.$	$u_{n+1} = q u_n.$
Terme général	$u_n = u_0 + nr = u_p + (n-p)r.$	$u_n = u_0 q^n = u_p q^{n-p}.$
Limites	$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ si $r > 0.$ $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$ si $r < 0.$	$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ si $q > 1$ et $u_0 > 0.$ $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$ si $q > 1$ et $u_0 < 0.$ $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ si $-1 < q < 1.$ $u_n$ n'a pas de limite si $q \leq -1.$
$S_n = u_p + \dots + u_n$	$(n-p+1) \left( \frac{u_n + u_p}{2} \right)$	$u_p \left( \frac{1 - q^{n-p+1}}{1 - q} \right), q \neq 1$

### Définition

Lorsqu'une suite est définie par son premier terme et par une relation qui exprime chaque terme en fonction du ou des termes précédents, on dit que la suite est définie par **une** relation de récurrence.

### Théorème (admis)

Soit  $a$  un nombre réel non nul.

- Si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$  alors  $\begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} (au_n + b) = +\infty & \text{si } a > 0 \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} (au_n + b) = -\infty & \text{si } a < 0 \end{cases}.$

- Si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$  alors  $\begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} (au_n + b) = -\infty & \text{si } a > 0 \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} (au_n + b) = +\infty & \text{si } a < 0 \end{cases}.$

- Si la suite  $(u_n)$  n'a pas de limite alors la suite  $(au_n + b)$  n'a pas de limite.

# Test d'auto-évaluation

**Cocher la réponse exacte.**

1. Soit la suite  $u$  définie pour tout entier naturel  $n$  par  $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = -u_n + 1 \end{cases}$ . La suite  $u$  est une suite
  - a. arithmétique.
  - b. géométrique.
  - c. ni arithmétique ni géométrique.
2. Le 6<sup>ème</sup> terme d'une suite arithmétique de raison  $\frac{1}{2}$  et de premier terme  $-\frac{1}{2}$  est
  - a.  $\frac{3}{2}$ .
  - b.  $\frac{5}{2}$ .
  - c. 2.
3. Le 6<sup>ème</sup> terme d'une suite arithmétique de raison  $-\frac{1}{2}$  et de premier terme 24 est
  - a.  $\frac{3}{4}$ .
  - b.  $-\frac{3}{4}$ .
  - c.  $\frac{3}{2}$ .
4. La somme des 100 premiers termes de la suite arithmétique de premier terme  $-10$ , de deuxième terme  $-5$  est
  - a. 24 500.
  - b. 23 750.
  - c. 47 975.
5. La somme des 100 premiers termes de la suite géométrique de raison 3, de premier terme 1 est
  - a.  $\frac{3^{100} - 1}{2}$ .
  - b.  $\frac{3^{101} - 1}{2}$ .
  - c.  $\frac{3^{99} - 1}{2}$ .
6. La limite de la suite arithmétique définie sur  $\mathbb{N}$  par  $u_n = \frac{3-5n}{2}$  est
  - a.  $\frac{3}{4}$ .
  - b.  $+\infty$ .
  - c.  $-\infty$ .
7. La limite de la suite arithmétique définie sur  $\mathbb{N}$  par  $u_n = \frac{1}{2}(n+3) - \frac{3n}{2}$  est
  - a.  $\frac{1}{2}$ .
  - b.  $+\infty$ .
  - c.  $-\infty$ .
8. La limite de la suite géométrique définie sur  $\mathbb{N}$  par  $u_n = -3\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n$  est
  - a. 0.
  - b.  $+\infty$ .
  - c.  $-\infty$ .
9. La limite de la suite géométrique définie sur  $\mathbb{N}$  par  $u_n = 4\left(\frac{5}{3}\right)^n$  est
  - a. 0.
  - b.  $+\infty$ .
  - c.  $-\infty$ .
10. La limite de la suite géométrique définie sur  $\mathbb{N}$  par  $u_n = 3(-\sqrt{3})^n$  est
  - a. 0.
  - b. n'existe pas.
  - c.  $-\infty$ .

# Exercices et problèmes

## Exercice 1

Déterminer éventuellement les limites des suites de terme général.

- a.  $u_n = 5^{-n}$ .                      b.  $u_n = 3 \times 4^{-n}$ .                      c.  $u_n = -\left(\frac{3}{2}\right)^n$ .
- d.  $u_n = \left(-\frac{3}{2}\right)^n$ .                      e.  $u_n = \left(\frac{3}{5}\right)^n + 2$ .                      f.  $u_n = \left(\frac{3}{7}\right)^n - 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$ .
- g.  $\begin{cases} u_0 = 1 \\ 4u_{n+1} - 5u_n = 0 ; n \in \mathbb{N}. \end{cases}$

## Exercice 2

Soit  $u$  la suite géométrique de 1<sup>er</sup> terme  $u_1 = 0,123$  et de raison  $q = 10^{-3}$ .

1. Calculer  $u_2$ ,  $u_3$  et  $u_4$ .
2. Exprimer en fonction de  $n$  la somme  $S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n$ .
3. Montrer que le réel  $a = 0,123$  dont l'écriture décimale s'obtient en écrivant indéfiniment le nombre 123, peut s'écrire sous la forme d'un quotient irréductible de deux entiers que l'on déterminera.

## Exercice 3

Soit  $a$  le nombre qui dans le système décimal s'écrit  $a = 2,\overline{9} = 2,999 \dots$  (le nombre 9 se répète indéfiniment, après la virgule).

On pose  $a_1 = 2,9$  ;  $a_2 = 2,99$  ;  $\dots$  ;  $a_n = 2,\underbrace{99999999\dots 9}_{n \text{ fois le nombre } 9}$

1. Vérifier que pour tout entier naturel non nul  $n$ ,  $a_n = 2 + \frac{9}{10} + \frac{9}{100} + \dots + \frac{9}{10^n}$ .
2. Montrer que pour tout entier naturel non nul  $n$ ,  $a_n = 3 - \left(\frac{1}{10}\right)^n$ .
3. a. Etudier la limite de la suite  $(a_n)$ .  
b. Ecrire  $a$  sous forme d'un entier naturel.

## Exercice 4

### Algorithme de Kaprekar

Cet algorithme a été signalé en décembre 1995 par le mathématicien indien D. R Kaprekar. Il nous donne des exemples de suites stationnaires (une suite stationnaire est une suite constante à partir d'un certain rang)

- a. Avec 3 chiffres.

Prendre un entier naturel  $a_0$  de 3 chiffres. Ordonner ses chiffres dans l'ordre décroissant (respectivement croissant) pour obtenir un nombre  $b_0$  (respectivement  $c_0$ ).

Calculer  $a_1 = a_0 - b_0$  et recommencer avec  $a_1$  comme avec  $a_0$ . Calculer plusieurs termes de la suite  $(a_n)$ . Observer et conjecturer.

b. Avec 4 chiffres.

Même exercice que a) avec un entier naturel  $a_0$  à 4 chiffres.

## Exercice 5

Un escargot se trouve au fond d'un puit profond de 2 mètres. Le 1<sup>er</sup> jour il monte 1mètre, puis chaque jour il monte la moitié de la distance parcourue le jour précédent.

On désigne par  $d_n$  la distance parcourue le  $n^{\text{ième}}$  jour.

1. Montrer que  $(d_n)_{n \geq 1}$  est une suite géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme.

2. Quelle est la limite de  $d_n$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$ .

3. On désigne par  $S_n$  la distance parcourue par l'escargot après  $n$  jours.

Calculer  $S_7$  ;  $S_{15}$ ,  $S_{30}$ .

4. Calcule  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$ . L'escargot arrive-t-il à sortir du puit ?

## Exercice 6

On considère la suite  $(u_n)$  définie sur  $\mathbb{N}$  par 
$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{2}{5}u_n + 1 \end{cases}$$

1. Vérifier que la suite  $(u_n)$  n'est ni arithmétique, ni géométrique.

2. On pose  $v_n = u_n + \frac{5}{3}$ .

a. Montrer que  $(v_n)$  est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.

b. Exprimer  $v_n$  en fonction de  $n$ .

c. En déduire l'expression de  $u_n$  en fonction de  $n$ .

d. Calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ .

## Exercice 7

Même exercice que l'exercice 6 avec  $(u_n)$  définie par 
$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = 2u_n - 5 \end{cases}$$
 et  $v_n = u_n - 5$ .

## Exercice 8

On considère la suite  $(u_n)$  définie sur  $\mathbb{N}$  par 
$$\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = \frac{3}{5}u_n + 2 \end{cases}$$

1. Vérifier que la suite  $(u_n)$  n'est ni arithmétique, ni géométrique.

2. On pose  $v_n = u_n + a$ .

- a. Déterminer  $a$  pour que la suite  $(v_n)$  soit géométrique.
- b. Préciser alors le premier terme et la raison de la suite géométrique  $(v_n)$ .
- c. Exprimer  $v_n$  en fonction de  $n$ .
- d. En déduire l'expression de  $u_n$  en fonction de  $n$ .
- e. Calculer la limite de la suite  $(u_n)$ .

## Exercice 9

Le 1<sup>er</sup> janvier 2006, une entreprise compte 300 employés. On suppose que lors de chaque année à venir, 10% de l'effectif du 1<sup>er</sup> Janvier partira à la retraite au cours de l'année et que l'entreprise embauche 20 jeunes employés dans l'année.

On pose pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n$  le nombre d'employés de l'entreprise le 1<sup>er</sup> Janvier de l'année  $(2006 + n)$ .

1. a. Calculer  $u_0$ ,  $u_1$  et  $u_2$ .

La suite  $(u_n)$  est elle arithmétique ? géométrique ?

- b. Expliquer pourquoi on a, pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_{n+1} = 0,9 u_n + 20$ .

2. Pour tout entier naturel  $n$ , on pose  $v_n = u_n - 200$ .

- a. Démontrer que la suite  $(v_n)$  est géométrique et préciser son premier terme et sa raison.
- b. Exprimer  $v_n$  en fonction de  $n$ .
- c. En déduire l'expression de  $u_n$  en fonction de  $n$ .
- d. Déterminer la limite de la suite  $(u_n)$ .

# Avec l'ordinateur

On se propose d'utiliser **un tableur-grapheur** pour déterminer, les 10 premiers termes successifs d'une suite définie par la donnée de son premier terme  $u_0 = 1$  et de la relation de récurrence :  $u_{n+1} = \frac{1}{4} u_n + 3$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

1. La colonne A est réservée aux indices pour cela.
  - Dans la cellule A1 taper n ;
  - Taper 0 et 1 dans les cellule A2 et A3.
2. La colonne B est réservée aux termes de la suite pour cela.
  - Dans la cellule B1 taper  $U_n$  ;
  - Taper 1 dans la cellule B2 (le terme  $u_0$ ) et la formule  $= 1/4 * B2 + 3$  dans la cellule B3 puis valider par la touche entrer du clavier. Que représente la valeur obtenu ?
3. Pour obtenir les 10 premiers termes de la suite ( $u_n$ ), sélectionner les cellules A3 et B3. Placer votre curseur en bas à droite du rectangle sélectionné et tirer vers le bas.  
Les 10 premiers termes de la suite ainsi que leurs indices s'affichent automatiquement

	B3		$f_x = 1/4 * B2 + 3$
	A	B	C
1	n	$U_n$	
2	0	1	
3	1	3,25	
4	2	3,8125	
5	3	3,953125	
6	4	3,98828125	
7	5	3,99707031	
8	6	3,99926758	
9	7	3,99981689	
10	8	3,99995422	
11	9	3,99998856	

4. Représenter graphiquement les points  $A_n$  de coordonnées  $(n, u_n)$ .
  - Sélectionner avec la souris la plage A1 : B11;
  - Choisir le menu « Insertion – Graphique » ;
  - Prendre « Nuages de points » comme type de graphique ;
5. Que peut-on conjecturer concernant la limite de la suite ( $u_n$ ) ?
6. Démontrer votre conjecture.

Fibonacci (1170-1250) a pour véritable nom, Léonard de Pise, du nom de sa ville de naissance en Italie du nord. Il passe son enfance en Afrique de nord, puis voyage dans les pays méditerranéens. C'est ainsi qu'il prend connaissance des mathématiques arabes et devient le mathématicien le plus connu du moyen âge. Il introduisit en Europe les chiffres arabes et l'algèbre, il proposait en 1202, dans son Liber abacci, le problème suivant.

<< Soit, au premier janvier, un couple de lapins ; ce couple engendre un autre couple au premier février, et ainsi de suite pour tous les mois de l'année, le premier jour de chaque mois. Chacun des nouveaux couples engendre à son tour un couple de lapins le premier jour de chaque mois à partir de leur second mois d'existence, et ainsi de suite. On demande combien de couples de lapins il y aura à la fin de l'année.>>

Dans sa résolution, ce problème, fait apparaître la suite qui porte le nom de suite de Fibonacci définie par  $u_0 = u_1 = 1$  et  $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$  et qui a des curieuses propriétés parmi lesquelles.

1.  $u_1 + u_2 + \dots + u_n = u_{n+2} - 1$
2.  $u_{3n}$  est divisible par 2 ;  $u_{4n}$  est divisible par 3 ;  $u_{5n}$  est divisible par 5 ;  $u_{6n}$  est divisible par 8 ...
3.  $\frac{u_n}{u_{n+1}}$  tend vers le nombre d'or  $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$  ...

### Dans la nature

Le nombre de pétales de la majeure partie des fleurs est un nombre de Fibonacci, ainsi dans les tournesols, les graines sont disposés selon deux types de spirales. Si nous comptons le nombre de spirales, soit dans un sens, soit dans un autre, on trouve deux nombres consécutifs de Fibonacci ...

# Chapitre 6

# Statistiques

## Vérifier vos acquis

### Série statistique à un seul caractère

#### Activité 1

Recopier et compléter les phrases ci-dessous en utilisant l'un de ces mots.

une population, un individu, la variable, classes, quantitatif, qualitatif, discrete, continue, un histogramme, un diagramme en bâtons.

1. En statistique, on étudie ..... ; ..... est donc sur lequel porte l'étude statistique.
2. Un caractère est dit .....s'il est exprimable par un nombre.
3. ....est un élément de la population, tandis que.....est l'objet de l'étude sur la population.
4. Lorsque les valeurs du caractère sont groupées en ....., la série statistique est représentée par .....
5. Graphiquement, on représente une série statistique .....par ..... et on représente une série statistique .....par.....

#### Activité 2

On a relevé la taille de 100 individus et l'on a obtenu les résultats suivants au centimètre près.  
 155 – 185 – 175 – 170 – 180 – 175 – 165 – 160 – 155 – 190 – 165 – 170 – 170 – 170 – 185 –  
 165 – 160 – 175 – 175 – 180 – 175 – 165 – 185 – 165 – 180 – 170 – 170 – 165 – 180 – 160 –  
 180 – 175 – 170 – 170 – 175 – 190 – 170 – 190 – 170 – 185 – 165 – 180 – 165 – 175 – 160 –  
 170 – 180 – 165 – 165 – 170 – 185 – 170 – 180 – 150 – 170 – 180 – 175 – 170 – 175 – 180 –  
 175 – 165 – 170 – 175 – 170 – 165 – 165 – 185 – 170 – 165 – 165 – 170 – 160 – 175 – 165 –  
 175 – 180 – 160 – 175 – 180 – 175 – 180 – 175 – 165 – 170 – 180 – 170 – 175 – 160 – 175 –  
 160 – 175 – 170 – 175 – 170 – 155 – 175 – 165 – 170 – 165.

1. Regrouper ces données dans un tableau donnant la distribution de cette série statistique.
2. La série statistique est elle qualitative ou quantitative ?
3. Quel est le caractère statistique étudié ? Est-t-il discret ou continue ?
4. Quelle est la taille moyenne de la population étudiée ?
5. Quelle est le mode de cette série statistique ?

#### Activité 3

On donne ci-dessous les notes obtenues par deux élèves en mathématiques.

Asma	18	6	10	12	11	11	16
Soumaya	11	9	14	16	13	9	

1. Comparer entre les moyennes des deux élèves.
2. Déterminer une valeur médiane des notes de chaque élève.
3. Quelle est l'étendue de chacune des deux séries de notes ?
4. Déterminer la variance et l'écart type de chacune des deux séries.

### Activité 4

Le tableau suivant donne la répartition des notes attribuées par deux correcteurs.

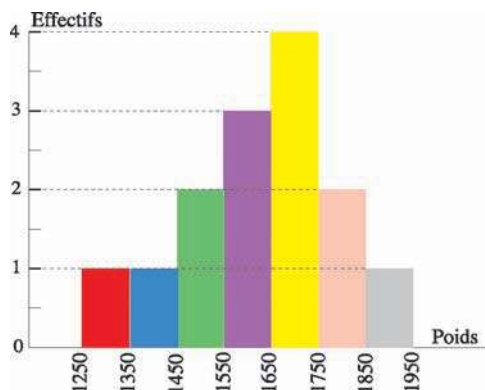
Notes	6	7	8	9	10	11	12	13	14	16	17	19
M <sup>r</sup> A	2	5	12	3	1	0	1	0	2	3	2	4
M <sup>r</sup> B	0	0	2	1	2	0	14	12	2	3	0	0

Comparer entre la moyenne, la médiane et l'étendue des notes attribuées par chacun des correcteurs.

### Activité 5

Le tableau ci-dessous donne la distribution du poids d'animaux âgés d'un an.

Poids en grammes	Effectifs
[1250 ; 1350[	1
[1350 ; 1450[	1
[1450 ; 1550[	2
[1550 ; 1650[	3
[1650 ; 1750[	4
[1750 ; 1850[	2
[1850 ; 1950[	1



1. Calculer les effectifs cumulés croissants et décroissants.
2. Tracer les polygones des effectifs cumulés croissants et décroissants.
3. En déduire le poids médian et l'intervalle interquartile.
4. Déterminer le pourcentage d'animaux pesant moins que 1650 grammes.

### Activité 6

Le tableau suivant donne la fréquence selon l'âge en années de 200 stagiaires dans une société.

Âge	Fréquence
[20 ; 25[	0,10
[25 ; 35[	0,36
[35 ; 45[	0,34
[45 ; 60[	0,20

1. Représenter ce tableau par un digramme semi-circulaire.
2. Calculer l'âge moyen arrondi à l'unité en supposant que dans chaque classe les valeurs sont égales au centre de la classe.
3. Combien y-a-t-il de stagiaires âgés de moins de 35 ans ?

## Activité 7

La fin de l'année scolaire 2004 /2005 a vu le démarrage de l'orientation en fin de 1<sup>ère</sup> année secondaire selon la nouvelle structure.

Le tableau incomplet suivant présente le taux d'orientation par filière (Source : Bureau des études, de la planification et de la programmation du ministère de l'éducation et de la formation : B.E.P.P).

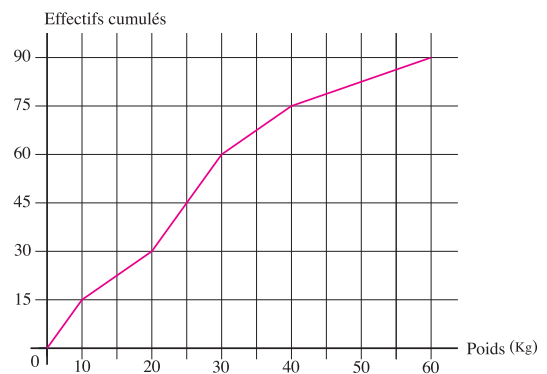
	Filière d'orientation					Total
	Lettres	Sciences	Technologies informatique	Economie et services	Sport	
Effectifs élèves	29957	47531		13181	334	107526
Taux (%)	27,9					100 ,0

1. Compléter le tableau.
2. Représenter ces données par un diagramme de votre choix.

## Activité 8

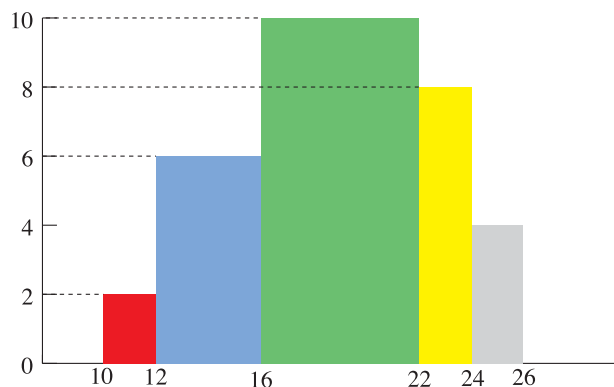
La courbe ci-contre est celle des effectifs cumulés croissants d'une série statistique.

1. Lire sur le graphique la médiane et les quartiles  $Q_1$  et  $Q_3$ .
2. Déterminer le tableau des effectifs de cette série.



## Activité 9

Donner sans calculs, la classe modale, la médiane, l'écart interquartile et la moyenne de la série statistique représentée par l'histogramme ci-dessous.



## Découvrir

### I. Séries statistiques à deux caractères

On est souvent amené à faire l'étude statistique d'une population selon deux caractères à la fois, c'est le cas si nous considérons par exemple le poids et la taille d'un individu, l'âge et l'état matrimonial d'une personne, les notes en arabe et en français d'un élève etc....

Donne chacun de ces cas, on obtient un ensemble de couples formant **une série statistique à deux caractères** appelée aussi **une série statistique double**.

#### 1. Distribution d'une série statistique double

##### Activité 1

Sur un échantillon de 30 logements on a fait deux observations. L'une concerne le nombre X des pièces du logement et l'autre concerne le nombre Y de personnes habitant ce logement. Les résultats des ces observations sont donnés dans les tableaux suivants

N° d'ordre	X	Y
1	3	5
2	2	4
3	3	3
4	4	5
5	4	3
6	3	4
7	2	2
8	2	2
9	3	4
10	3	3

N° d'ordre	X	Y
11	2	2
12	4	5
13	3	1
14	3	2
15	4	3
16	3	3
17	2	3
18	3	2
19	2	1
20	3	2

N° d'ordre	X	Y
21	3	3
22	2	2
23	2	1
24	4	4
25	2	3
26	4	5
27	3	2
28	3	4
29	2	3
30	2	1

- Quelles sont les valeurs prises par X et celles prises par Y ?
- a. Reproduire et compléter le tableau suivant

X \ Y	1	2	3	4	5
2					0
3		4			
4					

Le nombre d'individus vérifiant à la fois  $X = x_i$  et  $Y = y_j$  est noté  $n_{ij}$  et est appelé l'effectif associé au couple  $(x_i, y_j)$

- Que représente la valeur 0 qui se trouve à l'intersection de la première ligne et la cinquième colonne ? On note  $n_{15}$  cette valeur.
  - Donner  $n_{32}$ ,  $n_{23}$  et  $n_{34}$ .
- Calculer chacune des fréquences  $f_{32}$ ,  $f_{23}$  et  $f_{34}$ .

$f_{ij} = \frac{n_{ij}}{n}$  est la fréquence associée au couple  $(x_i, y_j)$ .  
n étant l'effectif total.

## Activité 2

Le tableau suivant donne la répartition d'un échantillon de 100 sportifs selon leur taille en cm et leur poids en kg.

Taille \ Poids	[165 ; 170[	[170 ; 175[	[175 ; 180[	[180 ; 185[
[60 ; 70[	10	7	4	1
[70 ; 80[	11	13	8	4
[80 ; 90[	8	7	15	12

1. Combien y-a-t-il de sportifs de l'échantillon ayant un poids de 70 kg au plus dont la taille est inférieure à 175 cm ?
2. Quelle est le pourcentage des sportifs de l'échantillon ayant une taille inférieure à 170 cm ?
3. Combien y-a-t-il de sportifs de l'échantillon ayant un poids inférieure à 80 kg et une taille supérieure ou égale à 175 cm ?

## 2. Nuage de points, ajustement affine

### Activité 3

Pour étudier la relation entre le revenu annuel  $x$  d'un ménage et la somme  $y$  qu'il épargne dans l'année, on a interrogé dix ménages.

Les résultats sont donnés dans le tableau suivant où,  $x_i$  est le revenu annuel et  $y_i$  la somme épargnée par le ménage  $n_i$ .

Revenu annuel $x_i$	400	500	600	700	800	900	1000	1100	1200	1300
Somme épargnée $y_i$	0	25	45	75	100	150	180	220	250	300

Le plan étant muni d'un repère.

1. Représenter les dix points  $M_i$  de coordonnées  $x_i$  et  $y_i$ .  
L'ensemble des points  $M_i$  obtenus constitue **le nuage de points représentant la série statistique**.
2. a. Quel est le revenu annuel moyen  $\bar{x}$  d'un ménage ?  
b. Quelle est la moyenne  $\bar{y}$  des sommes épargnées ?  
c. Représenter le point G de coordonnées  $\bar{x}$  et  $\bar{y}$ .

Le point G s'appelle **point moyen** du nuage des points représentant la série statistique.

Le nuage de points semble être aligné sur une droite D. (Les points sont à peu près sur D).

On dit alors que l'on a un **ajustement affine** (par abus de langage, on parle souvent d'**ajustement linéaire**).

3. On suppose que la droite d'ajustement D passe par le point moyen G et a pour coefficient directeur 0,334.

a. Déterminer alors une équation de la droite D sous la forme  $y = mx + p$ .

b. Donner une estimation de la somme épargnée par un ménage dont le revenu annuel est 2000 dinars.

### Activité 4

Le tableau suivant illustre l'évolution des taux de redoublement et d'abandon en 7<sup>ème</sup> année de l'enseignement de base et en 1<sup>ère</sup> année secondaire (Source : B.E.P.P).

		Année scolaire	99/00	00/01	01/02	02/03	03/04	04/05
7 <sup>ème</sup> de base	Taux de redoublement		19,5	23,2	23,8	23,7	24,8	26,0
	Taux d'abandon		10,2	11,5	12,7	13,8	14,1	14,3
1 <sup>ère</sup> secondaire	Taux de redoublement		10,9	12,2	14,3	14,5	15,4	18,0
	Taux d'abandon		7,3	8,5	11,0	12,8	13,2	14,5

1. Compléter le tableau illustrant l'évolution des taux de promotion en 7<sup>ème</sup> de base et en 1<sup>ère</sup> année secondaire.

Année scolaire	99/00	00/01	01/02	02/03	03/04	04/05
Taux de promotion (7 <sup>ème</sup> de base)						
Taux de promotion (1 <sup>ère</sup> secondaire)						

2. Représenter le nuage des points représentant les séries.

a.

Rang de l'année : $x_i$	1	2	3	4	5	6
Taux de redoublement en 7 <sup>ème</sup> année de base : $y_i$	19,5	23,2	23,8	23,7	24,8	26,0

b.

Rang de l'année : $x_i$	1	2	3	4	5	6
Taux de redoublement en 1 <sup>ère</sup> année secondaire : $z_i$	10,9	12,2	14,3	14,5	15,4	18,0

## Activité 5

Le tableau suivant donne l'évolution du chiffre d'affaires (en millions de dinars) d'une entreprise entre 1998 et 2004.

Année	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004
Rang de l'année ( $x_i$ )	1	2	3	4	5	6	7
Chiffre d'affaire ( $y_i$ )	57	60	63	69,7	76,6	79,4	81,5

- Représenter le nuage de points  $M_i(x_i, y_i)$  dans le plan rapporté à un repère orthogonal R. On prendra 2cm en abscisse pour une année et 2cm en ordonnées pour représenter 10 millions de dinars. L'axe des abscisses sera gradué à partir de 0; l'axe des ordonnées sera gradué à partir de 50.  
Au vu de ce nuage peut-on envisager un ajustement affine ?
- Déterminer, en pourcentage, l'augmentation du chiffre d'affaires entre 1998 et 2004 (on arrondira à 1% près par excès)
- Soit G le point moyen de nuage. Calculer les coordonnées de G. Placer G dans le repère R.
- On suppose que la droite ( $\Delta$ ) d'équation  $y = 4,5x + 51,6$  est une droite d'ajustement
  - Montrer que ( $\Delta$ ) passe par G.
  - Tracer ( $\Delta$ ) dans le repère R.
- En admettant que l'évolution continue au même rythme et en utilisant l'ajustement affine ; donner une estimation à 0,1 millions de dinars près du chiffre d'affaires de l'entreprise en 2010 et en 2020.

## Activité 6

Le tableau suivant donne les recettes et les dépenses en dinars d'une personne pendant dix semaines.

Semaine n° i	Recette : $x_i$	Dépense : $y_i$
1	106	67
2	113	70
3	97	62
4	87	59
5	101	66
6	90	56
7	91	61
8	111	73
9	87	59
10	102	67

1. Représenter dans le repère orthogonal le nuage de points  $M_i(x_i, y_i)$ .
2. On partage le nuage de points en deux sous-nuages : le premier, de point moyen  $G_1$  est constitué par les 5 points ayant les plus petites abscisses et le second, de point moyen  $G_2$ , est constitué par les 5 autres points.
  - a. Déterminer les coordonnées de  $G_1$  et  $G_2$ , puis tracer la droite  $(G_1G_2)$  dans le repère.
  - b. Trouver une équation cartésienne de la droite  $(G_1G_2)$ .
3. À l'aide du tracé de la droite d'ajustement  $(G_1G_2)$  puis de son équation, estimer la dépense d'une semaine où la recette est de :
  - a. 70 dinars.
  - b. 120 dinars.

### 3. Distributions marginales

Le tableau ci-dessous donne la répartition de 160 employés selon le revenu mensuel  $X$  (en dinars) et le nombre d'enfants à charge  $Y$ .

Y \ X	[400, 500[	[500, 600[	[600, 700[	[700, 800[
0	6	3	2	0
1	8	16	14	4
2	7	17	42	3
3	0	5	18	6
4	0	0	4	5

1. a. Compléter le tableau ci-dessous donnant la **distribution marginale de X** (on dit aussi la distribution marginale par rapport au caractère X).

Revenu mensuel en dinars $x_i$	[400, 500[	[500, 600[	[600, 700[	[700, 800[
Effectif $n_i$				

- b. Déterminer la distribution marginale de  $Y$  en complétant le tableau suivant

Nombre d'enfants par famille	0	1	2	3	4
Effectif					

2. a. Calculer la moyenne  $\bar{x}$  et l'écart-type  $\sigma$  de  $X$ .
- b. Trouver la proportion d'employés de revenu appartenant à l'intervalle  $[\bar{x} - \sigma, \bar{x} + \sigma]$ .

# L'essentiel du cours

## I. Statistique à une variable

### Paramètres de position

Soit une série statistique  $(x_i, n_i)$  d'effectif total  $n$ .

Valeurs	$x_1$	$x_2$	...	$x_p$	Total
Effectifs	$n_1$	$n_2$		$n_p$	$n$
Fréquences	$f_1$	$f_2$		$f_p$	1

- La **moyenne**  $\bar{x}$  est définie par

$$\bar{x} = \frac{n_1 x_1 + n_2 x_2 + \dots + n_p x_p}{n} \text{ notée aussi } \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^p n_i x_i.$$

$$\text{On a } \bar{x} = f_1 x_1 + \dots + f_p x_p = \sum_{i=1}^p f_i x_i.$$

- On appelle **médiane** de la série statistique tout nombre  $M$  tel que
  - Au moins la moitié des valeurs du caractère sont inférieures ou égales à  $M$  ;
  - Au moins la moitié des valeurs du caractère sont supérieures ou égales à  $M$ .
- Le **premier quartile**, noté  $Q_1$  est la plus petite valeur de la série statistique telle que au moins 25% des valeurs prises sont inférieures ou égale à  $Q_1$ .
- Le **troisième quartile**, noté  $Q_3$  est la plus petite valeur de la série statistique telle que au moins 75% des valeurs prises sont inférieures ou égales à  $Q_3$ .
- On appelle **écart interquartile** le nombre  $Q_3 - Q_1$ .
- l'intervalle  $[Q_1, Q_3]$  est l'**intervalle interquartile**.

### Paramètres de dispersion

- La **variance** de la série est le nombre

$$V = \frac{1}{n} \left[ n_1 (x_1 - \bar{x})^2 + \dots + n_p (x_p - \bar{x})^2 \right] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^p n_i (x_i - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^p f_i (x_i - \bar{x})^2$$

On montre que ce nombre est aussi égal à

$$V = \frac{1}{n} (n_1 x_1^2 + \dots + n_p x_p^2) - \bar{x}^2 = (f_1 x_1^2 + \dots + f_p x_p^2) - \bar{x}^2.$$

(La moyenne des carrés moins le carré de la moyenne)

- L'**écart type** de la série est noté  $\sigma$ , c'est la racine carrée de la variance.
- L'**étendue** est la différence des valeurs maximale et minimale du caractère.

## II. Statistiques à deux variables

Soit  $(x_i, y_i)$  une série statistique double d'effectif total  $n$ .

- Le plan étant muni d'un repère, l'ensemble des points  $M_i$  de coordonnées  $x_i$  et  $y_i$  constitue le **nuage de points représentant la série statistique**.
- Le **point moyen** est le point de coordonnées  $(\bar{x}, \bar{y})$ .
- **Ajustement linéaire**

Le problème consiste à déterminer une droite ajustant au mieux un nuage de points (les points devant être «le plus près possible» de la droite).

# Test d'auto-évaluation

**Indiquer la bonne réponse.**

1. Dans un devoir de mathématiques, un groupe d'élèves a obtenu les notes  
13 , 8 , 11, 7 , 14 , 8 , 9 , 10 , 8 , 9 , 10 , 17 , 7 , 16 , 10 , 16.

1.1. Le caractère statistique que permet d'étudier cette série de notes est

- a. Le niveau des élèves en mathématiques.
- b. La note obtenu à ce devoir par les élèves de ce groupe.
- c. La moyenne de la classe.

1.2. a. Les valeurs 10 et 8 du caractère ont le même effectif.

b. 9,8 est la moyenne des notes.

c. 10,81 est l'écart type.

2. Le calcul de l'écart type d'une serie statistique permet de mesurer.

a. La moyenne des écarts des individus avec la valeur moyenne.

b. La dispersion de la population autour de la valeur moyenne.

c. La validité de l'étude statistique.

3. L'intervalle interquartile est

a.  $[Q1 , Q3]$ .

b.  $]Q1 , Q3[$ .

c.  $Q3 - Q1$ .

4. Soit la série statistique

X	2	5	7	10
Y	3	10	5	2

L'écart type est égal à

a. 5,55.

b. 4,5475.

c. 2,13.

5. Soit le nuage de points dont les coordonnées sont données dans le tableau suivant

X	2	3	4	5	6
Y	7	10	10	14	14

• Le point moyen est

a.  $G(4, 10)$ .

b.  $G(4,11)$ .

c.  $G(11,4)$ .

• Une droite d'ajustement linéaire a pour équation

a.  $y = 1,8x + 3,8$

b.  $y = 3,8x - 1,8$

c.  $y = -1,8x + 3,8$

# Exercices et problèmes

## Exercice 1

Un examen comporte 3 épreuves : Arabe, français et mathématiques. Un groupe de 8 candidats a obtenu les notes suivantes sur 20.

N° du candidat	1	2	3	4	5	6	7	8
Arabe	12	10	12	8	9	11	13	10
Français	13	9	14	9	8	12	9	11
Mathématiques	8	11	16	8	6	12	10	15

Pour chacune des disciplines, calculer la moyenne, l'écart-type et l'étendue de la série correspondante.

## Exercice 2

Les 36 élèves d'une classe de 3<sup>ème</sup> lettre ont obtenu les notes suivantes en mathématiques.

Note : $x_i$	7	8	9	10	11	12	13	14	16
Effectif : $n_i$	2	6	3	12	5	4	2	1	1

1. Construire le diagramme en bâtons des effectifs.
2. Déterminer une valeur approchée à  $10^{-2}$  près de la moyenne et de l'écart-type  $\sigma$  de cette série statistique.
3. Déterminer le pourcentage de notes appartenant à l'intervalle  $[\bar{x} - \sigma, \bar{x} + \sigma]$ .

## Exercice 3

Dans un examen, un candidat a obtenu 8 en arabe (coefficient 4), 11 en anglais (coefficient 3) et 6 en histoire-géographique (coefficient 1,5).

Combien doit-il obtenir à l'épreuve de mathématiques (coefficient 1) pour avoir 10 de moyenne sur l'ensemble de ces quatre épreuves ?

## Exercice 4

On a relevé la taille en cm de 30 élèves d'une classe de 3<sup>ème</sup> et l'on a obtenu

168,158,172,182,165,181,176,175,161,156,163,165,159,167,171,151,166,166,159,173,164,158,172,150,154,158,172,168,164,182.

1. Regrouper cette série en classes d'amplitude 5cm en commençant par la classe  $[150,155[$ .  
On complétera, après l'avoir reproduit, le tableau suivant

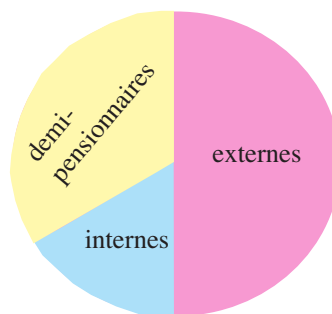
Taille	$[150,155[$	...
Effectif	3	

2. Construire l'histogramme des effectifs.
3. a. Calculer la fréquence de chaque classe.  
b. Construire l'histogramme des fréquences cumulées croissantes.  
c. Déterminer le pourcentage d'élèves mesurant moins de 165 cm.
4. a. Déterminer la moyenne de cette série statistique.  
b. Déterminer une valeur approchée arrondie à  $10^{-2}$  de l'écart type  $\sigma$  de cette série statistique.  
c. Déterminer le pourcentage d'élèves de la population appartenant à l'intervalle  $[\bar{x}-\sigma, \bar{x}+\sigma]$ .

## Exercice 5

Le diagramme ci-contre représente la répartition de 400 élèves en externes, internes et demi-pensionnaires.

1. Quelle est la proportion des élèves.
  - a. Externes ?
  - b. Internes ?
  - c. Demi-pensionnaires ?
2. Combien y-a-t-il d'élèves de chaque catégorie ?



## Exercice 6

Le tableau ci-dessous résume les renseignements à un questionnaire concernant les loisirs préférés selon le sexe d'un échantillon de 237 élèves.

Loisirs \ Sexe	Sport	Musique	Cinéma	Autres
Masculin	30	28	20	24
Féminin	25	42	22	46

1. a. Combien y-a-t-il d'élèves qui préfèrent la musique ?  
b. Combien y-a-t-il de filles qui ne préfèrent pas la musique ?
2. Compléter les deux tableaux suivants en donnant un titre à chacun d'eux.

a.

Sexe	Masculin	Féminin
Effectif		

b.

Loisir préféré	Sport	Musique	Cinéma	Autres
Effectif				

## Exercice 7

Le tableau suivant donne le poids  $y$  en kilogramme d'un nourrisson en fonction du nombre de jours  $x$  après sa naissance.

x	5	8	11	14	17	20	23	26	29
y	3,975	4,050	4,130	4,190	4,275	4,340	4,420	4,500	4,570

1. a. Représenter graphiquement cette série chronologique par le nuage de points  $M_i (x_i, y_i)$ . ainsi que son point moyen  $G$ .
- b. Un ajustement affine semble-t-il convenir ?
2. a. Compléter le tableau.

x	5	8	11	14	17	20	23	26	29
$y = 0,03x + 3,76$									

- b. La droite ( $\Delta$ ) d'équation  $y = 0,03x + 3,76$  semble-t-elle convenir pour un ajustement affine.
3. Utiliser la droite ( $\Delta$ ) pour estimer le poids du nourrisson.
  - a. 1 jour après sa naissance.
  - b. Le 30<sup>ème</sup> jour après sa naissance.

## Exercice 8

Soit le nuage de points dans les coordonnées sont données dans le tableau.

x	6	12	18	24	30	36
y	1,8	3,2	4	4,4	5,5	5,1

1. Représenter graphiquement le nuage de points dans un repère orthogonal.
2. Calculer les coordonnées du point moyen  $G$  du nuage et placer  $G$  dans le repère.
3. On partage le nuage de points en deux sous nuages.  
Le premier ,de point moyen  $G_1$  est constitué par les 3 points ayant les plus petites abscisses et le second ,de point moyen  $G_2$ , est constitué par les 3 autres points.
  - a. Calculer les coordonnées de  $G_1$  et  $G_2$ .
  - b. Tracer la droite ( $G_1G_2$ ).
  - c. Trouver une équation cartésienne de ( $G_1G_2$ ).
  - d. Le point  $G$  appartient-il à la droite ( $G_1G_2$ ).
4. On admet que la droite ( $G_1G_2$ ) constitue un ajustement convenable du nuage de points.
  - a. Trouver  $y$  pour  $x = 40$ .
  - b. Trouver  $x$  pour  $y = 7$ .

# Avec l'ordinateur

## Comment simuler le tirage d'un dé cubique régulier ?

- Dans la suite des chiffres décimaux obtenus par la fonction random, ne garder que les chiffres 1, 2, 3, 4, 5 et 6.
- Utiliser la fonction << partie entière >> :int(6xrand)+1 ou Int(6xRan#)+1. La machine renvoie 1,2,3,4,5 ou 6.
- Sur TI 83, utiliser la fonction randInt :randInt(1,6) renvoie 1, 2, 3 , 4, 5 ou 6 de façon aléatoire.

## Utilisation d'un tableur pour calculer les paramètres d'une série statistique

- Ouvrir une feuille de calcul (sur Excel, par exemple)
- Taper les valeurs de la série
- Sélectionner la zone où sont écrites les données. Utiliser le menu (Insertion/Nom/Définir) pour nommer cette série ( exemple Para ).
- Pour calculer la moyenne, taper la formule  
= MOYENNE(Para)
- Pour calculer le mode, taper la formule  
= MODE(Para)
- Pour calculer les quartiles, taper la formule  
= QUARTILE(Para ;1) donne le premier quartile  
= QUARTILE(Para ;2) donne la médiane  
= QUARTILE(Para ;3) donne le troisième quartile
- Pour calculer la variance, taper la formule  
= VAR(Para)
- Pour calculer l'écart type, taper la formule  
= ECARTYPE( Para)

Il y a plus de 4000 ans, les empereurs chinois faisaient déjà établir des statistiques agricoles. Les Egyptiens, les Grecs, les Romains, les Incas tenaient à jour des statistiques sur leur population ou leurs ressources agricoles. On continue d'ailleurs à effectuer régulièrement des recensements pour connaître le nombre d'habitants, leur répartition par âges, par sexe ou par catégories socioprofessionnelles, mais il s'agissait de statistiques purement descriptives, et c'est seulement au 18<sup>ème</sup> siècle que s'est réponde l'idée que les statistiques pouvaient servir de base à des prévisions. (Nous pouvons dire d'avance combien souilleront leurs mains du sang de leurs congénères, combien seront des faussaires, combien des empoisonneurs ) ( Adolphe Quetelet 1844).

Ce n'est donc qu'au 18<sup>ème</sup> siècle que la statistique se constitue comme une discipline scientifique autonome, s'employant à décrire les caractéristiques qui définissent une situation.

Le mot statistique provient de l'allemand << statistik >>, construit en 1749 par Schweitzel sur le latin moderne << collegium statisticum >> ( qui s'occupe de statistique), << statisticum >> étant un dérivé moderne du latin << status >> qui signifie état, situation. Le mot statisticien fut créé en 1834.

Depuis quelques décades, les statistiques ont commencé avec l'appui de la théorie des probabilités à promouvoir l'analyse des données statistiques et l'étude des tests d'hypothèses.

Aujourd'hui les statistiques sont largement utilisées en médecine et en pharmacie (efficacité d'un traitement ou d'un médicament), en politique (sondage avant les élections), dans l'industrie ( Contrôle de qualité, gestion des stocks, marketing) et dans de très nombreux autres domaines.

### **Attention à la moyenne**

Trois statisticiens partent à la chasse au gros gibier munis d'arcs et de flèches. A la vue d'un cerf, deux d'entre eux se mettent en position de tir. La flèche du premier passe trois mètres à droite de l'animal, celle du second passe trois mètres à gauche. Fou de joie le troisième, statisticien, se met à sauter sur place en hurlant : << On l'a eu, on l'a eu... >> Tangente N° 77.

# Chapitre 7

# Probabilités

**Vérifier vos acquis**

Le tableau suivant donne la répartition de 300 personnes selon l'activité sportive qu'ils pratiquent suivant leur âge.

Activité Âge	Football	Basket-ball	Volley-ball	Autres	Total
Moins de 20 ans	42	28	23	12	105
De 20 à 30 ans	31	25	20	19	95
Plus de 30 ans	8	12	14	66	100
Total	81	65	57	97	300

1. Quel est le pourcentage de personnes âgées de plus de 30 ans ?
2. Parmi les personnes qui pratiquent le football, quel est le pourcentage de personnes âgées de plus de 20 ans ?
3. Parmi les personnes qui pratiquent le basket-ball ou le volley-ball quel est le pourcentage de personnes âgées de 20 à 30 ans ?
4. Parmi les personnes qui ne pratiquent pas le football, quel est le pourcentage de personnes âgées de moins de 20 ans ?

## Découvrir

### 1. Cardinal d'un ensemble fini

#### Activité 1

1. Déterminer le nombre d'éléments de l'ensemble des entiers naturels pairs et inférieurs à 100.
2. Déterminer le nombre d'éléments de l'ensemble des entiers naturels impairs et inférieurs à 100.

#### Vocabulaire et notation

Un ensemble qui a un nombre fini d'éléments est dit fini.

Dans ce cas, on appelle cardinal de E le nombre d'éléments de E.

Lorsqu'un ensemble E a n éléments, on dit que son cardinal est n.

On note alors  $\text{card } E = n$ .

Un ensemble qui a zéro éléments, est appelé l'ensemble vide et est noté  $\emptyset$ .

#### Activité 2

On considère l'ensemble E et deux parties A et B de E, tels que

$$E = \{ (1,1) ; (1,2) ; (1,3) ; (2,3) \}.$$

$$A = \{ (1,2) \}.$$

$$B = \{ (1,1) ; (1,3) \}.$$

1. On désigne par C l'ensemble des éléments x de E tels que x appartient à A ou à B.  
Déterminer C.
2. On désigne par D l'ensemble des éléments x de E tels que x appartient à A et à B.  
Déterminer D.
3. On désigne par F l'ensemble des éléments x de E tels que x n'appartient pas à A.  
Déterminer F.

#### Définition

Soit E un ensemble fini et A et B deux parties de E.

- L'ensemble dont les éléments appartiennent à A ou à B est appelé réunion de A et B et est noté  $A \cup B$ .
- L'ensemble dont les éléments appartiennent à la fois à A et à B est appelé intersection de A et B et est noté  $A \cap B$ .
- L'ensemble dont les éléments appartiennent à E et n'appartiennent pas à A est appelé complémentaire de A dans E et est noté  $\overline{A}$ .

On a alors  $A \cup \overline{A} = E$  ;  $A \cap \overline{A} = \emptyset$ .

### Activité 3

On considère l'ensemble  $E$  et deux parties  $A$  et  $B$  de  $E$ , tels que

$$E = \{(1, 1, 2); (1, 2, -1); (1, 3, 0); (2, 3, -10)\}.$$

$$A = \{(1, 1, 2)\}.$$

$$B = \{(1, 1, 2); (1, 3, 0)\}.$$

Déterminer le cardinal de chacun des ensembles  $\bar{A}$ ,  $A \cup B$ ,  $A \cap B$ ,  $\bar{A \cup B}$ .

### Propriétés

Soit  $E$  un ensemble fini et  $A$  et  $B$  deux parties de  $E$ .

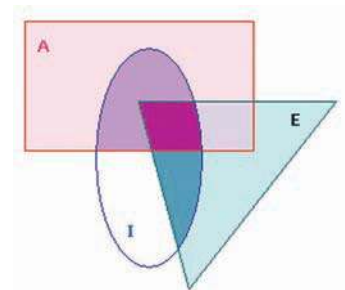
- Si  $A$  et  $B$  sont disjoints, alors  $\text{card}(A \cup B) = \text{card } A + \text{card } B$
- Si  $A$  et  $B$  ne sont pas disjoints, alors  
 $\text{card}(A \cup B) = \text{card } A + \text{card } B - \text{card}(A \cap B)$ .
- $\text{card } \bar{A} = \text{card } E - \text{card } A$ .

### Activité 4

Dans un lycée, on propose en matières optionnelles l'enseignement de trois langues : italien, allemand et espagnol.

Dans une classe,

- tous les élèves apprennent au moins l'une de ces trois langues,
- 2 élèves apprennent les trois langues,
- 15 élèves apprennent l'allemand et l'italien,
- 7 élèves apprennent l'allemand et l'espagnol,
- 10 élèves apprennent l'espagnol et l'italien,
- 22 élèves apprennent l'allemand,
- 26 élèves apprennent l'italien,
- 16 élèves apprennent l'espagnol.



On désigne par

$A$  l'ensemble des élèves qui apprennent au moins l'allemand,

$I$  l'ensemble des élèves qui apprennent au moins l'italien,

$E$  l'ensemble des élèves qui apprennent au moins l'espagnol.

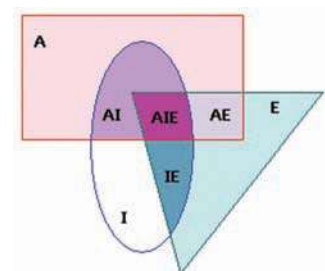
1. Dénombrer.

- les élèves qui apprennent l'allemand, l'italien et l'espagnol.
- les élèves qui apprennent l'allemand et l'italien seulement ;
- les élèves qui apprennent l'allemand et l'espagnol seulement ;
- les élèves qui apprennent l'italien et l'espagnol seulement.

2. En déduire le nombre des élèves de la classe.

3. Combien y a-t-il d'élèves n'apprenant qu'une seule langue ?

4. Combien y a-t-il d'élèves apprenant exactement deux langues ?



## Activité 5

Un appareil électroménager peut être défectueux à cause de deux défauts seulement, désignés par A et B.

Sur cent appareils on a les résultats suivants

- dix appareils présentent le défaut A.
- huit appareils présentent le défaut B.
- quatre appareils présentent simultanément les deux défauts.

1. Combien d'appareils présentent le défaut A ou le défaut B ?
2. Combien d'appareils présentent seulement le défaut A ?
3. Combien d'appareils ne présentent ni le défaut A, ni le défaut B ?

### 1.1 Produit cartésien de deux ensembles

#### Activité 1

Un centre culturel propose un abonnement pour deux activités, une le samedi et une le dimanche. En l'an 2003, les activités du samedi étaient théâtre, musique et sport (on les note par  $\{T, M, S\}$ ), celles du dimanche étaient cinéma et peinture, (on les note par  $\{C, P\}$ ).

Un abonnement est représenté par le couple  $(a, b)$ ,

où  $a$  désigne une activité proposée le samedi et  $b$  une activité proposée le dimanche.

1. Compléter le tableau ci-contre pour déterminer tous les abonnements possibles.
2. Combien a-t-on d'abonnements possibles ?
3. En l'an 2005, les activités du samedi sont devenues au nombre de 5, celles du dimanche sont devenues au nombre de 6. Combien a-t-on d'abonnements possibles ?

a \ b	C	P
T	(T, C)	
M		
S		

#### Définition

Le produit cartésien  $E \times F$ , se lit «E croix F», est l'ensemble des couples  $(x, y)$  tels  $x$  appartient à  $E$  et  $y$  appartient à  $F$ . On a  $\text{card}(E \times F) = \text{card}E \times \text{card}F$ .

#### Activité 2

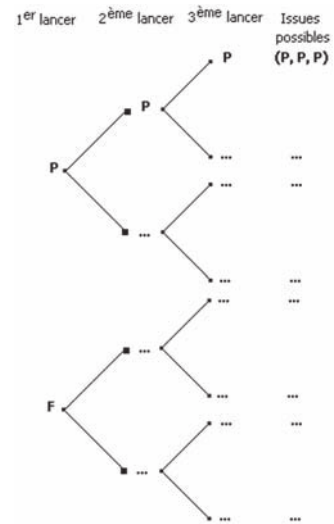
On lance une pièce de monnaie, le résultat est soit pile (noté P) soit face (noté F).

1. On lance la pièce deux fois. On modélise une issue par le couple  $(a, b)$  où  $a, b$  appartiennent à  $\{P, F\}$ .
  - a. Combien a-t-on d'issues possibles ?
  - b. Déterminer les issues où figure une seule fois face. Combien y en a-t-il ?
  - c. Déterminer les issues où figure une seule fois pile. Combien y en a-t-il ?
  - d. Déterminer les issues où ne figure aucune fois pile. Combien y en a-t-il ?

2. On lance la pièce trois fois.

On modélise une issue par le triplet  $(a, b, c)$  où  $a, b, c$  appartiennent à  $\{P, F\}$ .

- Compléter l'arbre de choix ci-contre.
- Combien a-t-on d'issues possibles ?
- Dans combien d'issues figure une seule fois face ?
- Dans combien d'issues figure trois fois pile ?
- Dans combien d'issues figure aucune fois face ?



### Activité 3

Une urne contient deux boules blanches, deux boules noires et une boule verte. On tire successivement deux boules, en remettant chaque fois la boule tirée dans l'urne. A l'aide d'un arbre de choix, répondre aux questions suivantes.

- Combien y-a-t-il de tirages possibles ?
- Combien y-a-t-il de tirages tels que la première boule tirée soit blanche ?
- Combien y-a-t-il de tirages tels que la deuxième boule tirée soit verte ?
- Combien y-a-t-il de tirages ne contenant aucune boule blanche ?
- Combien y-a-t-il de tirages contenant au moins une boule blanche ?

### Activité 4

Une urne contient deux boules blanches, deux boules noires et une boule verte. On tire successivement deux boules, en ne remettant pas la boule tirée dans l'urne. A l'aide d'un arbre de choix, répondre aux questions suivantes.

- Combien y-a-t-il de tirages possibles ?
- Combien y-a-t-il de tirages tels que la première boule tirée soit blanche ?
- Combien y-a-t-il de tirages tels que la deuxième boule tirée soit verte ?
- Combien y-a-t-il de tirages ne contenant aucune boule blanche ?
- Combien y-a-t-il de tirages contenant au moins une boule blanche ?

## 1.2 Nombres de parties à p éléments d'un ensemble à n éléments

### Activité 1

Soit  $E$  l'ensemble des entiers naturels  $n$  inférieurs ou égaux à 5. Déterminer toutes les parties de  $E$  qui contiennent quatre éléments seulement. Déterminer toutes les parties de  $E$  qui contiennent trois éléments seulement. Déterminer toutes les parties de  $E$  qui contiennent deux éléments seulement.

## Propriété

Soit  $E$  un ensemble fini à  $n$  éléments.

Le nombre de parties de  $E$  à  $p$  éléments est l'entier noté  $C_n^p$  (on lit «C, n, p»), et défini par

$$C_n^p = \frac{1 \times 2 \times \dots \times (n-p+1)}{1 \times 2 \times \dots \times p}.$$

## Notation et convention

L'entier  $n \times (n-1) \times \dots \times 1$  est noté  $n!$  et se lit factorielle  $n$ .

De sorte que l'on peut écrire  $C_n^p = \frac{n!}{(n-p)!p!}$ .

On convient que  $0! = 1$ .

### Activité 2

Calculer  $C_{10}^6$  ;  $C_{3000}^{3000}$  ;  $C_{1000}^{999}$ .

### Activité 3

Dans un jeu de 32 cartes, on appelle main tout ensemble de cinq cartes.  
Combien y-a-t-il de mains possibles ?

### Activité 4

Une urne contient deux boules rouges, trois boules blanches et une boule noire.  
On tire simultanément trois boules de l'urne.

1. Combien y-a-t-il de tirages possibles ?
2. Combien y-a-t-il de tirages possibles, contenant une boule noire ?
3. Combien y-a-t-il de tirages possibles, ne contenant aucune boule noire ?

## 2. Probabilité uniforme

### 2.1 Définition et propriétés

#### Activité 1

Un sac contient 1000 jetons numérotés de 1 à 1000.  
Une expérience consiste à tirer un jeton au hasard.

1. Combien y-a-t-il d'issues possibles ?
2. a. Dénombrer chacun des événements suivants

Lorsqu'on fait une expérience aléatoire  
Un résultat est appelé issue.  
L'ensemble des issues possibles est appelé univers des possibles.  
Un événement est une partie de l'univers des possibles.  
Un événement qui se réduit à une seule issue est appelé événement élémentaire.  
Deux événements sont dits incompatibles, si leur intersection est vide.

A « obtenir un jeton portant un numéro qui commence par 1 ».

B « obtenir un jeton portant un numéro qui finit par 2 ».

C « obtenir un jeton portant un numéro impair qui commence par 2 ».

b. Montrer que les événements A et C sont incompatibles.

c. Montrer que les événements B et C sont incompatibles.

3. Si on suppose que chaque issue apparaît avec la même fréquence égale à  $\frac{1}{1000}$ .

Déterminer la fréquence d'apparition de chacun des événements A, B et C.

### Définition

Soit E l'ensemble des issues d'une expérience aléatoire telle que tous les événements ont la même fréquence d'apparition.

La probabilité d'un événement A est le réel de  $[0,1]$ , noté  $p(A)$ , défini par  $p(A) = \frac{\text{card } A}{\text{card } E}$ .

Il résulte de la définition les propriétés suivantes

### Propriétés

- La probabilité d'un événement élémentaire est égale à  $\frac{1}{\text{card } E}$ .
- $p(E) = 1$ .
- Si A et B sont incompatibles, alors  $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$ .
- Pour tout A et B,  $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$ .
- $p(\bar{A}) = 1 - p(A)$ .

### Activité 2

On lance un dé cubique dont les faces sont numérotées de 1 à 6.

On suppose que tous les chiffres ont la même probabilité d'apparition.

1. Déterminer l'univers des possibles.

2. Déterminer la probabilité de chaque événement élémentaire.

3. Déterminer la probabilité de chacun des événements ci-dessous.

A « obtenir un nombre pair »,

B « obtenir un nombre impair inférieur ou égal à 3 »,

C « obtenir un nombre pair strictement supérieur à 3 »,

D « obtenir un multiple de 3 ou un nombre pair ».

### Activité 3

Une chaîne de télévision organise un sondage, auprès de 500 spectateurs pour déterminer quels sont les films qu'ils apprécient. On donne ci-dessous les résultats.

- 150 spectateurs n'aiment ni les films policiers, ni les films de science fiction.
- 200 spectateurs aiment les films policiers et n'aiment pas les dessins animés.
- 120 spectateurs n'aiment pas les films de science fiction et aiment les films policiers.
- 180 spectateurs n'aiment ni les films policiers, ni les dessins animés.

On choisit un spectateur au hasard parmi ceux qui ont été interrogés.

Quelle est la probabilité de chacun des évènements ci-dessous.

1. Le spectateur aime les films policiers ou les films de science fiction.
2. a. Le spectateur n'aime pas les films de science fiction.  
b. Le spectateur aime les films de science fiction.
3. a. Le spectateur n'aime pas les dessins animés.  
b. Le spectateur aime les dessins animés.

#### Activité 4

On lance deux dés bien équilibrés, numérotés de 1 à 6 et on s'intéresse à la somme des chiffres obtenus.

Déterminer la probabilité des évènements ci-dessous.

La somme des deux chiffres est 8.

La somme des deux chiffres est paire.

La somme des deux chiffres est impaire.

La somme des deux chiffres est supérieure ou égale à 11.

La somme des deux chiffres est inférieure ou égale à 10.

#### Activité 5

Un joueur tire au hasard et simultanément trois cartes dans un jeu de 52 cartes.

Trouver la probabilité des évènements ci-dessous.

A « obtenir trois cartes rouges »,

B « obtenir trois cartes de même couleur »,

C « obtenir trois as »,

D « obtenir au moins un as »,

E « n'obtenir aucun as ».

### 3. Epreuves successives et évènements indépendants

#### Activité 1

On lance une pièce de monnaie, bien équilibrée, on note à chaque fois le côté qui apparaît : P pour pile et F pour face.

1. Quelle est la probabilité d'obtenir pile ?

2. On répète l'expérience deux fois et on note à chaque fois le côté qui apparaît : P pour pile et F pour face.

Soit  $A_1$  un événement réalisé lors du premier lancer et  $A_2$  un événement réalisé lors du deuxième lancer.

a. La réalisation de  $A_1$  influe-t-elle sur celle de  $A_2$  ?

b. A l'aide d'un arbre de choix, déterminer et dénombrer l'ensemble E des issues possibles

c. Déterminer la probabilité d'un événement élémentaire de E.

d. Calculer la probabilité des évènements ci-dessous.

A « obtenir pile au premier lancer »,

B « obtenir face au deuxième lancer »,

C « obtenir face au premier lancer et pile au deuxième lancer »,

e. Calculer la probabilité des évènements  $\bar{A}$ ,  $A \cap B$ ,  $\bar{A} \cap B$ ,  $A \cup B$ ,  $A \cup B \cup C$ .

## Propriété

On considère une expérience, constituée de  $n$  épreuves successives.

Soit  $A_1$  un événement réalisé avec la probabilité  $p_1$  lors de la première expérience,  $A_2$  un événement réalisé avec la probabilité  $p_2$  lors de la deuxième expérience et  $A_n$  est un événement réalisé avec la probabilité  $p_n$  lors de la  $n^{\text{ième}}$  expérience.

On dit que les événements sont indépendants si la réalisation de l'un n'influe pas sur la réalisation du suivant. Alors la probabilité que les événements  $A_1, A_2, \dots, A_n$  soient successivement réalisés est égale à  $p_1 \times p_2 \times \dots \times p_n$ .

### Activité 2

Une urne contient deux boules blanches et huit boules rouges.

On tire au hasard une boule.

- Calculer la probabilité de tirer une boule blanche.
  - Calculer la probabilité de tirer une boule rouge.
- On répète l'expérience trois fois en remettant après chaque essai la boule tirée dans l'urne. Etablir un arbre de choix, puis calculer la probabilité de chacun des événements ci-dessous.
  - La première boule tirée est blanche.
  - La deuxième boule tirée est rouge.
  - La dernière boule tirée est blanche.
  - Aucune boule tirée n'est blanche.
  - Le tirage contient au moins une boule blanche.

### Activité 3

La probabilité pour qu'un homme soit vivant dans 25 ans est  $\frac{3}{5}$  et la probabilité que sa femme soit vivante dans 25 ans est  $\frac{2}{3}$ .

Quelle est la probabilité que dans 25 ans.

- Les deux soient vivants,
- Seulement l'homme soit vivant,
- Seulement la femme soit vivante,
- Au moins l'un des deux soit vivant.

### Activité 4

On suppose que 10% des ampoules produites par une machine sont défectueuses.

On choisit 10 ampoules au hasard. Quelle est la probabilité pour que parmi les 10 ampoules choisies.

- Aucune ampoule ne soit défectueuse,
- Au moins une ampoule soit défectueuse,
- Exactement une ampoule soit défectueuse,
- Au moins deux ampoules soient défectueuses.

## Activité 5

On suppose que les probabilités d'avoir un garçon ou une fille sont égales. Parmi 500 familles à 4 enfants chacune, quelle est la probabilité d'avoir.

1. Aucune fille,
2. Au moins un garçon,
3. Exactement deux filles,
4. Au moins deux garçons.

## 4. Epreuves successives et événements dépendants

### Activité 1

Une urne contient deux boules blanches et huit boules rouges.

On tire au hasard une boule.

1. a. Calculer la probabilité de tirer une boule blanche.  
b. Calculer la probabilité de tirer une boule rouge.  
On répète l'expérience deux fois sans remettre la boule tirée dans l'urne.
2. Etablir un arbre de choix, puis calculer la probabilité de chacun des événements suivants.
  - a. La première boule tirée est blanche.
  - b. La deuxième boule tirée est rouge.
  - c. La dernière boule tirée est blanche.
  - d. Aucune boule tirée n'est blanche.
  - e. Le tirage contient au moins une boule blanche.

### Propriété

On considère une expérience aléatoire, constituée de  $n$  expériences aléatoires successives. Soit  $A_1$  un événement réalisé lors de la première expérience,  $A_2$  un événement réalisé lors de la deuxième expérience, et  $A_n$  est un événement réalisé lors de la  $n^{\text{ième}}$  expérience. On dit que les événements sont dépendants si la réalisation de l'un influe sur la réalisation du suivant. Soit  $p_1$  la probabilité de  $A_1$ ,  $p_2$  la probabilité de  $A_2$  si  $A_1$  se réalise et  $p_n$  la probabilité de  $A_n$  si l'événement  $A_{n-1}$  se réalise. Alors la probabilité que les événements  $A_1, A_2, \dots, A_n$  se réalisent successivement est égale à  $p_1 \times p_2 \times \dots \times p_n$ .

### Activité 2

Au cours d'une expérience sur le comportement des animaux, un lapin doit choisir entre quatre portes d'apparence identique et numérotées de 1 à 4.

S'il choisit la porte 1, l'expérience s'arrête.

S'il choisit l'une des autres portes, il retourne à la case départ et fait un autre essai.

1. On suppose qu'à chaque essai, le lapin ne se souvient pas de l'essai précédent. Déterminer la probabilité de chacun des événements ci-dessous.  
A « le lapin choisit la porte numéro1 au premier essai »,  
B « le lapin choisit la porte numéro1 au deuxième essai »,  
C « le lapin choisit la porte numéro1 au sixième essai ».

2. On suppose maintenant qu' à chaque essai le lapin évite la porte choisie auparavant et choisit entre celles qu'il n'a pas testées.

Déterminer la probabilité de chacun des évènements ci-dessous.

A « le lapin choisit la porte numéro1 au premier essai»,

B « le lapin choisit la porte numéro1 au troisième essai »,

C « le lapin choisit la porte numéro1 au cinquième essai ».

### Activité 3

Trois boites à bijoux identiques ont chacune deux tiroirs. Dans chaque tiroir de la première boite il y a un collier en or, dans chaque tiroir de la deuxième il y a un collier en argent et dans l'un des tiroirs de la troisième boite il y a un collier en or et dans l'autre un collier en argent. On choisit une boite au hasard, quelle est la probabilité.

1. Qu'au moins un tiroir contienne un collier en or.

2. Qu'un seul tiroir contienne un collier en argent.

### Activité 4

Lors d'un examen, un élève doit tirer successivement et au hasard trois questions parmi 27 questions réparties de la manière suivante

9 questions d'analyse.

5 questions de probabilité.

4 questions de statistiques.

Calculer les probabilités des évènements ci-dessous.

1. L'élève tire trois questions d'analyse.

2. L'élève ne tire aucune question d'analyse.

3. L'élève tire au moins une question de probabilité et une seule question de statistiques.

4. L'élève ne tire que des questions de statistiques et de probabilité.

# L'essentiel du cours

## I. Cardinal d'un ensemble fini

### Définition

Soit  $E$  un ensemble fini et  $A$  et  $B$  deux parties de  $E$ .

- L'ensemble dont les éléments appartiennent à  $A$  ou à  $B$  est appelé réunion de  $A$  et  $B$  et est noté  $A \cup B$ .
- L'ensemble dont les éléments appartiennent à la fois à  $A$  et à  $B$  est appelé intersection de  $A$  et  $B$  et est noté  $A \cap B$ .
- L'ensemble dont les éléments appartiennent à  $E$  et n'appartiennent pas à  $A$  est appelé complémentaire de  $A$  dans  $E$  et est noté  $\bar{A}$ .

On a alors  $A \cup \bar{A} = E$  ;  $A \cap \bar{A} = \emptyset$ .

### Propriétés

Soit  $E$  un ensemble fini et  $A$  et  $B$  deux parties de  $E$ .

- Si  $A$  et  $B$  sont disjoints, alors  $\text{card}(A \cup B) = \text{card } A + \text{card } B$
- Si  $A$  et  $B$  ne sont pas disjoints, alors  
 $\text{card}(A \cup B) = \text{card } A + \text{card } B - \text{card}(A \cap B)$ .
- $\text{card}(\bar{A}) = \text{card}(E) - \text{card}(A)$ .

## Produit cartésien d'ensembles

### Définition

Le produit cartésien  $E \times F$ , se lit « $E$  croix  $F$ », est l'ensemble des couples  $(x, y)$  tels  $x$  appartient à  $E$  et  $y$  appartient à  $F$ . On a  $\text{card}(E \times F) = \text{card}(E) \times \text{card}(F)$ .

## Nombres de parties à $p$ éléments d'un ensemble à $n$ éléments

Soit  $E$  un ensemble fini à  $n$  éléments.

Le nombre de parties de  $E$  à  $p$  éléments est l'entier noté  $C_n^p$  (on lit « $C, n, p$ »), et défini par

$$C_n^p = \frac{1 \times 2 \times \dots \times (n-p+1)}{1 \times 2 \times \dots \times p}$$

# L'essentiel du cours

## II. Probabilité uniforme

### Définition

Soit  $E$  l'ensemble des issues d'une expérience aléatoire telle que tous les évènements ont la même fréquence d'apparition.

La probabilité d'un évènement  $A$  est le réel de  $[0,1]$ , noté  $p(A)$ , défini par  $p(A) = \frac{\text{card } A}{\text{card } E}$ .

### Propriétés

- La probabilité d'un évènement élémentaire est égale à  $\frac{1}{\text{card } E}$ .
- $p(E) = 1$ .
- Si  $A$  et  $B$  sont incompatibles, alors  $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$ .
- Pour tout  $A$  et  $B$ ,  $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$ .
- $p(\bar{A}) = 1 - p(A)$ .

## III. Epreuves successives et évènements indépendants

### Propriété

On considère une expérience, constituée de  $n$  épreuves successives.

Soit  $A_1$  un évènement réalisé avec la probabilité  $p_1$  lors de la première expérience,  $A_2$  un évènement réalisé avec la probabilité  $p_2$  lors de la deuxième expérience et  $A_n$  est un évènement réalisé avec la probabilité  $p_n$  lors de la  $n^{\text{ième}}$  expérience.

On dit que les évènements sont indépendants si la réalisation de l'un n'influe pas sur la réalisation du suivant. Alors la probabilité que les évènements  $A_1, A_2, \dots, A_n$  soient successivement réalisés est égale à  $p_1 \times p_2 \times \dots \times p_n$ .

## IV. Epreuves successives et évènements dépendants

### Propriété

On considère une expérience aléatoire, constituée de  $n$  expériences aléatoires successives.

Soit  $A_1$  un évènement réalisé lors de la première expérience,  $A_2$  un évènement réalisé lors de la deuxième expérience, et  $A_n$  est un évènement réalisé lors de la  $n^{\text{ième}}$  expérience. On dit que les évènements sont dépendants si la réalisation de l'un influe sur la réalisation du suivant.

Soit  $p_1$  la probabilité de  $A_1$ ,  $p_2$  la probabilité de  $A_2$  si  $A_1$  se réalise et  $p_n$  la probabilité de  $A_n$  si l'évènement  $A_{n-1}$  se réalise. Alors la probabilité que les évènements  $A_1, A_2, \dots, A_n$  se réalisent successivement est égale à  $p_1 \times p_2 \times \dots \times p_n$ .

# Test d'auto-évaluation

## 1. Répondre par vrai ou faux.

- ◆ Si  $p(E) = 1 - p(F)$  alors  $E = \overline{F}$ .
- ◆  $p(A \cap B) \leq p(A \cup B)$ .
- ◆ On a moins d'une chance sur 10 d'obtenir 4 fois pile en lançant 4 fois de suite une pièce de monnaie parfaitement équilibrée.
- ◆ Une urne contient 4 boules blanches et 3 boules noires. Il y a autant de chance d'obtenir 3 boules noires en effectuant un tirage simultané de 3 boules que d'obtenir 4 boules blanches en effectuant un tirage simultané de 4 boules.

## 2. Choisir la bonne réponse.

- ◆ On lance 3 fois une pièce de monnaie bien équilibrée.  
La probabilité d'obtenir au moins une fois pile est  
a.  $\frac{1}{8}$ .                      b.  $\frac{3}{8}$ .                      c.  $\frac{7}{8}$ .
- ◆ La probabilité d'un événement peut être égale à  
a.  $\frac{3}{2}$ .                      b.  $\frac{-1}{8}$ .                      c.  $\frac{3}{5}$ .
- ◆ Une urne contient 2 boules bleues et 4 boules rouges, on tire successivement et avec remise trois boules.  
La probabilité d'obtenir 3 boules rouges est  
a.  $\frac{5}{4}$ .                      b.  $\frac{1}{5}$ .                      c.  $\frac{8}{27}$ .
- ◆ On lance simultanément trois dés cubiques parfaits. La probabilité d'obtenir trois nombres pairs est  
a.  $\frac{1}{2}$ .                      b.  $\frac{1}{3}$ .                      c.  $\frac{1}{8}$ .

# Exercices et problèmes

## Exercice 1

1. Combien peut-on former de nombres de quatre chiffres ?
2. Combien peut-on former de nombres de quatre chiffres distincts ?
3. Combien peut-on former de nombres pairs de quatre chiffres ?
4. Combien peut-on former de nombres pairs de quatre chiffres distincts ?
5. Combien peut-on former de nombres de quatre chiffres distincts contenant au moins l'un des chiffres 0, 1, 2 ?

## Exercice 2

Parmi toutes les mains de 8 cartes extraites d'un jeu de 32 cartes, dénombrer celles contenant

1. Un seul as ;
2. Exactement deux as ;
3. Au moins un as ;
4. Au moins un as et au moins un valet.

## Exercice 3

Pour construire une grille de mots croisés de 10 lignes et 12 colonnes, on noircit 23 cases.

Combien de grilles distinctes peut-on obtenir ?

## Exercice 4

On dispose de 4 lettres A, 5 lettres B et 9 lettres C. Combien de mots à 18 lettres peut-on écrire avec ces lettres ?

## Exercice 5

On lance un dé dont les faces sont numérotées de 1 à 6. On note à chaque fois le numéro de la face obtenue.

1. Déterminer l'univers des possibles E ainsi que les probabilités d'apparition de chacun des chiffres.
2. Quelle est la probabilité d'obtenir un chiffre pair ?
3. Quelle est la probabilité d'obtenir un chiffre multiple de 3 ?
4. Quelle est la probabilité d'obtenir un chiffre strictement supérieur à 2 ?

## Exercice 6

Un dé équilibré a deux faces portant le chiffre 4, trois faces portant le chiffre 3 et une face portant le chiffre 6.

On lance ce dé une fois.

1. Déterminer l'univers des possibles E ainsi que les probabilités d'apparition de chacun des chiffres.
2. Quelle est la probabilité d'obtenir un chiffre pair ?
3. Quelle est la probabilité d'obtenir un 4 ou un 6 ?

## Exercice 7

On lance simultanément deux dés bien équilibrés, de couleurs différentes et dont les faces sont numérotées 1, 2, 3, 4, 5, 6.

1. Déterminer l'univers des possibles.
2. Quelle est la probabilité d'obtenir deux chiffres pairs ?
3. Quelle est la probabilité d'obtenir un chiffre pair et un chiffre impair ?
4. Quelle est la probabilité d'obtenir une somme égale à 4 ?
5. Quelle est la probabilité d'obtenir une somme égale à 9 ?
6. Quelle est la probabilité d'obtenir une somme supérieure strictement à 3 ?

## Exercice 8

Une urne contient deux boules blanches, trois boules rouges et cinq boules noires.

On tire une boule de l'urne et on observe sa couleur.

1. Déterminer l'univers des possibles  $E$  ainsi que les probabilités d'apparition de chacune des boules.  
On répète l'expérience deux fois en remettant à chaque fois la boule dans l'urne.
2. Quelle est la probabilité d'obtenir deux boules rouges ?
3. Quelle est la probabilité d'obtenir deux boules noires ?
4. Quelle est la probabilité d'obtenir deux boules de même couleur ?
5. Quelle est la probabilité d'obtenir deux boules de couleurs différentes ?
6. Quelle est la probabilité d'obtenir une boule blanche et une boule rouge ?
7. Quelle est la probabilité d'obtenir au moins une boule blanche ?

## Exercice 9

Une urne contient quatre boules numérotées 6 et cinq boules numérotées  $-3$  ; indiscernables au toucher. On tire simultanément deux boules de l'urne.

1. Quelle est la probabilité de tirer deux boules portant deux nombres différents ?
2. Quelle est la probabilité de tirer deux boules portant le même nombre ?
3. On note  $S$  la somme des nombres des deux boules tirées.
  - a. Quelles sont les différentes valeurs possibles de  $S$  ?
  - b. Déterminer la probabilité de chaque valeur possible de  $S$  ?
  - c. Quelle est la probabilité que  $S$  soit positive ?
  - d. Quelle est la probabilité que  $S$  soit paire ?

## Exercice 10

Un centre de transfusion sanguine diffuse le tableau suivant donnant la répartition des principaux groupes sanguins des habitants d'une même ville. Par ailleurs, le sang humain possède une caractéristique appelée facteur Rhésus. Cette caractéristique peut revêtir deux formes que l'on appelle Rhésus + et Rhésus -.

	O	A	B	AB
R <sub>+</sub>	39%	36%	9.1%	2.8%
R <sub>-</sub>	5.1%	4.9%	1.4%	1.7%

Un couple de cette ville est choisi au hasard, déterminer la probabilité de chacun des événements suivants

1. L'homme est  $O R_+$  et la femme est  $BR_-$ .
2. L'homme est A et la femme est AB.
3. L'homme et la femme sont A.
4. L'homme est A et la femme n'est pas A.
5. L'homme ou la femme est A.
6. L'homme et la femme sont  $R_+$ .
7. L'homme ou la femme est  $R_-$ .
8. L'homme et la femme sont de Rhésus différents.

### Exercice 11

On considère une population de lapins où le nombre de mâles est la moitié du nombre de femelles. Des études statistiques ont montré que dans cette population 4% des mâles avaient le caractère albinos et 0.26% des femelles avaient ce caractère.

1. Quelle est la probabilité pour qu'une femelle de cette population prise au hasard ne soit pas albinos ?
2. Quelle est la probabilité pour qu'un lapin de cette population pris au hasard soit albinos ?
3. Quelle est la probabilité pour qu'un lapin albinos de cette population pris au hasard soit un mâle ?

### Exercice 12

On lance 100 fois une pièce de monnaie équilibrée.

1. Quelle est la probabilité d'obtenir 100 fois pile ?
2. Quelle est la probabilité d'obtenir au moins une fois pile ?
3. Quelle est la probabilité d'obtenir exactement 50 fois pile ?

### Exercice 13

Dans une classe de 36 élèves aucun élève n'est né un 29 février.

Est-il plus raisonnable de parier sur le fait que deux élèves au moins fêtent leur anniversaire le même jour que de parier le contraire ?

### Exercice 14

Expliquer pourquoi, lorsqu'on lance trois dés discernables tels que les faces de chacun sont numérotées de 1 à 6, on obtient plus souvent la somme 10 que la somme 9, bien que ces sommes soient obtenues chacune de six façons différentes.

### Exercice 15

Le chevalier de Méré, philosophe et homme de lettres vivait au XVII<sup>ème</sup> siècle. Il augmentait ses revenus de la façon suivante : il pariait qu'avec un dé non truqué, il était capable d'obtenir au moins un six en 4 coups.

Il se mit alors à parier qu'il était capable d'obtenir au moins un double six avec deux dés en 24 coups. Il commença à perdre ... !

1. Déterminer la probabilité de faire apparaître au moins un six en 4 coups avec un dé.

2. En déduire pourquoi Méré gagnait plus de fois qu'il ne perdait lorsqu'il disait faire apparaître au moins un six en 4 coups.
3. Expliquer pourquoi Méré commençait à perdre lorsqu'il pariait de faire apparaître au moins un double six en 24 coups avec deux dés.
4. S'il avait parié de faire apparaître au moins un double six en 25 coups avec deux dés aurait-il continué de gagner plus de fois qu'il n'aurait perdu.

## Exercice 16

La probabilité qu'un joueur X gagne une partie d'échec est 0.6.

Dans un tournoi de quatre parties, trouver la probabilité de chacun des événements suivants

1. X gagne la première partie, la troisième partie et perd les deux autres.
2. X gagne au moins une partie.
3. X gagne exactement une partie.
4. X gagne au moins deux parties.
5. X gagne quatre parties.

## Exercice 17

Trois personnes A, B et C visent une cible, (ils jouent une seule fois, l'un après l'autre dans l'ordre alphabétique), avec des probabilités respectives de  $\frac{1}{4}$  ;  $\frac{1}{3}$  et  $\frac{1}{2}$ .

1. Quelle est la probabilité qu'aucun n'atteigne la cible ?
2. Quelle est la probabilité qu'au moins un joueur atteigne la cible ?
3. Quelle est la probabilité qu'à chacun des joueurs d'atteindre le premier la cible ?

## Exercice 18

On lance un dé bien équilibré (dont les faces sont numérotées de 1 à 6).

Si le résultat est pair le jeu s'arrête et on note S le résultat,

sinon on tire au hasard un jeton d'une urne contenant 3 jetons (numérotés 1, 2 et 3) et on note S la somme des chiffres donnés par le dé et le jeton.

1. Déterminer la probabilité que S soit égale à 4.
2. Déterminer la probabilité que S soit un nombre pair.
3. Déterminer la probabilité que S soit inférieur ou égale à 7.

## Exercice 19

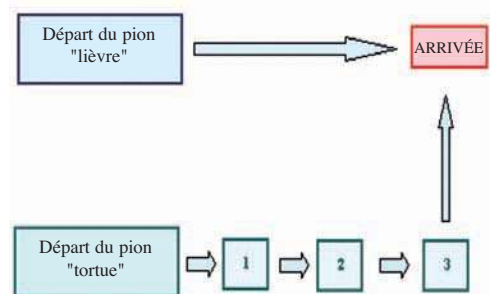
On considère le jeu décrit ci-contre :

on lance un dé bien équilibré, dont les faces sont numérotées de 1 à 6,

si le résultat est 6 le pion « lièvre » atteint la case arrivée et gagne,

sinon le pion « tortue » avance d'une case,

on continue jusqu'à ce qu'il y ait un gagnant en suivant les cases ci-contre.



Quelle est la situation la plus enviable : celle du pion « lièvre » ou celle du pion « tortue » ?

# Avec l'ordinateur

## I- Avec la machine à calculer

### 1. Comment simuler une expérience aléatoire ?

La fonction random de la calculatrice renvoie un nombre de l'intervalle  $[0, 1[$ .

Chaque nombre décimal obtenu simule le tirage d'un nombre de  $[0, 1[$ .

Chacun des dix chiffres décimaux obtenus simule le tirage d'un entier naturel inférieur à 9.

### 2. Comment simuler le tirage d'une pièce de monnaie ?

- Convenir que si  $x$  est un nombre obtenu avec la fonction random, pour  $x \leq 0,5$ , on tire pile ; sinon on tire face.
- Convenir que les chiffres décimaux obtenus correspondent à face, s'ils sont pairs et pile s'ils sont impairs.
- Régler le mode d'affichage en <<arrondi à l'unité>> (Fix 0). La machine donne 0 si  $x \leq 0,5$  et 1 sinon.
- Utiliser la fonction <<partie entière>> :  $\text{int}(2x\text{rand})$  ou  $\text{Int}(2x\text{Ran}\#)$ . La machine donne 0 ou 1.

Sur TI83, utiliser la fonction  $\text{randInt}$  :  $\text{randInt}(0,1)$  renvoie 0 ou 1 de façon aléatoire.

## II- Avec Excell

### 1. Pour générer des nombres aléatoires

La fonction **ALEA()** renvoie un nombre aléatoire de l'intervalle  $[0, 1[$ . L'appui sur la touche F9 génère une nouvelle valeur.

En pratique

On écrit dans la cellule A3 la formule : **=ALEA()** et on valide. On sélectionne ensuite la cellule A3.

En approchant le curseur du coin inférieur droit de la cellule, celui-ci prend la forme d'une croix. Il suffit alors de glisser la Souris vers le bas pour étendre la sélection. Quand on lâche le bouton de la souris, la formule est recopiée dans les cellules sélectionnées. Chaque cellule contient alors un nombre aléatoire de l'intervalle  $[0, 1[$ . Une frappe sur la touche F9 génère une nouvelle série de valeurs.

### 2. Pour générer un nombre entier $n$ tel que $a \leq n \leq b$

La fonction **ALEA.ENTRE.BORNE(a;b)** renvoie un nombre entier  $n$  tel que  $a \leq n \leq b$ . Si cette fonction n'est pas disponible, écrire  $\text{ENT}(\text{ALEA}() * 6) + 1$ . La touche F9 génère une nouvelle valeur.

En pratique

Afin de simuler 18 lancers d'un dé cubique, on a tapé, dans la Cellule A6, la formule **ALEA.ENTRE.BORNE(a;b)**, puis on a recopié, en tirant le curseur du coin inférieur droit de la cellule A6 vers le bas jusqu'à la cellule A23.

C'est à partir des problèmes de jeux de hasard que se définirent les concepts et les premières approches de la science de probabilité au milieu du 17<sup>ème</sup> siècle

Le chevalier de Méré, un joueur impénitent posa à Pascal (1623-1662) des problèmes qui le préoccupaient :

**1<sup>er</sup> problème :** "Qu'est ce qui est le plus probable : Obtenir au moins un "six" en lançant quatre fois un dé , ou obtenir au moins un "double six" en lançant vingt-quatre fois deux dés" (Voir Exercice 15).

**2<sup>ème</sup> problème :** Déterminer les chances de deux adversaires sachant qu'à un certain stade du jeu l'un a gagné  $n$  parties et l'autre  $p$ , et que le premier qui gagne  $m$  parties emporte toute la mise.

Pour ce deuxième problème. Pascal transmet sa solution à Pierre Fermat (1601- 1665) qui en avait lui-même élaboré une ainsi que Christian Huygens (1629- 1695), ce dernier publie en 1657 le premier traité de probabilités.

On considère généralement que c'est à propos de ces problèmes que Pascal élaborera les bases du calcul de probabilités (Bien avant Pascal, Pacioli (1445-1514) disserte sur les jeux de hasard ; Cardan (1501-1576) s'intéresse à des problèmes de dés et fait un relevé des précautions à prendre pour éviter la tricherie dans les jeux de hasard ; Galilée( 1564-1642) montre que dans le lancer de trois dés, la somme des trois chiffres des faces supérieures est plus souvent 10 que 9.)

Au 18<sup>ème</sup> siècle, les probabilités se dégagent de l'analyse combinatoire pour prendre leur autonomie sous l'impulsion des frères Bernoulli, qui établissent la loi des grands nombres. Laplace énonce la loi de probabilités des causes. D'autres savants du 18<sup>ème</sup> siècle, comme Moivre, Leibniz et Gauss développent cette nouvelle branche des mathématiques. Le calcul des probabilités connaît un grand essor au 19<sup>ème</sup> siècle avec Bertrand, Poincaré et Borel. Il faut attendre le 20<sup>ème</sup> siècle et le concept de mesure pour que soient définies rigoureusement les probabilités. En 1933, Kolmogorov explicite l'axiomatique utilisée jusqu'alors.

L'importance prise ces dernières années par des disciplines inconnues avant la guerre de 1939-1945, recherche opérationnelle et théorie de l'information liées aux ordinateurs, explique l'extension des probabilités.