REPUBLIQUE TUNISIENNE
MINISTERE DE L'EDUCATION

Mathématiques

Economie et Services

2ème année de l'Enseignement secondaire

Auteurs

Khadija Kaâniche
Ben Messaoud
Inspectrice principale

Houcine Sbika
Inspecteur principal

Nabil Mziou
Professeur principal

Mourad El arbi
Professeur

Evaluateurs

Hikma Smida
Professeur universitaire

Jaâfar Ben Yazid
Inspecteur général

Centre National Pédagogique

Remerciement

Les auteurs remercient toute personne qui a participé à l'élaboration de ce manuel, et en particulier le PROFESSEUR

HIKMA SMIDA

et L'INSPECTEUR GENERAL

JAAFAR BEN YAZID

dont les conseils pertinents ont été utiles à la réalisation de ce manuel.

Préface

Conformément aux nouveaux programmes mis en place par la loi d'orientation de l'éducation et de l'enseignement scolaire du 23 Juillet 2002, ce manuel vise à permettre à tous les élèves de développer des aptitudes.

Ils apprendront à :

Pratiquer une démarche mathématique, mobiliser des algorithmes et des procédures, utiliser et appliquer les mathématiques pour résoudre des problèmes dans des situations familières ou non familières, en rapport avec leur environnement, communiquer oralement ou par écrit dans un langage mathématique, utiliser les technologies de l'information et de la communication, collecter, organiser et exploiter l'information, apprécier la contribution des mathématiques au développement des autres disciplines, à la compréhension des phénomènes et à la prise de décision.

Dans ce manuel, chaque chapitre propose :

- Une photo qui, d'après les auteurs, établit le lien entre la nature, symbole du réél et les mathématiques.
- Pour commencer, où on trouve quelques affirmations ou/et quelques problèmes dont la justification ou/et les réponses seront dans la suite du chapitre.
- Découvrir, où on trouve :

- Des activités préparatoires, nécessaires à la remise en mémoire de notions antérieures et à la découverte des nouvelles. Il est préférable de les gérer en groupes.
- Des activités d'applications directes précédées de (à faire individuellement).
- Des activités où sont proposés des problèmes, issus, pour la plupart de situations du domaine professionnel qui permettent à l'élève de renforcer ses capacités d'analyse et de raisonnement.
- Des activités précédées de ou de à faire avec l'outil correspondant.

- L'essentiel, bilan des résultats dégagés dans le chapitre, véritable aide-mémoire pour l'élève qui pourra toujours s'y référer en cas de besoin.
- Applications, exercices et problèmes : où on trouve des applications et des exercices pour s'entraîner et des problèmes pour renforcer les capacités d'analyse et de raisonnement.

Les auteurs

Sommaire

Chapitre 1

Les pourcentages

La terre est couverte d'environ 71 % d'eau

Sommaire

« Dans nos sociétés industrielles, que l'électricité soit coupée et tout s'arrête. Et si l'on coupait les mathématiques ? L'arrêt serait moins brutal mais, soyons sûrs, tout aussi dévastateur »

Yves chevallard

Espérance de vie

L'espérance de vie en Tunisie est actuellement de 72,1 ans et on **estime** qu'elle sera à peu près à 75,5 ans en 2014 et à 77 ans vers 2029.

Autrement dit, elle augmentera de 4,7% en 2014 et de 6,8% en 2029.

Population chinoise

On dit que la chine compte **environ** un milliard et un quart d'habitants. En fait, le recensement de la population chinoise effectué en 2000 donne 1 259 000 000 habitants ce qui revient à négliger 9 000 000 (neuf millions habitants!). A titre de comparaison, la population tunisienne est de **l'ordre** de 9 600 000 habitants d'après le recensement de 2000 (d'après I.N.S).

Il serait tout à fait ridicule de négliger 9 millions pour obtenir **un ordre de grandeur** de la population tunisienne.

L'eau dans le corps humain et la terre

- **Environ** 65 % de notre corps est constitué d'eau.
- La terre est couverte d'**environ** 71% d'eau.

I. Valeur approchée - Arrondi

Activité 1

La distance moyenne Terre-Soleil est d'environ cent cinquante millions de kilomètres.
Ecrire ce nombre en notation scientifique.

Toute écriture de la forme $a \times 10^{n}$ avec $n \in \mathbb{Z}$ et a est un décimal ayant un seul chiffre non nul avant la virgule s'appelle notation scientifique.

Activité 2

Lorsqu'on tape $\sqrt{7}$ la calculatrice affiche : 2,645751311.

① a) Donner un encadrement de $\sqrt{7}$ d'amplitude 10^{-1}.

b) Donner un encadrement de d'amplitude 10^{-2}.

c) Quel est le nombre décimal à un chiffre après la virgule et le plus proche de $\sqrt{7}$?

② a) Donner un encadrement de $\sqrt{7}$ d'amplitude 10^{-3}.

b) Déterminer le nombre décimal, à deux chiffres après la virgule, le plus proche de $\sqrt{7}$.

③ Quel est le nombre décimal, à trois chiffres après la virgule, le plus proche de $\sqrt{7}$.

Un encadrement d'un nombre x est la donnée de deux réels a et b tel que $a \leq x \leq b$.
Le réel positif (b - a) s'appelle l'amplitude de l'encadrement.

2,6 est l'arrondi de $\sqrt{7}$ à 10^{-1} près.

Pour trouver l'arrondi d'un nombre à un rang donné : on conserve les chiffres de l'écriture décimale de ce nombre jusqu'au rang indiqué :
- Si le chiffre d'après est inférieur ou égal à 4 alors l'arrondi est le nombre obtenu.
- Si non, on ajoute 1 au dernier chiffre conservé.

Activité 3

① Donner l'arrondi à 10^{-2} près de chacun des nombres suivants : $\frac{2}{3}$, $\frac{2}{11}$, $\sqrt{2}$

② Déterminer :

a) Les arrondis de $\frac{23}{11}$ à 10^{-1}, à 10^{-2} et à 10^{-4} près.

b) L'arrondi de $(3,25)^{12}$ à 10^{3} près.

II. Pourcentage

Activité 1

Le premier jour de la rentrée scolaire 2003/2004, les médias ont publié l'information suivante : « 1 520 000 élèves et étudiants fréquentent aujourd'hui les établissements scolaires et universitaires. Ainsi, le taux de scolarisation en Tunisie est un peu plus que 15% ». Cela fait comprendre que 15 parmi 100 habitants tunisiens sont scolarisés.

Le tableau ci-contre résume la composition de la population tunisienne scolarisée en 1994/1995 et 2003/2004 :

① Calculer le taux de scolarisation, arrondi à l'unité, pour l'année scolaire 1994/1995.

② Déterminer pour chacune des années scolaires 1994/1995 et 2003/2004 le pourcentage, arrondi au dixième, des étudiants puis des élèves par rapport au nombre total de la population scolarisée. Mettre dans un même tableau les résultats trouvés .

Le taux de scolarisation est le pourcentage de la population scolarisée par rapport à la population totale.

Année scolaire	1994/1995	2003/2004
Nombre d'élèves	1 481 759	1 228 347
Nombre d'étudiants	102 682	291 842
Population tunisienne	8 815 000	9 910 872

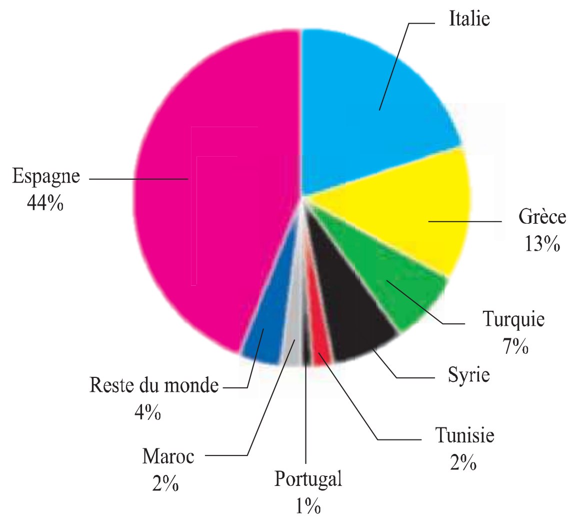
Source : INS (Institut national de la statistique)

Activité 2

La production d'huile d'olive a toujours été concentrée dans les pays du pourtour méditerranéen : Espagne, Portugal, Italie, Grèce, Turquie, Tunisie, Maroc et Syrie.

La production mondiale d'huile d'olive en 2002/2003, qui est une année climatiquement difficile en Tunisie, est de l'ordre de 3600 milles tonnes.

La représentation ci-contre indique la production en 2002/2003 des principaux pays producteurs.



Source : secrétariat de la CNUCED, d'après des données de la FAO

① Déterminer (en milliers de tonnes) la production de la Tunisie en 2002/2003.

② La production (en milliers de tonnes) de l'Italie est de 720. Quel est son pourcentage par rapport à la production mondiale ?

③ Déterminer alors le pourcentage de la production de la Syrie par rapport à la production mondiale.

④ La production tunisienne d'huile d'olive en 2003/2004, qui est une année climatiquement normale, est passée à 272 mille tonnes. Quel est le pourcentage, arrondi à l'unité, de la production de l'année 2002/2003 par rapport à celle de l'année 2003/2004 ?

> Si une grandeur x vaut t % d'une grandeur y alors $x = \frac{t}{100} \times y$.

Activité 3

A. La population tunisienne en 2004 est 9931,2 mille. La population du grand Tunis (Tunis, Ariana, Ben arous et Mannouba) représente environ 22,7% de la population tunisienne.
Déterminer la population (en milliers), arrondie au dixième, du grand Tunis en 2004. (Source INS)

B. Sur la vitrine d'une boutique, on lit l'affiche suivante : « Solde jusqu'à 50% ».
Le prix de l'un des articles est 42,500 DT, il a baissé de 6,800 DT.
Quel est le pourcentage du solde correspondant ?

III. Pourcentages d'évolution et coefficient multiplicateur

Pourcentage de diminution

Activité 1

Dans un super marché on lit l'affiche suivante : « Remise à la caisse de 12% pour tout achat d'articles non alimentaires et totalisant une somme supérieure ou égale à 50 DT ».

① Le client 1 choisit un pantalon à 50 DT.
a) Calculer en DT la valeur de la remise accordée ?
b) Quelle somme payera-t-il ?

② Le client 2 choisit un pantalon à 50 DT et une chemise à 24 DT.
Quelle somme payera-t-il ?

③ Les clients 3 et 4 choisissent chacun une chemise et décident de payer ensemble. La chemise du client 3 coûte 33 DT, celle du client 4 coûte 24 DT.
a) Quelle somme payeront-ils ensemble?
b) Quelle somme payera chacun d'entre eux ?

④ Une interruption subite du courant oblige la caissière à travailler manuellement. Elle effectue une seule opération pour avoir la somme S' à payer, qui est la suivante :
$S' = S \times 0,88$ (S : désigne le prix avant la remise). Est- ce correct ?

Plus généralement :

Si on diminue une grandeur x de t % on obtient la grandeur :

$$x - \frac{x \times t}{100} = x\left(1 - \frac{t}{100}\right).$$

- Diminuer une grandeur de t % c'est la multiplier par $\left(1 - \frac{t}{100}\right)$.
- Le nombre $\left(1 - \frac{t}{100}\right)$ est appelé coefficient multiplicateur associé à la diminution de t %.

Activité 2

A. Le prix d'un produit est 165 DT. Quel est son prix après une remise de 15 % ?

B. Le bénéfice réalisé par une société en 2003 est de 13 000 DT.
En 2004, ce bénéfice a diminué de 6 %. Quel est le bénéfice réalisé en 2004 ?

C. Après une réduction de 30 %, le prix d'un billet de train est 10,080 DT. Quel était son prix avant la réduction ?

Pourcentage d'augmentation

Activité 3

① En 2001, la production tunisienne de tomates était de 750 mille tonnes, et elle a augmenté de 8 % en 2002. Déterminer la production en 2002.
② Déterminer la production en 2003 sachant qu'elle a augmenté de 11 % par rapport à 2002 (Source INS).

- Augmenter une grandeur de t % c'est la multiplier par $(1 + \frac{t}{100})$.
- Le nombre $(1 + \frac{t}{100})$ est appelé coefficient multiplicateur associé à l'augmentation de t %.

Activité 4

A. Le salaire d'un ouvrier est 240 DT. Déterminer son nouveau salaire après une augmentation de 4 %.

B. Le nombre de touristes entrés en Tunisie en 2002 est 5 063 500. Déterminer le nombre de touristes entrés en 2003 sachant qu'il a augmenté de 1 %. (Source INS)

C. Le compteur de vitesse de ma voiture exagère de 10 %. Quand il indique 100 km par heure, à quelle vitesse, arrondie à l'unité, je roule réellement ?

Pourcentage de variation

Activité 5

① Le prix d'un chauffage électrique est 200 DT. En décembre, il a augmenté de 12%. En Mars il a diminué de 12 %. A-t-il retrouvé sa valeur initiale ?

② Si le prix de ce chauffage a diminué de 7 % en Mars, au lieu de 12%, alors a-t-il augmenté tout simplement de 5 % à partir de son prix initial ?

Activité 6

Pour les articles en question la TVA (Taxe sur la valeur ajoutée) est de 18%.

① Le prix hors taxe (HT) d'un article A est 632 DT. Quel sera son prix toutes taxes comprises (TTC) ?

② Le prix (TTC) d'un article est 424,8 DT. Quel était son prix (HT) ?

③ Un client trouve deux propositions de prix d'achat :

P_1 : Avec une remise de 30 % sur le prix (TTC).

P_2 : Avec une remise de 15 % sur le prix (HT). (Sans payer la TVA)

Il estime que la deuxième proposition est la meilleure. Etes-vous d'accord ? Justifier.

Activité 7

Le prix d'un produit subit successivement : une hausse de 15%, une baisse de 3% et une baisse de 10%.

① Quel est le coefficient multiplicateur permettant d'obtenir directement le prix de ce produit à partir de son prix initial après cette variation ?

② Quel est le pourcentage de la variation finale ?

- Pour déterminer la valeur finale d'une grandeur qui a subi des variations (augmentations et/ou des diminutions), il suffit de multiplier sa valeur initiale par le produit des coefficients multiplicateurs associés à ces variations.
- Ce produit est appelé le coefficient multiplicateur de variation.

Activité 8

A. En 2000, la production tunisienne de pommes de terre est 290 mille tonnes.
En 2001, elle a augmenté de 13,7 %. En 2002, elle a diminué de 6% par rapport à 2001. En 2003, elle a diminué de 6,5 % par rapport à 2002.
Déterminer, la production tunisienne de pommes de terre en 2003 (en mille tonnes, arrondie à l'unité).

B. Après deux augmentations successives, la première de 10%, la seconde de 20 %, un objet coûte 79,2 DT. Quel était son prix avant les deux augmentations ?

Activité 9

Le graphique ci-contre représente les cours moyens des prix en Dollars d'un baril du pétrole de 1973 à 2003.

① Déterminer, graphiquement, une valeur approchée du prix du baril du mois de janvier pour les années 2000, 2001, 2002 et 2003.

② Déterminer le pourcentage de baisse ou de hausse du prix du baril d'une année à la suivante à partir de janvier 2000, jusqu'a 2003.

③ Calculer le coefficient multiplicateur de la variation entre 2000 et 2003.

Activité 10

Après deux augmentations de même taux, le prix d'un article augmente de 21%.
On désigne par x le taux de la première augmentation.

① Vérifier que $(1+\frac{x}{100})^2 = 1,21$.

② Déterminer le taux commun de ces deux augmentations.

Soit a un réel strictement positif.
Les solutions de l'équation $x^2 = a$ sont $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$.

IV. Séries chronologiques

Activité 1

Le tableau ci-contre indique la valeur des produits exportés par la Tunisie en millions de DT.

Année	Valeur
1999	6966.9
2000	8004.8
2001	9503.7
2002	9748.6
2003	10342.6

① Déterminer les coefficients multiplicateurs p_1, p_2, p_3 et p_4, arrondis au centième, qui permettent de passer de l'année 1999 à chacune des années 2000, 2001, 2002 et 2003.

② Placer dans un repère orthogonal les points A (1999 , 1), B (2000 , p_1), C (2001 , p_2), D (2002 , p_3) et E (2003 , p_4) puis tracer les segments [AB], [BC], [CD] et [DE].

Le graphique obtenu donne l'évolution de la valeur des produits exportés par la Tunisie par rapport à l'année 1999.

③ Le tableau ci-contre indique la valeur des produits importés par la Tunisie en millions de DT.

Année	Valeur
1999	10070.5
2000	11738.0
2001	13697.3
2002	13510.9
2003	14038.9

a) Déterminer les coefficients multiplicateurs, arrondis au centième, qui permettent de passer de l'année 1999 à chacune des années 2000 , 2001 , 2002 et 2003.

b) Représenter sur le même graphique l'évolution de la valeur des produits importés par rapport à l'année 1999.

c) Relever les propositions correctes :

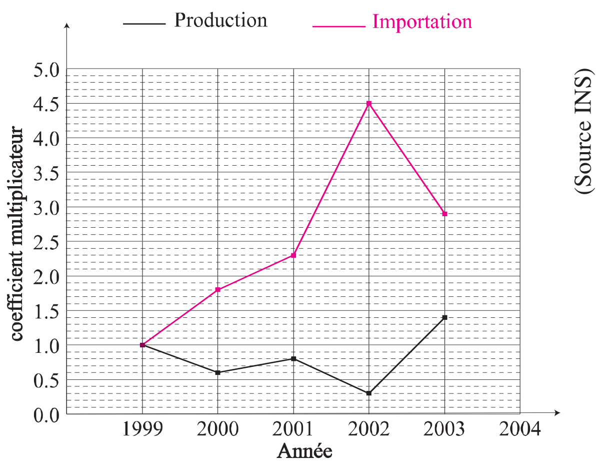
P_1 : La valeur des produits importés a baissé durant l'année 2001.

P_2 : La valeur des produits exportés et celle des produits importés est la même en 2001.

P_3 : L'augmentation de la valeur des produits exportés en 2003 est plus forte que celle de la valeur des produits importés.

Activité 2

Le graphique ci-contre représente l'évolution de la production du blé dur en Tunisie et l'évolution de la valeur du blé dur importé par la Tunisie par rapport à l'année 1999.



① a) Quel est le coefficient multiplicateur qui permet de passer de la production du blé dur de l'année 1999 à celle de 2002 ?

b) Quel est le coefficient multiplicateur qui permet de passer de la production du blé dur de l'année 1999 à celle de 2003 ?

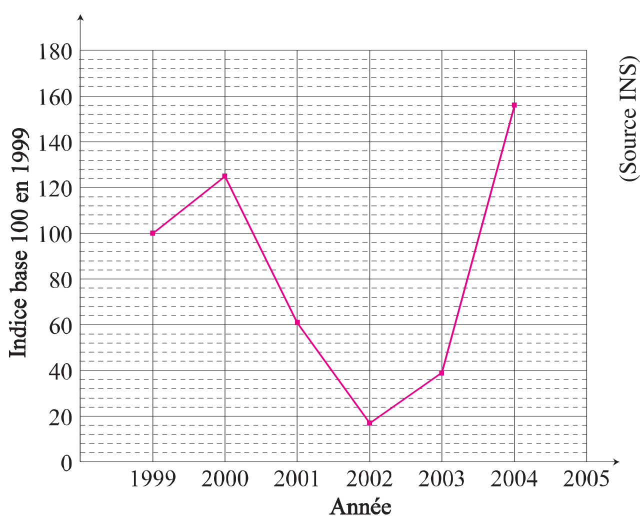
c) La production du blé dur en 1999 était de 1144 mille tonnes. Déterminer celle de 2002 et celle de 2003.

② La valeur du blé dur importé en millions de DT en 1999 est 43,4. Quelle est sa valeur, arrondie au dixième, en 2003 ?

③ La quantité de pluie enregistrée pendant la saison agricole 2001/2002 est très inférieure à la moyenne.
Le graphique reflète-t-il ce manque de pluie? Expliquer.

Activité 3

Le graphique ci-contre indique l'évolution d'indice base100 en 1999 de la production des olives à l'huile entre 1999 et 2004.



① Quel est le pourcentage d'augmentation de la production entre 1999 et 2000 ?

② Quel est le pourcentage de diminution de la production entre 1999 et 2001 ?

③ En 2003 la production a-t-elle augmenté ou diminué par rapport à 1999 puis par rapport à 2002 ?

> Si C est le coefficient multiplicateur qui permet de passer de l'année de base b à l'année n alors I = C × 100 est l'indice de l'année n, base 100 en l'année b.

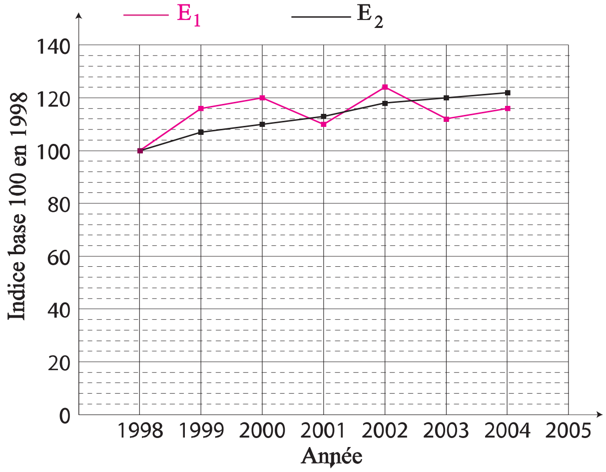
Activité 4

Le graphique ci-contre indique l'évolution des chiffres d'affaires de deux entreprises E_1 et E_2 base, 100 en 1998.

① Comment évolue le chiffre d'affaires de chaque entreprise par rapport à l'année 1998 ?

② Comparer le chiffre d'affaires de l'entreprise E_1 en 2003 par rapport à 2002 et à 1998.

③ Quelles prédictions pouvez-vous faire sur l'avenir des chiffres d'affaires de ces deux entreprises ?



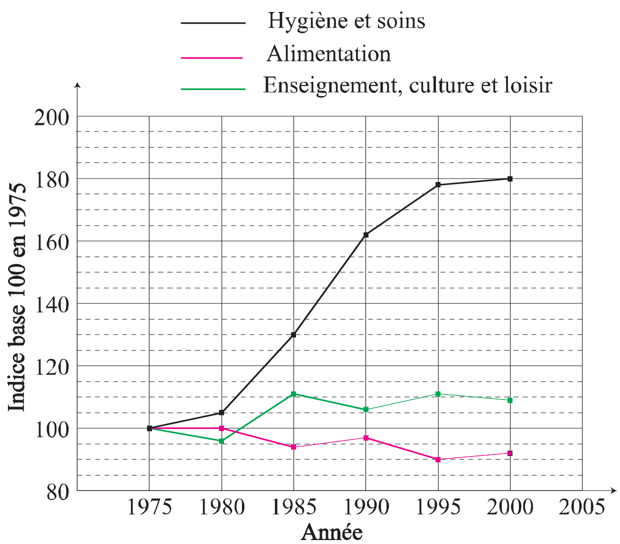
(Source INS)

Activité 5

Le graphique ci-contre décrit l'évolution des parts (en %) des dépenses que consacrent les ménages à l'alimentation, à l'hygiène et soins, et à l'enseignement-culture-loisir.

Les recensements ont été faits tous les cinq ans de 1975 à 2000.

① Donner pour chacune des courbes, une valeur approchée du coefficient multiplicateur qui permet de passer de 1975 à 1980.



(Source INS)

② Donner pour chacune des courbes, une valeur approchée des pourcentages d'augmentation ou de diminution en 2000 par rapport à 1975.

③ On sait qu'en 1975, les ménages ont consacré 5,4% de leurs dépenses à l'hygiène et aux soins, quel est le pourcentage qu'ils ont consacré en 2000 à l'hygiène et aux soins ?

Activité 6

Le tableur Excel est un logiciel qui permet de construire et de visualiser des tableaux contenant des données et surtout des formules de calcul.
Le tableau ci-contre donne le nombre de médecins et de pharmaciens en Tunisie.

Année	Médecins	Pharmaciens
1990	4424	1240
1991	4500	1304
1992	5099	1330
1993	5257	1323
1994	5344	1417
1995	5965	1499
1996	6177	1531
1997	6464	1567
1998	6819	1623
1999	7149	1690
2000	7444	1951
2001	7767	1998
2002	7964	2050

(Source INS)

① Entrer ce tableau dans un classeur de tableur Excel en écrivant les années dans la colonne A, les médecins dans la colonne B et les pharmaciens dans la colonne C.

② Pour calculer les indices du nombre de médecins, base 100 en 1990, on doit diviser chaque valeur de la colonne B par le contenu de la cellule B2. La cellule B2 contient la valeur de l'année de base c'est donc une référence absolue que l'on note $B$2 pour bloquer sa valeur.

a) Pour mettre les résultats dans la colonne D, on écrit dans la cellule D2 la formule =B2/$B$2*100 et en appuyant sur «Enter» on obtient le tableau ci-contre.

D2 =B2/$B$2*100

	A	B	C	D
1	Année	Médecins	Pharmaciens	
2	1990	4424	1240	100
3	1991	4500	1304	
4	1992	5099	1330	

b) Sélectionner la cellule D2 et faire apparaître la croix noire en bas à droite de la cellule, puis tirer le calcul jusqu'au D14.
Vérifier que l'on obtient le tableau ci-contre.

D14 =B14/$B$2*100

	A	B	C	D
1	Année	Médecins	Pharmaciens	
2	1990	4424	1240	100
3	1991	4500	1304	101.717902
4	1992	5099	1330	115.257685
5	1993	5257	1323	118.829114
6	1994	5344	1417	120.79566
7	1995	5965	1499	134.832731
8	1996	6177	1531	139.624774
9	1997	6464	1567	146.112116
10	1998	6819	1623	154.136528
11	1999	7149	1690	161.595841
12	2000	7444	1951	168.264014
13	2001	7767	1998	175.565099
14	2002	7964	1050	180.018083
15				

c) Calculer de même les indices du nombre de pharmaciens, base 100 en 1990.

③ a) Quel est le pourcentage d'évolution du nombre de médecins de 1990 à 2000 et de 1990 à 2002 ?
b) Quel est le pourcentage d'évolution du nombre de pharmaciens de 1990 à 2000 ?

Activité 7

Le tableau ci-dessous est publié par l'institut national de la statistique (INS) sur son site web www.ins.nat.tn, il indique le nombre des entrées à la Tunisie des non résidents classées par nationalité.

Unité : Le millie

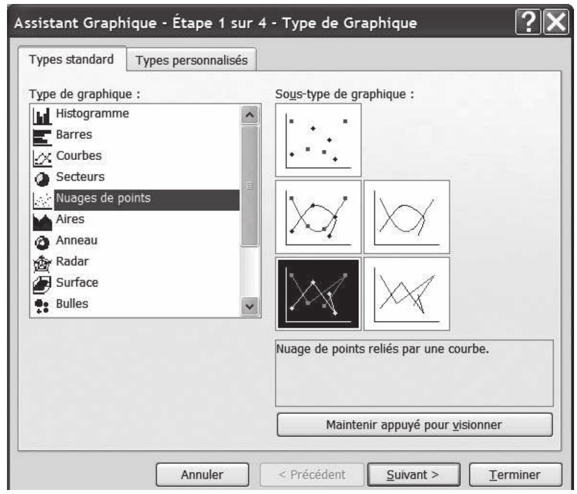
	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003
Algériens	435.2	744.3	807.2	676.9	672.4	988.6	669.9	605.4	684.2	616.4	611.6	623.1	728.3	811.5
Allemands	479.4	393.4	649.4	711.9	852.6	837.1	808.5	858.3	883.9	1036.3	1011.3	934.7	613.7	488.5
Autrichiens	38.6	27.8	44.7	54.8	71.6	65.0	90.3	114.4	106.2	138.3	110.2	114.8	77.2	70.0
Belges	74.4	39.1	64.1	73.7	78.1	74.2	87.4	102.7	114.9	132.4	139.8	150.7	122.1	132.6
Britanniques	191.4	120.3	202.8	245.8	267.2	239.6	206.1	248.0	263.8	261.9	299.4	314.7	257.8	223.2
Danois	27.1	7.3	24.6	27.0	30.6	26.0	33.9	32.0	23.3	20.6	19.6	16.5	9.5	10.5
Français	458.1	210.9	357.2	447.8	484.8	465.1	541.9	619.9	709.0	893.7	997.9	1047.4	885.2	834.0
Hollandais	96.7	46.9	66.1	67.0	80.4	70.5	71.8	67.3	68.1	69.1	67.6	62.4	48.9	44.5
Italiens	189.5	152.5	224.1	241.8	229.8	245.9	270.1	314.0	328.3	354.6	393.9	398.3	375.2	379.8
Libyens	795.8	1154.4	635.7	538.5	544.0	618.7	526.1	626.4	834.5	603.1	685.2	1016.6	1280.7	1325.7
Marocains	143.9	157.4	149.5	151.1	100.0	26.7	30.9	42.8	45.1	37.8	37.7	35.5	38.9	35.0
Moyen - orientaux	45.7	25.0	39.1	44.0	37.1	33.1	44.9	48.9	45.5	32.3	27.7	30.0	30.5	30.9
Suédois	32.7	5.7	19.6	17.4	13.6	15.5	25.0	22.8	13.1	16.2	24.5	28.4	20.7	23.3
Suisses	48.2	27.5	45.4	64.2	76.4	74.5	75.5	86.6	84.2	110.2	118.4	114.2	93.9	85.8
U. S. A.	8.9	5.6	8.7	10.9	11.7	11.5	12.8	12.7	12.5	13.6	16.4	14.1	11.6	10.3
Autres nationalités	138.2	105.9	201.7	282.9	305.3	327.8	389.5	460.9	500.9	495.2	540.1	485.9	469.3	
Total	3203.8	3224.0	3539.9	3655.7	3855.6	4119.8	3884.6	4263.1	4717.5	4831.7	5057.2	5387.3	5063.5	5114.3

① Entrer dans un classeur du tableur Excel les données suivantes :
- Dans la colonne A : Les années.
- Dans la colonne B : Français.
- Dans la colonne C : Libyens.

② En utilisant le procédé de l'activité 6, calculer :
a) Les indices des entrées des Français base 100 en 1990 dans la colonne D.
b) Les indices des entrées des Libyens base 100 en 1990 dans la colonne E.

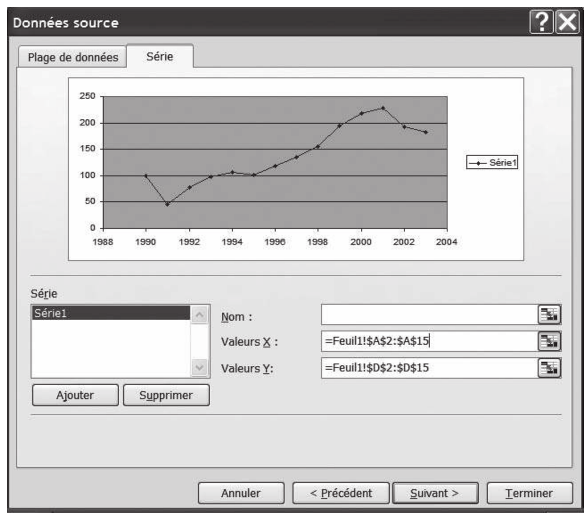
③ a) Pour construire le graphique des indices des entrées des Français base 100 en 1990 :

- Sélectionner les cellules en colonnes D2 à D15, et cliquer sur le bouton de la barre d'outils.
- Sélectionner « type de graphique » / « Nuages de points » et choisir l'icône représentée dans la figure ci-contre.
- Cliquer « suivant ».



- Cliquer sur l'onglet « série »

Pour choisir la valeur de x, cliquer à droite de la fenêtre, sélectionner les cellules en colonne A2 à A15 puis cliquer à droite de la fenêtre où l'adresse est écrite en haut. Vérifier que l'on obtient l'affiche ci-contre.
Vous pouvez choisir un nom pour la première série.



b) Pour construire sur le même repère les indices des Libyens :
- Cliquer sur « Ajouter ».
- Ecrire un nom pour votre deuxième série devant la fenêtre « Nom ».
- Sélectionner les valeurs de x et de y en utilisant le même procédé puis cliquer sur « suivant ».
- Vous pouvez choisir les options de graphique désirées, puis cliquer sur « suivant ».
- Cliquer sur « Terminer ». On obtient le graphique qu'on peut transporter à un fichier Word et l'améliorer suivant votre besoin.

④ En utilisant les mêmes procédés, représenter l'évolution des indices des entrées des Algériens, des Allemands et des Marocains base 100 en 1990.

- Si une grandeur x vaut t% d'une grandeur y alors $x = \frac{t}{100} \times y$.
- Diminuer une grandeur de t % c'est la multiplier par $(1 - \frac{t}{100})$.
- Augmenter une grandeur de t% c'est la multiplier par $(1 + \frac{t}{100})$.
- Pour déterminer la valeur finale d'une grandeur qui a subi des variations (augmentations et/ou des diminutions), il suffit de multiplier sa valeur initiale par le produit des coefficients multiplicateurs associés à ces variations.

1. Calculer le pourcentage, arrondi au dixième, de 150 par rapport à 261.

2. Calculer 18% de 350 ; 35% de 500 ; (30,6) % de 1200.

3. Relever et justifier les propositions correctes :

- 75% de la classe sont des filles c'est-à-dire les $\frac{3}{4}$ des élèves de cette classe sont des filles.
- Le coefficient multiplicateur associé à une augmentation est supérieur à 1.
- Diminuer une grandeur de 100 % revient à la diviser par 2.
- Augmenter une grandeur de 100 % revient à la doubler.
- Doubler le prix d'un produit revient à l'augmenter de 200 %.
- Le coefficient multiplicateur associé à une diminution est inférieur à 1.
- Une hausse de 15 % suivie d'une baisse de 5 % est tout simplement une hausse de 10%.

4. ① Donner les coefficients multiplicateurs associés à des diminutions de : 22% ; (0,8) % ; 100% ; (0,058) %.

② Donner les coefficients multiplicateurs associés à des augmentations de : (0,95) % ; 23 % ; 100%.

5. Le prix d'un costume après une réduction de 20% est de 90 DT.
Quel était son prix avant la réduction ?

6. ① La surface de l'Afrique est d'environ 30×10^6 Km^2. Quel est le pourcentage, arrondi à l'unité, de cette surface par rapport à la surface totale de la terre qui est de 510×10^6 Km^2.

② La surface de la Tunisie est de 164 150 Km^2. Quel est le pourcentage, arrondi au millième, de cette surface par rapport à la surface de l'Afrique, puis à celle de la surface totale de la terre.

7. Au cours d'un match de football entre la Tunisie et une équipe étrangère, on dénombre 52 000 spectateurs. 80 % d'entre eux sont des supporters de l'équipe tunisienne, 8 % de ces supporters sont féminins.
Quel est le nombre de supporters féminins de l'équipe tunisienne ?

8. En 1993 le prix du m^2 d'un terrain est évalué à 80 DT. Ce terrain est vendu en 2004 au prix de 112 DT le m^2. Quel est le pourcentage d'augmentation de son prix.

9. Un client veut acheter un ordinateur en juin 2004. Le modèle coûtait 1600 DT en mai 2004 mais il a augmenté de 4% la fin de ce mois.
Le vendeur lui propose une remise de 3,85%. Combien va-t-il payer ?

10. 27172 votants parmi les 52163 inscrits dans une association ont participé à l'élection des membres du bureau de cette association.
① Déterminer le pourcentage (arrondi à l'unité) de participation.
② Un candidat a obtenu 14970 voix, quel est le pourcentage des voix obtenues pour ce candidat (arrondi à 10^{-2} près) ?

11. Compléter le tableau suivant donnant le capital obtenu au bout d'un an en fonction du capital placé et du taux annuel de placement.

Capital placé en DT / Taux en %	100	1000	10500	
4				
6,5				
		1100		
14				57000

12. Pour recruter des stagiaires, une entreprise organise un test de sélection. 60 % des candidats sont masculins. 80 % des candidats masculins sont admis. 60 % des candidats féminins sont admis.
① Quel est le pourcentage des garçons retenus parmi tous les candidats ?
② Quel est le pourcentage des recrutés parmi les candidats ?

13. Un commerçant accorde une remise de 5 % sur le prix de vente d'un article de 1650 DT. Une deuxième remise de 7 % est accordée à tout achat payé au comptant.
① Quelle est la somme en DT (arrondi à l'unité) payée au comptant par un client ?
② Ce client affirme : « Ainsi, j'ai eu le droit à une remise de 12 % sur le prix de vente ». A-t-il raison ?

14. Mohamed a réduit la grandeur d'une image de 20% et il a détruit l'original. Il s'est aperçu que la photo obtenue est petite.
De quel pourcentage doit il agrandir la photocopie pour que l'image retrouve ses dimensions initiales ?

15. Une bonne balle de ping-pong rebondit entre 65% et 75% de la hauteur de la quelle elle tombe.
On lâche une balle à 1mètre au dessus d'une table, la hauteur du troisième rebond est 32 cm. S'agit-il d'une bonne balle ?

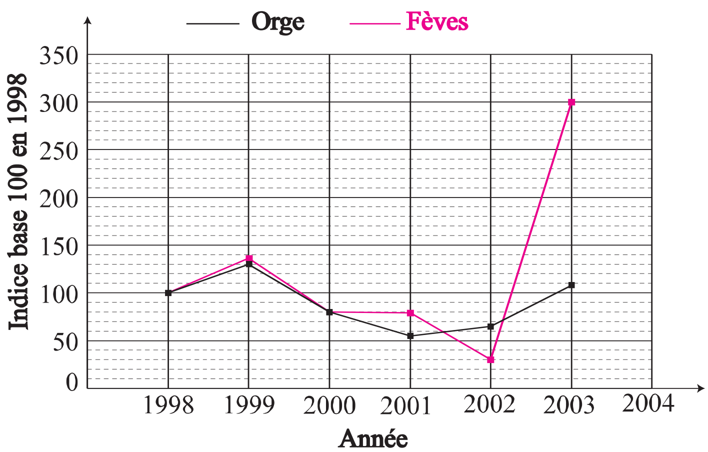
16. Après une baisse de 15 % puis une nouvelle baisse de t %, on obtient une baisse finale de 30 %. Calculez t%.

17. Le tableau ci-contre indique la production du blé tendre en milles tonnes et la surface cultivée, en milles hectares, correspondante.

Année	1999	2000	2001	2002	2003
Production	253	136	183	52	133
Surface	148	133	119	117	133

① Représenter sur le même graphique ces deux séries chronologiques.
② Commenter et interpréter.

18. ① Le graphique ci-contre indique l'évolution de la production des fèves et de l'orge base 100 en 1998.
La production des fèves a-t-elle été influencée par le manque de pluie pendant la saison agricole 2001-2002 ?
② La production en 1998 des fèves est 23,4 mille tonnes et celle de l'orge est 477 mille tonnes.
Déterminer la production de chacun d'eux en 2003.

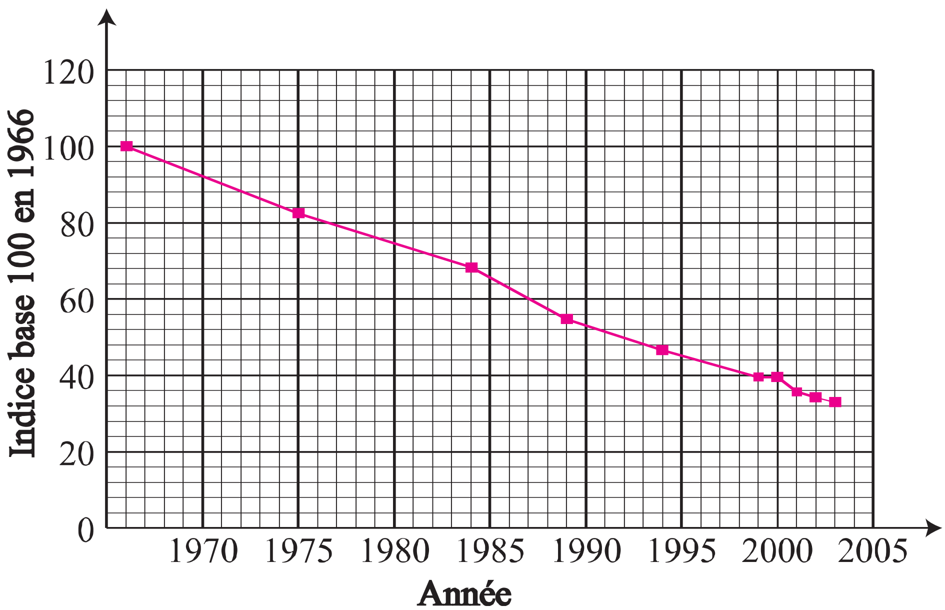


19. Le graphique ci-dessous représente l'évolution du pourcentage des personnes sans instruction, en Tunisie, base 100 en 1966.

① Que peut-on dire du niveau d'instruction de la population tunisienne ?

② Le pourcentage des tunisiens sans instruction en 1966 est 68 %.
Quel est celui de 2003 ?

③ Quel est ,en 2003, le nombre des personnes tunisiens sans instructions ?
(La population tunisienne en 2003 est 9888 mille habitants).



Chapitre
2

Proportion

Est-ce que les rythmes et les proportions ont un lien avec le sens du beau?

Sommaire

"Les schémas du mathématicien, comme ceux du peintre ou du poète, doivent être beaux ; les idées, comme les couleurs ou les mots, doivent s'assembler de façon harmonieuse. La beauté est le premier test : il n'y a pas de place durable dans le monde pour les mathématiques laides".

G.H Hardi (1877-1947, Angleterre)

Dans la nature, à cause de l'immense variété des formes on peut avoir l'impression d'une totale anarchie. Cependant un examen plus détaillé nous fait découvrir que la nature a fait preuve d'une très grande économie de moyens. Elle dépend de rythmes et de proportions. Le rythme n'est qu'une application dynamique des proportions, c'est parce que ces rythmes et proportions existent que nous avons le sens du beau.

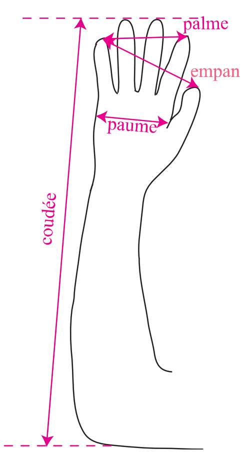
Proportion divine

Chez l'homme :

- Le rapport de la longueur totale du corps par rapport à la longueur de la partie pied-nombril est **de l'ordre** de 1,618.

- Le rapport de la longueur de la deuxième phalange à la première et de la troisième à la deuxième est **de l'ordre** de 1,618.

- 1,618 est aussi une valeur approchée de :
  - Rapport coudée sur pied.
  - Rapport pied sur empan.
  - Rapport empan sur palme.
  - Rapport palme sur paume.



I- Proportion

Activité 1

Les prix de quelques articles, avant et pendant la période des soldes, sont présentés dans le tableau suivant :

Articles	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7
Prix avant la remise en DT	127	220	57	28	130	15	61
Prix après la remise en DT	88,900	154	48,450	23,800	91	12,750	51,850

① Déterminer pour chaque article le coefficient multiplicateur qui permet de passer du prix avant la remise au prix après la remise.
② Former à partir des données de ce tableau un ou plusieurs tableaux de proportionnalité.

Un tableau de deux lignes est un tableau de proportionnalité, si les quotients des nombres d'une même colonne sont égaux.

Commentaire :

$\frac{88,9}{127} = \frac{154}{220} = \frac{91}{130}$, on dit que 88,9 ; 154 et 91 sont respectivement proportionnels à 127 ; 220 et 130.

Soit a, b, c et d des réels tel que $b \neq 0$ et $d \neq 0$
a et c sont respectivement proportionnels à b et d si et seulement si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

L'égalité $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ s'appelle une proportion.

Définition | Une proportion est une égalité de deux rapports.

Vocabulaire

Dans la proportion $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, a et d sont les termes extrêmes, b et c sont les termes moyens.

Activité 2

Soit a, b, c et d quatre réels, tel que $b \neq 0$ et $d \neq 0$.

① Montrer que si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ alors $ad = bc$.

② Montrer que si $ad = bc$ alors $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

> Soit a, b, c et d quatre réels tels que $b \neq 0$ et $d \neq 0$.
>
> Les écritures $ad = bc$ et $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ sont équivalentes.

Activité 3

Pour faire un gâteau pour 6 personnes il faut 240 grammes de farine et 3 œufs. Quelle est la quantité de farine nécessaire et combien d'œufs faut-il avoir pour faire un gâteau, de même type, mais pour 8 personnes ?

Commentaire :

• Si on désigne par x la quantité de farine et par y le nombre d'œufs pour un gâteau de 8 personnes alors «Faire un même gâteau de même type» se traduit par déterminer x et y tels que 6, 240 et 3 sont proportionnels à 8, x et y. On obtient donc le tableau de proportionnalité suivant :

6	240	3
8	x	y

• $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ équivaut à $x = \frac{240 \times 8}{6}$.

On peut traduire ces données de la manière suivante :

$$\begin{array}{l} 6 \longrightarrow 240 \\ 8 \longrightarrow x \end{array}$$ et écrire directement $x = \frac{240 \times 8}{6}$.

Règle de trois : Soit a, b et c trois réels non nuls.
Pour déterminer un réel x tel que a et b sont proportionnel à c et x,

on peut écrire : $\begin{array}{l} a \longrightarrow c \\ b \longrightarrow x \end{array}$ et on aura $x = \dfrac{bc}{a}$.

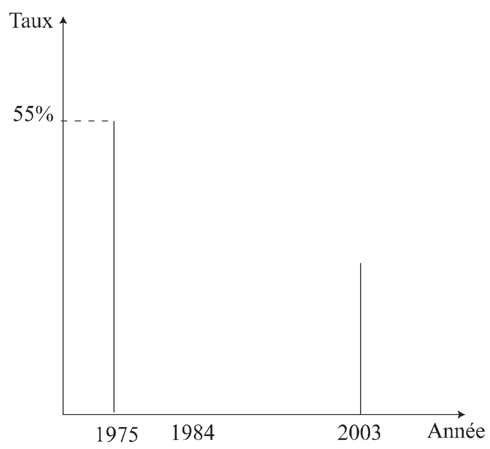
Activité 4 (Evolution du taux d'analphabétisme en %)

Le tableau ci-contre indique le taux, arrondi à l'unité, d'analphabétisme (en %) parmi la population âgée de 10 ans et plus.

Année	1975	1984
Taux	55%	46%

(Source INS)

① Représenter le taux d'analphabétisme en 1984 :



② Déterminer le taux d'analphabétisme, arrondi à l'unité, en 2003.

Activité 5

Un bateau se déplace à la vitesse de 25 kilomètres par heure.
① Quelle distance parcourt-il en 4 heures ? en 9 heures ?
② Soit t le temps, en heures, mis pour parcourir une distance d en kilomètres. Exprimer d en fonction de t.

Lorsque x et y sont deux grandeurs variables de sorte que le rapport $\dfrac{y}{x}$ reste constant, on dit que y varie proportionnellement à x.

Activité 6

Relever et justifier les propositions correctes :

- Le périmètre d'un carré est proportionnel à la mesure d'un côté.
- Plus le rayon d'un disque est grand, plus son aire est grande.
- L'aire d'un disque est proportionnelle à son rayon.
- L'aire d'un disque est proportionnelle au carré de son rayon.

Activité 7

Par quelle longueur devrait être représentée une distance réelle de 100 kilomètres sur une carte à l'échelle de $\frac{1}{800\,000}$?

Expliquer Pourquoi des autoroutes de 25 mètres de largeur ne sont pas représentées à l'échelle.

Activité 8

La consommation théorique d'une voiture est de 7 litres de super (sans plomb) pour 100 km.

① Compléter le tableau suivant qui donne la consommation théorique en fonction de la distance parcourue.

Distance (en Km)	100	150	250	320
Consommation (en litre)				

② On désigne par x la distance, en kilomètres, parcourue par cette voiture et C (x) sa consommation en litre.

a) Exprimer C (x) en fonction de x.

b) Représenter graphiquement la fonction $C : x \longmapsto C(x)$ dans un repère orthogonal.

c) Utiliser ce graphique pour estimer la consommation théorique pour un trajet de 270 km.

③ En pratique, la consommation se situe entre 15 % et 20 % au-dessus de la valeur théorique.

À quelle consommation réelle peut-on s'attendre, pour un parcours de 270 km ?

Toute situation de proportionnalité peut se traduire mathématiquement par une application linéaire.

II Partages proportionnels

Activité 1

① On considère la proportion suivante $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ où a, b, c et d des réels vérifiants $b \neq 0$, $d \neq 0$ et $b + d \neq 0$.
Montrer que a, c et $a + c$ sont respectivement proportionnels à b, d et $b + d$.
② On donne $b = 7$ et $d = 21$. Calculer a et c sachant que $a + c = 12$.

si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ alors $\frac{a+c}{b+d} = \frac{c}{d}$

Activité 2

Deux associés ont fondé une société de capital 100 mille DT. 70 % de ce capital est fourni par l'associé A et le reste par l'associé B.
Le bénéfice réalisé à la fin de la première année est de 18 mille DT. Quel est le bénéfice de chaque associé, sachant qu'il est partagé proportionnellement aux apports initiaux ?

Activité 3

Le propriétaire d'un immeuble composé de trois appartements doit répartir les charges entre les trois locataires proportionnellement à la superficie de chaque appartement.
Déterminer les charges à payer par chaque locataire sachant que Les appartements ont pour aires respectives 80 m^2, 90 m^2, 120 m^2 et que le montant total des charges à répartir est 435 DT.

Soit a, b, c et d des réels tel que $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$ et $a + b + c \neq 0$.
Partager un nombre S en parties proportionnelles à des nombres donnés a, b et c, c'est détérminer trois nombres x, y et z de somme S proportionnellement aux nombres a, b et c.
On a donc : $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} = \frac{S}{a+b+c}$.

Activité 4

Partager 147 DT entre trois personnes proportionnellement au nombres 5, 7 et 9.

Activité 5

Quatre ouvriers peintres ont repeint un appartement à la tâche. Le premier a travaillé 200 heures, le second a travaillé 150 heures, le troisième a travaillé 130 heures et le quatrième a travaillé 120 heures. Ils reçoivent 1320 DT qu'ils répartissent entre eux proportionnellement à la durée du travail.
Calculer la part de chacun.

Exercice résolu

Un individu a placé un capital de 12300 DT en trois parts : La première au taux de 5%, la deuxième au taux de 8%, et la troisième au taux de 10%.
Déterminer les trois parts ainsi que leurs valeurs acquises après la première année de placement, sachant que les revenus annuels des trois placements sont proportionnels aux nombres 1, 2 et 3.

Solution :

Désignons par x, y, z les trois parts.
On a $x + y + z = 12300$ DT et les revenus annuels de chaque part sont :
$\frac{x \times 5}{100}, \frac{y \times 8}{100}, \frac{z \times 10}{100}$.

Comme les revenus annuels des trois placements sont proportionnels à 1, 2 et 3 on a alors $\frac{\frac{x \times 5}{100}}{1} = \frac{\frac{y \times 8}{100}}{2} = \frac{\frac{z \times 10}{100}}{3}$

on obtient donc

$$\frac{x}{20} = \frac{y}{25} = \frac{z}{30} = \frac{x + y + z}{20 + 25 + 30} = \frac{12300}{75} = 164$$

d'où $\frac{x}{20} = 164$, $\frac{y}{25} = 164$, $\frac{z}{30} = 164$

Par la suite $x = 3280$ DT, $y = 4100$ DT, $z = 4920$ DT.
Les valeurs acquises après le premier emplacement sont :
$x \times (1{,}05) = 3280 \times (1{,}05) = 3444$ DT.
$y \times (1{,}08) = 4100 \times (1{,}08) = 4428$ DT.
$z \times (1{,}1) = 4920 \times (1{,}1) = 5412$ DT.

Soit a, b, c et d des réels non nuls

- a et c sont respectivement proportionnels à b et d si et seulement si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.
- Les écritures ad = bc et $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ sont équivalentes.
- si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ alors $\frac{a+c}{b+d} = \frac{a}{b}$ $(b + d \neq 0)$.
- Partager un nombre S en parties proportionnelles à des nombres donnés a, b et c, c'est calculer trois nombres x, y et z de somme S proportionnellement aux nombres a, b et c.

On a donc : $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} = \frac{S}{a+b+c}$ $(a + b + c \neq 0)$.

• Règle de trois :

Pour déterminer un réel x tel que a et b sont proportionnel à c et x, on peut écrire :

$$\begin{array}{l} a \longrightarrow c \\ b \longrightarrow x \end{array} \quad \text{et on aura } x = \frac{bc}{a}.$$

- Lorsque x et y sont deux grandeurs variables de sorte que le rapport $\frac{y}{x}$ reste constant, on dit que y varie proportionnellement à x.

1. Sachant que 1,4 litre de peinture pèse 1,9 kg. Déterminer la masse de 5 litres de peintures, arrondie au millième.

2. Un robinet mal fermé, cause une perte de 2,2 litres en une heure.
① Quelle est la quantité d'eau perdue en une journée ?
② En combien de jours ce robinet cause une perte d'un mètre cube d'eau.
(1 m^3 = 1000 litres)

3. Déterminer les situations qui ne sont pas proportionnelles :
S_1 : 1,5 m^2 de tissus coûte 12 DT et 5 m^2 coûte 40 DT.
S_2 : 100 millilitres de produit dans 2 litres d'eau et 450 millilitres dans 9 litres.
S_3 : 30 photocopies pour 1,5 DT et 100 photocopies pour 4 DT.
S_4 : 5 minutes de communication pour 0,85 DT, 30 minutes pour 5,1 DT et une heure pour 9 DT.

4. 300 millilitres de produit d'entretient sont nécessaires pour nettoyer 15 m^2 de carrelages.
① Quelle est la quantité de produit nécessaire pour nettoyer 26 m^2 de carrelages ?
② Quelle surface peut-on nettoyer avec 1,3 litre de produit ?

5. Le tableau ci-dessous présente la structure de la population tunisienne par tranche d'âge (en %) en 2002.

Tranche d'âge	0 → 14 ans	15 → 59 ans	60 et plus
Pourcentage	28	63	9

(Source INS)

Représenter ces pourcentages sur un demi disque.

6. Une personne décide de partir en voyage vers l'Amérique, son ami lui informe qu'il a dernièrement échangé 2500 DT contre 1923 Dollars. Estimer le montant qu'il aurait s'il échange 1800 DT.

7. Partager 820 DT en parties proportionnelles à $\frac{7}{4}$; 2,5 et 6.

8. Un père veut partager une somme de 18,500 DT entre ses enfants proportionnellement à leurs âges. Calculer la part de chaque enfant, sachant qu'ils ont 5 , 8 , 11 et 13 ans.

9. Si cinq hommes travaillent 8 heures par jour pour charger 10 camions en 2 jours, combien faudra-t-il d'hommes travaillant 7 heures par jour pour charger 7 camions en 4 jours ?

10. ① Le diamètre de la terre est d'environ 13 000 km. Le diamètre d'un globe terrestre mesure 6,5 millimètres. Préciser l'échelle utilisée.
(La même échelle sera respectée dans la suite).
② Le diamètre de la lune est d'environ 3400 km. Quel serait le diamètre du globe lunaire ?
③ La distance réelle de la terre à la lune est d'environ 4×10^5 km. Quelle serait la distance entre le globe représentant la terre et le globe représentant la lune ?
④ Le globe solaire a pour diamètre 70 centimètres. Donner un ordre de grandeur du diamètre du soleil.
⑤ Donner un encadrement de la distance réelle entre la terre et le soleil sachant que :
La distance minimale entre les deux globes est de 73,55 mètres.
La distance maximale entre les deux globes est de 76,05 mètres.

11. Le prix du diamant naturel est proportionnel au carré de sa masse. Un diamant de masse 4 grammes coûte 8000 DT a été cassé net, sans éclats, en deux morceaux. Le rapport des masses des deux morceaux est $\frac{2}{3}$.
① Calculer la masse de chaque morceau.
② a) Combien coûte chaque morceau ?
b) Evaluer en pourcentage la perte du bijoutier.

12. Un robinet débite 40 litres d'eau à la minute et met 18 heures pour remplir un bassin B.
① a) Déterminer le temps k mis par un robinet débitant 1 litre par minute pour remplir ce bassin B.
b) Quel temps mettrait un robinet dont le débit est de 60 litres par minute pour remplir le même bassin ?
② Soit t le temps en heures mis par un robinet de débit x litres par minute pour remplir le même bassin B.
Exprimer t à l'aide de k et x.

Chapitre
3

Suites arithmétiques
Suites géométriques

Ils apprennent à suivre.

Sommaire

La nature est-elle écrite en langue mathématique ? Ou bien cette langue n'est qu'une invention de l'homme ? Dans ce cas, pourquoi marche-t-elle si merveilleusement pour décrire l'univers ?

Charles de Granrut
Rédacteur en chef de science et vie junior

La légende du jeu d'échec

Le roi demanda à l'inventeur du jeu d'échec de choisir lui-même sa récompense. Celui-ci répondit : « Place 1 grain de blé sur la première case de l'échiquier, deux grains sur la deuxième, quatre grains sur la troisième, et ainsi de suite jusqu'à la $64^{\text{ème}}$ case ». Le roi sourit de la modestie de cette demande, sans se rendre compte de son incapacité de fournir cette quantité mystérieuse de blé !

Suite de Fibonacci

• 1 ; 1 ; 2 ; 3 ; 5 ; 8 ; 13 ; 21 ; 34 ; 55 ; 89 ; 144 ;……
C'est une suite où les deux premiers termes sont égaux à 1 et chacun des autres termes est égal à la somme de deux termes qui le précéde.
• On divise un terme par celui qui le précède on obtient :

Termes de la suite de Fibonacci	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	…
Quotient d'un terme par son précédent		1	2	1,5	1,666	1,6	1,625	1,615	1,619	1,617	…

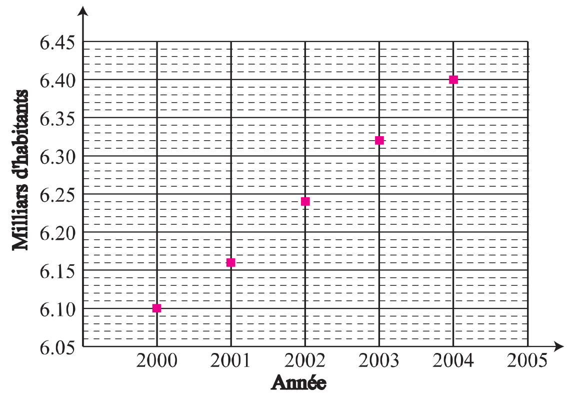
En allant de plus en plus loin on trouve la suite 1 ; 2 ; $\frac{3}{2}$; $\frac{5}{3}$; $\frac{8}{5}$; $\frac{13}{8}$;…. dont les termes s'approchent de 1,618.

• $1+\dfrac{1}{1+1}=\dfrac{3}{2}$; $1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+1}}=\dfrac{5}{3}$; $1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+1}}}=\dfrac{8}{5}$; ……

En allant de plus en plus loin dans le calcul, on retrouve :
$\frac{3}{2}$; $\frac{5}{3}$; $\frac{8}{5}$; $\frac{13}{8}$;…. encore les nombres qui composent la suite de Fibonacci.

I. Introduction

Activité 1



Le graphique ci-contre donne l'évolution de la population mondiale de 2000 à 2004 :

① Donner la population mondiale pour chacune des années 2000, 2001, 2002, 2003 et 2004.

② On note P_0 et P_1 la population mondiale respectivement en 2000 et 2001.

a) Donner la valeur exacte du coefficient multiplicateur d'augmentation de P_0 à P_1.

b) Déduire un arrondi au centième de ce coefficient. On le notera k.

③ On continue de la même façon à désigner par P_2, P_3, P_4, P_5, P_6 et P_7 la population mondiale respectivement en 2002 , 2003 , 2004 , 2005 , 2006 et 2007.

a) Donner les valeurs exactes des coefficients multiplicateurs d'augmentation de P_1 à P_2, de P_2 à P_3 et de P_3 à P_4.

b) Donner un arrondi au centième de chacun de ces coefficients.
Que remarquez-vous ?

c) Les démographes estiment que la population mondiale continuera à croître avec le même coefficient k, jusqu'à 2007.
Quelle sera la population mondiale en 2007 ?

Activité 2

On considère l'ensemble des carrés des entiers naturels rangés dans l'ordre croissant : 0 ; 1 ; 4 ; 9 ; … de sorte que le premier terme soit 0, le deuxième terme soit 1 et ainsi de suite.

① Déterminer le troisième et le quatrième terme.

② On pose $u_0 = 0$, $u_1 = 1$, $u_2 = 2^2 = 4$, $u_3 = 3^2 = 9$

a) Déterminer u_7 et u_{10} .

b) Exprimer alors u_n en fonction de n.

c) Exprimer en fonction de n, les entiers u_{n+1}, u_{2n} et u_{2n+1}.

Activité 3

On considère l'ensemble des inverses des entiers naturels non nuls rangés dans l'ordre décroissant : $1 ; \frac{1}{2} ; \frac{1}{3} ; \ldots$ de sorte que le premier terme soit 1, le deuxième terme soit $\frac{1}{2}$ et ainsi de suite.

① Déterminer le troisième et le huitième terme.

② On pose $V_p = \frac{1}{p}$ pour tout entier naturel non nul p.

a) Déterminer V_5, V_6 et V_{100}.

b) Exprimer en fonction de p les réels V_{2p}, V_{p+1} et V_{3p+1}.

Définition

Soit a un entier naturel. Lorsque à tout entier naturel n supérieur ou égal à a on associe un réel unique u (n), on dit que l'on a défini une suite de nombres réels.
Le réel u (n) s'appelle terme général de la suite.

Notation : La suite se note $(u_n)_{n \geq a}$ et le terme général u (n) de cette suite se note u_n.

Exemples

Dans les activités précédentes :

- $P_0 ; P_1 ; P_2 ; P_3 ; P_4 ; P_5 ; P_6 ; P_7$ sont des termes d'une suite.
- $0 ; 1 ; 4 ; 9 ; \ldots$ est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = n^2$.
- $1 ; \frac{1}{2} ; \frac{1}{3} ; \ldots$ est la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $V_p = \frac{1}{p}$.

II . Suites arithmétiques

Activité 1

Un capital de 1000 DT est placé à un intérêt simple, au taux annuel de 5 %.

① Calculer l'intérêt I en DT rapporté par ce capital en une année.

> Un capital C_0 est placé à un intérêt simple au taux annuel de i % s'il augmente chaque année d'une somme constante égale à i % de C_0.

② On pose $c_0 = 1000$ DT et on désigne par c_n la somme en DT disponible au bout de n années ($n \in \mathbb{N}$).

a) Calculer c_1 ; c_2 ; c_3 ; c_4 et c_5.

b) Comment peut-on obtenir c_6 à partir de c_5 ?

c) Trouver une relation entre c_{n+1} et c_n.

Définition

Une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dite arithmétique s'il existe un réel r tel que, pour tout entier n, on a : $u_{n+1} - u_n = r$.
Le réel r est appelé la raison de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$

Remarques

1. Une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dite arithmétique lorsqu'on passe d'un terme quelconque au suivant en ajoutant un même nombre constant r.
2. Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de raison $r = 0$ alors tous les termes sont égaux au premier terme. On dit alors que la suite est constante.

Activité 2

A. Soit la suite arithmétique : 2 ; 5 ; 8 ; 11 ; ……

① Déterminer la raison et le premier terme de cette suite.

② Trouver trois autres termes de cette suite.

B. Soit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_n = 2 - 3n$.

① Calculer u_0, u_1 et u_2.

② Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite arithmétique.

C. Soit la suite $(w_p)_{p \in \mathbb{N}}$ définie par $w_p = (p+1)^2$.

① Calculer w_0, w_1 et w_2.

② La suite $(w_p)_{p \in \mathbb{N}}$ est-elle arithmétique ?

Terme général d'une suite arithmétique

Activité 3

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison r.

① Vérifier que $u_2 = u_0 + 2r$ et que $u_5 = u_0 + 5r$.

② exprimer u_7 et u_{10} à l'aide de u_0 et r.

Nous admettons que :

> Si une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est arithmétique de raison r alors pour tout entier naturel n, $u_n = u_0 + nr$.

Activité 4

Le prix d'un livre subit une augmentation de 400 millimes le 1er septembre de chaque année.

On désigne par P_0 son prix le 1er septembre 2000 et par P_n son prix le 1er septembre de l'année (2000 + n), $(n \in \mathbb{N})$.

① a) Exprimer P_{n+1} en fonction de P_n.

b) Exprimer P_n en fonction de P_0 et de n.

② Le 1er septembre 2000, le prix du livre était de 3,200 DT.

a) Déterminer le prix du livre le 1er septembre 2001 ? le 1er septembre 2005 ?

b) A quelle date le prix du livre sera-t-il pour la première fois supérieur à 7 DT ?

Activité 5

Soit la suite arithmétique $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de premier terme $u_0 = (-2)$ et de raison $r = \frac{3}{2}$.

① a) Calculer u_1, u_2, u_3 et u_4.

b) Déterminer son terme général.

② Placer dans un plan rapporté a un repère orthogonal (O, I, J) les points. $A_0(0,u_0)$, $A_1(1,u_1)$, $A_2(2,u_2)$, $A_3(3,u_3)$ et $A_4(4,u_4)$.

③ Soit la droite D dont une équation est $y = \frac{3}{2}x - 2$.
Montrer que pour tout entier naturel n, le point A_n de coordonnées (n,u_n) appartient à la droite D.

Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite arithmétique, les points A_n de coordonnées (n,u_n) sont alignés.

Activité 6

Soit a et b deux réels. Montrer que la suite de terme général $u_n = an + b$ $(n \in \mathbb{N})$ est arithmétique. Préciser la raison et le premier terme.

Soit a et b deux réels. Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite telle que pour tout entier naturel n, $u_n = an+b$ alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de raison a et de premier terme b.

Activité 7

On donne les suites u, v, w et t de termes généraux respectifs $u_n = 2n - 5$; $v_n = 2^n + 5$; $w_n = n$; $t_n = -\frac{2}{3}n + \frac{1}{3}$.
Relever celles qui sont arithmétiques.

Activité 8

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison r. Monter que pour tous entiers naturels m et n, on a $u_n = u_m + (n - m)r$.

Si u_n et u_m sont deux termes d'une suite arithmétique de raison r alors $u_n = u_m + (n - m)\, r$.

Activité 9

On suppose qu'un pin, dont l'âge compris entre 15 et 30 ans, a une croissance annuelle régulière. On note h_n la hauteur en mètres du pin à l'âge n (n étant un entier compris entre 15 et 30).

Les réels $(h_n)_{15 \leq n \leq 30}$ sont des termes d'une suite arithmétique. On donne $h_{15} = 6{,}2$ et $h_{20} = 8{,}2$.

① Déterminer la raison de cette suite.

② Quelle sera la hauteur de cet arbre lorsqu'il aura 30 ans ?

Somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique

Activité 10

A/ Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite arithmétique de premier terme $u_0 = 7920$ et de raison $r = (-240)$.

① Calculer u_1 et u_2.

② Déterminer le terme général de cette suite.

B/ Un promoteur vend des appartements par facilité sur 10 ans selon le procédé suivant :

La $1^{\text{ère}}$ année, le client paye 640 DT par mois.

La $2^{\text{ème}}$ année, le client paye 620 DT par mois.

La $3^{\text{ème}}$ année, le client paye 600 DT par mois.

Et ainsi de suite, les mensualités diminuent de 20 DT chaque année jusqu'à la dixième année.

① On note M_n le montant annuel remboursé au cours de la $n^{\text{ème}}$ année

a) Calculer M_1, M_2 et M_3.

b) Vérifier que $M_1, M_2, \ldots, M_{10}$ sont des termes consécutifs de la suite u définie en A/.

c) Calculer alors M_{10}.

② On se propose de calculer le prix total S de l'appartement, c'est-à-dire la somme cumulée des montants annuels payés pendant 10 ans.

a) Vérifier que
$$\begin{aligned} M_2 + M_9 &= M_1 + M_{10} \\ M_3 + M_8 &= M_1 + M_{10} \\ M_4 + M_7 &= M_1 + M_{10} \\ M_5 + M_6 &= M_1 + M_{10} \end{aligned}$$

b) En écrivant $S = M_1 + M_2 + M_3 + M_4 + M_5 + M_6 + M_7 + M_8 + M_9 + M_{10}$.
Et $S = M_{10} + M_9 + M_8 + M_7 + M_6 + M_5 + M_4 + M_3 + M_2 + M_1$.

Déduire que $S = \dfrac{10\,(M_1 + M_{10})}{2}$ et calculer le prix de l'appartement.

Nous admettons que :

> La somme S de N termes consécutifs d'une suite arithmétique est donnée par la formule :
>
> $$S = \frac{N \times (\text{premier terme de } S + \text{dernier terme de } S)}{2}$$

Activité 11

A. Soit u une suite arithmétique de premier terme $u_0 = 3$ et de raison (- 4)

Calculer : $S = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_{15}$.

$P = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_{15}$.

$Q = u_3 + u_4 + u_5 + \ldots + u_{21}$.

B. Calculer : • $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \ldots + 100$.

• $20 + 21 + 22 + 23 + \ldots + 119$.

C. Déterminer en fonction de n, la somme $S_n = 1 + 2 + 3 + \ldots + n$ ($n \in \mathbb{N}^*$).

D. Soit v une suite arithmétique de premier terme $v_0 = 1$ et de raison $r = 2$.

① Exprimer en fonction de n, la somme $S_n = v_0 + v_1 + \ldots + v_n$ avec $n \in \mathbb{N}$.

② Déterminer n pour que $S_n = 81$.

III . Suites géométriques

Activité 1

Une personne a obtenu un prêt de 3000 DT à intérêts composés au taux annuel de 10%.

① Si cette personne décide de rembourser après une année, quelle somme devrait-elle rendre ?

② Si cette personne décide de rembourser après deux ans, quelle somme devrait-elle rendre ?

Un intérêt annuel de i % est dit composé, si à la fin de chaque année il est capitalisé (c'est-à-dire ajouté au capital) et produit lui-même un intérêt de i % pendant l'année suivante.

Activité 2

Soit un capital c_0 placé à intérêts composés au taux annuel de 6 %. On désigne par c_n le capital disponible au bout de n années.

① Exprimer c_1 à l'aide de c_0.

② Exprimer c_2 à l'aide de c_1 puis à l'aide de c_0.

③ Exprimer c_3 à l'aide de c_2 puis à l'aide de c_0.

④ Exprimer c_{n+1} en fonction de c_n.

Définition

Une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dite géométrique s'il existe un réel q tel que, pour tout entier n, on a : $u_{n+1} = q \times u_n$.
Le réel q est appelé la raison de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$

Remarques

1. Une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique lorsqu'on passe d'un terme quelconque au suivant en le multipliant par un même nombre constant.

2. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison q.

a) Si q = 0 alors la suite est nulle à partir de son deuxième terme.
b) Si q = 1 alors la suite est constante (tous les termes sont égaux au premier terme).
c) Si $u_0 = 0$ alors la suite est nulle.

Activité 3

A. Soit la suite géométrique u : 1 ; 3 ; 9 ; 27 ; 81 ; ……

① Déterminer la raison de cette suite.

② On note $u_0 = 1$ et $u_1 = 3$. Déterminer u_2, u_5 et u_8.

B. Soit la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $v_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

① Calculer v_0, v_1, et v_2.

② a) Soit $n \in \mathbb{N}$, Calculer $\frac{V_{n+1}}{V_n}$.

b) En déduire que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique.

C. Soit la suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $w_n = n^2$.

① Calculer w_0, w_1 et w_2.

② La suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est-elle géométrique ?

Terme général d'une suite géométrique

Activité 4

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison non nulle q et de premier terme u_0.

Vérifier que $u_3 = u_0 \times q^3$ et que $u_5 = u_0 \times q^5$, puis exprimer u_7 à l'aide de u_0 et q.

Nous admettons que :

> Si une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique de raison non nulle q, alors pour tout entier naturel n, $u_n = u_0 \times q^n$.
> u_n s'appelle le terme général de la suite.

Activité 5

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison non nulle q.

① Exprimer son terme général u_n en fonction de u_0 et de q.

② Soit m et n deux entiers naturels. Montrer que $u_n = u_m \times q^{n-m}$.

Si u_n et u_m sont deux termes d'une suite géométrique de raison non nulle q, alors $u_n = u_m \times q^{(n-m)}$.

Activité 6

Soit une suite géométrique u.

① Calculer u_6 si $u_0 = 5$ et $q = 2$.

② Calculer u_6 si $u_1 = 2$ et $q = \frac{1}{2}$.

③ Calculer u_{10} si $u_7 = 5$ et $q = -\frac{3}{2}$.

Activité 7

① Soit la suite $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de terme général $t_n = (-2) \times 3^n$.

a) Calculer t_0, t_1 et t_2.

b) Montrer que t est une suite géométrique dont on précisera la raison.

② Soit a et b deux réels non nuls. Montrer que la suite de terme général $u_n = b \times a^n$; $(n \in \mathbb{N})$ est géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

Soit a et b deux réels non nuls. Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite telle que $u_n = b \times a^n$ pour tout entier n, alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison a et de premier terme b.

Activité 8

A. Déterminer la nature de la suite u de terme général $u_n = 3 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n$ et préciser son premier terme u_0 et sa raison.

B. Déterminer la nature de la suite v de terme général $v_n = 5 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n$ et préciser son premier terme v_0 et sa raison.

C. Déterminer la nature de la suite w de terme général $W_n = (-1)^n$ et préciser son premier terme et sa raison.

Activité 9

Un quartier comptait 2450 habitants en 1997. Le nombre d'habitants augmente de 10 % chaque année. On note u_n le nombre d'habitants n années après 1997.

① Déterminer u_0 et calculer u_1.

② Justifier que la suite u est géométrique et donner sa raison.

③ Placer dans un plan rapporté à un repère orthogonal les points de coordonnées (n, u_n) avec $n \in \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8\}$. Ces points sont-ils alignés ?

④ En quelle année, pour la première fois, le nombre d'habitants dépassera le double du nombre initial (en 1997)?

Somme des termes consécutifs d'une suite géométrique

Activité 10

Une société loue un local pour 10 ans. Le contrat stipule un loyer de 3600 DT pour la 1$^{\text{ère}}$ année puis une augmentation de 5 % par an, jusqu'à la fin du contrat. On désigne par u_n le loyer pour la n$^{\text{ème}}$ année.

① Déterminer u_1, u_2 et u_3.

② Vérifier que les réels $(u_n)_{1 \leq n \leq 10}$ sont les termes consécutifs d'une suite géométrique dont on précisera la raison q.

③ On se propose de calculer la somme S, payée pour 10 ans, c'est-à-dire :
$S = u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 + u_6 + u_7 + u_8 + u_9 + u_{10}$.

a) Montrer que $q \times S = u_2 + u_3 + u_4 + u_5 + u_6 + u_7 + u_8 + u_9 + u_{10} + q \times u_{10}$.

b) En déduire que $S = \dfrac{u_1 (q^{10} - 1)}{(q - 1)}$. Calculer alors S.

Nous admettons que :

- La somme S de N termes consécutifs d'une suite géométrique de raison le réel q différent de 1 est donnée par la formule :
  $S = (\text{premier terme de } S) \times \dfrac{(q^N - 1)}{(q - 1)}$.
- Pour q = 1 tous les termes sont égaux au premier terme, la suite est constante et $S = N \times (\text{premier terme de } S)$.

Activité 11

A. Soit (u) une suite géométrique de premier terme $u_0 = 3$ et de raison 1,2.

Calculer : • $S = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_{15}$.

• $P = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_{13}$.

• $Q = u_3 + u_4 + u_5 + \ldots + u_{11}$.

(On donnera les résultats arrondis au centième)

B. Calculer la somme $A = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{256}$.

C. Calculer la somme $B = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \ldots - \frac{1}{128} + \frac{1}{256}$.

Activité 12

Un patron propose à ses employés deux modes d'augmentation de leur salaire mensuel.

<u>Mode A</u> : Augmenter le salaire mensuel de 40 DT au 1^{er} janvier de chaque année.

<u>Mode B</u> : Augmenter de 5% le salaire mensuel le 1^{er} janvier de chaque année.

En 2004, un employé gagne 700 DT par mois.

I. On suppose que cet employé choisit le mode A.

① Calculer son salaire mensuel en 2005, puis en 2006.

② On note $u_0 = 700$ et u_n le salaire mensuel n années après 2004.

a) Quelle est la nature de la suite (u) ?

b) Déterminer le terme général de (u).

c) Placer dans un repère orthogonal (O , I , J) les points A_n de coordonnées (n,u_n) pour $n \in \{0,1,\ldots,12\}$.

II. On suppose que cet employé choisit le mode B.

① Calculer son salaire mensuel en 2005, puis en 2006.

② On note $v_0 = 700$ et v_n le salaire mensuel n années après 2004.

a) Quelle est la nature de la suite (v) ?

b) Déterminer le terme général de (v).

c) Placer dans le même repère (O , I , J) les points B_n de coordonnées (n,v_n) pour $n \in \{0,1,\ldots,12\}$.

III. Quel mode devrait choisir cet employé pour qu'à sa retraite, en 2011, son salaire soit le meilleur possible ?

Activité 13

Un épargnant a le choix entre deux formules pour placer un capital de 20 mille DT à partir du premier janvier 2004:
- Avec un intérêt simple de 2000 DT par an.
- Avec un intérêt composé de 7% par an.

① Ouvrir un classeur du tableur Excel.
② a) Ecrire 2004 dans la cellule A1.
b) Entrer dans la cellule A2 la fonction =A1+1 puis taper « Enter ».
c) Sélectionner A2 et faire apparaître la croix noire en bas et à droite de la cellule, puis tirer le calcul vers A20.
③ a) Ecrire 20000 dans la cellule B1.
b) Entrer dans la cellule B2 la fonction =B1+2000 puis taper « Enter ».
c) Sélectionner B2 et faire apparaître la croix noire en bas et à droite de la cellule, puis tirer le calcul vers B20.
④ a) Ecrire 20000 dans la cellule C1.
b) Entrer dans la cellule C2 la fonction =C1*1.07 puis taper « Enter ».
c) Sélectionner C2 et faire apparaître la croix noire en bas et à droite de la cellule, puis tirer le calcul vers C20.
⑤ a) Quelle formule devrait choisir cet épargnant s'il décide d'épargner son capital pendant 10 ans ?
b) Quelle formule devrait choisir cet épargnant s'il décide d'épargner son capital pendant 15 ans ?

Activité 14

On s'intéresse à l'évolution de la population mondiale entre les années 1950 et 2000 . Pour cela, on donne le tableau suivant :

n	0	1	2	3	4	5
Année	1950	1960	1970	1980	1990	2000
Population P_n (en milliards d'habitants)	2,5	3,0	3,6	4,4	5,2	6,1

① Soit (u) la suite arithmétique définie par $u_0 = 2{,}5$ et $u_5 = 6{,}1$.
a) Calculer sa raison.
b) Calculer u_1, u_2, u_3 et u_4.
c) Placer dans un repère orthogonal les points $A_n\,(n,u_n)$ pour $0 \leq n \leq 5$ avec les échelles suivantes :
1 cm représente 10 ans sur l'axe des abscisses.
2 cm représentent un milliard d'habitants sur l'axe des ordonnées.
d) Quelle serait la valeur de u_n pour l'an 2010 ?

② Calculer les coefficients multiplicateurs qui permettent de passer de 1950 à 1960, 1960 à 1970, 1970 à 1980, 1980 à 1990 et 1990 à 2000.

③ Soit v la suite géométrique telle que $v_0 = 2{,}5$ et de raison $q = 1{,}2$.

a) Calculer v_1, v_2, v_3, v_4 et v_5.

b) Représenter sur le même graphique les points B_n (n, v_n) pour $0 \leq n \leq 5$. Quelle serait la valeur de v_n pour l'an 2010 ?

④ Représenter sur le graphique précédent les points C_n (n, p_n) pour $0 \leq n \leq 5$. Laquelle des deux suites u ou v paraît-elle approcher aux mieux la suite p ?

Suites arithmétiques	Suites géométriques
• Une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dite arithmétique s'il existe un réel r tel que, pour tout entier n, on a : $u_{n+1} - u_n = r$. Le réel r est appelé la raison de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$	• Une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dite géométrique s'il existe un réel q tel que, pour tout entier n, on a : $u_{n+1} = q \times u_n$. Le réel q est appelé la raison de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$
• Si une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est arithmétique de raison r alors pour tout entier naturel n, $u_n = u_0 + nr$.	• Si une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique de raison non nulle q alors pour tout entier naturel n, $u_n = u_0 \times q^n$.
• Si une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est arithmétique alors les points A_n de coordonnées (n,u_n) sont alignés.	• Si u_n et u_m sont deux termes d'une suite géométrique de raison non nulle q alors $u_n = u_m \times q^{(n-m)}$.
• Soit a et b deux réels. Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite telle que pour tout entier naturel n, $u_n = an + b$ alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de raison a et de premier terme b.	• Soit a et b deux réels non nuls. Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite telle que $u_n = b \times a^n$ pour tout entier n, alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison a et de premier terme b.
• Si u_n et u_m sont deux termes d'une suite arithmétique de raison r alors $u_n = u_m + (n-m)r$.	• La somme S de N termes consécutifs d'une suite géométrique de raison le réel q différent de 1 est donnée par la formule : $S = P \times \dfrac{q^N - 1}{q - 1}$ où P est le premier terme de la somme. Pour q = 1 tous les termes sont égaux au premier terme, la suite est constante et S = N × (premier terme de S).
• La somme S de N termes consécutifs d'une suite arithmétique est donnée par la formule : $S = \dfrac{N \times (P + D)}{2}$ où P est le premier terme de la somme et D est le dernier terme de la somme.	

1. Soit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_n = -\frac{1}{2}n + 5$.

① Calculer u_1, u_2, u_3 et u_{12}.

② a) Soit $n \in \mathbb{N}$, Calculer $u_{n+1} - u_n$.

b) Déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est arithmétique.

2. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite arithmétique de premier terme $u_0 = 2$ et de raison $r = \frac{1}{2}$.

① Calculer u_1, u_2 et u_3.

② Ecrire en fonction de n le terme général u_n de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$

③ Calculer u_{18} et u_{100}.

3. $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite arithmétique telle que : $v_2 = 4$ et $v_6 = 10$.

① Déterminer sa raison et son premier terme .

② Déterminer son terme général v_n en fonction de n.

4. On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{2}$ avec $u_0 = 3$.

① Calculer u_1, u_2 et u_3.

② Quelle est la nature de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$?

③ a) Déterminer son terme général u_n en fonction de n.

b) Calculer u_{2005}.

5. Soit u, v et w trois suites de termes généraux :

$u_n = (2n-1)^3$, $v_n = 3 - \frac{1}{3}n$ et $w_n = \frac{1}{2n+1}$.

Laquelle de ces trois suites est arithmétique ?

6. On considère la suite $(v_p)_{p \in \mathbb{N}}$ définie par $v_p = 3p - 1$.

① Quelle est la nature de cette suite ?

② Calculer $S = v_0 + v_1 + \ldots + v_{20}$.

7. On considère la suite $(w_p)_{p \in \mathbb{N}}$ de terme général $w_p = 2p + 1$.

① Calculer w_0 et w_{49}.

② Calculer $S = 1 + 3 + 5 + \ldots + 99$.

8. Lequel des deux nombres suivants est le plus grand ?
A = 2005 (1 + 2 + 3 + 4 +…+ 2006).
B = 2006 (1 + 2 + 3 + 4 +…+ 2005).

9. A/ Soit u une suite arithmétique de raison 6 telle que $u_1 = 0$. Déterminer le terme général de cette suite.

B/ Un jardinier décide de verser un seau d'eau au pied de chacun des arbres qui bordent son champ. Il y a 95 arbres, en ligne droite, espacés de trois mètres et la prise d'eau est au pied du premier.
Le jardinier ne porte qu'un seul seau à chaque fois.
On suppose qu'il arrose les arbres dans l'ordre d'alignement de plus proche au plus éloigné, on pose d_n la distance aller-retour pour arroser la $n^{ème}$ arbre et revenir au point d'eau.
① Calculer les distances d_1, d_2, d_3 et d_4 qui correspondent au 4 premiers aller-retours.
② a) Soit $n \in \{1 ; 2 ; 3 ;…; 94\}$, exprimer d_{n+1} en fonction de d_n.
b) Déduire que $(d_n)_{1 \leq n \leq 95}$ sont des termes consécutifs de la suite u ?
③ Calculer le chemin que le jardinier aura à parcourir pour arroser tous ces arbres.

10. Une entreprise a fabriqué en une année 45 000 unités d'un produit. Pour les années suivantes, la production diminue de 3 000 unités par an.
① Au bout de combien d'années la production sera-t-elle nulle ?
② Combien d'unités du produit aura-t-on fabriqué pendant ces années ?

11. $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique de premier terme $u_0 = 256$ et de raison $r = (-\frac{1}{2})$.
① Calculer u_1, u_2 et u_3.
② Ecrire en fonction de n le terme général u_n de cette suite.
③ Calculer u_9.

12. On considére la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $u_{n+1} = (1{,}05) \times u_n$ avec $u_0 = 3200$.

① Calculer u_1, u_2 et u_3.

② Quelle est la nature de la suite (u) ?

③ a) Déterminer son terme général.

b) Calculer u_{20}.

(On donnera les résultats arrondis à l'unité).

13. Une entreprise fabrique un type de pièce de rechanges pour un appareil électromènager, l'entreprise a fabriqué 22000 pièces dans une période de 2 ans. En admettant que la production de cette entreprise augmente chaque année de 20%.

① Quelle était sa production durant la première année ?

② Combien de pièces fabriquera-t-elle au bout de 5 ans ?

14. $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géometrique définie par la donnée de $v_3 = 14{,}4$ et $v_5 = 20{,}736$.

Déterminer la raison q de cette suite et le premier terme v_0.

15. Soit la suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par son terme général $w_n = 2 \times (1{,}25)^n$.

① Calculer w_0, w_1 et w_2.

② Déterminer la nature de cette suite et préciser sa raison.

③ Calculer la somme des 5 premiers termes de la suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$

16. On considére la suite géométrique $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $u_1 = 9$ et $u_1 + u_2 = 12$.

① Préciser sa raison q, son premier terme et son terme général.

② Calculer $S = u_3 + u_4 + \ldots + u_9$.

17. Un échiquier comporte 64 cases.

Sur la première case, on pose $b_1 = 1$ grain de blé.

Sur la deuxième case, on pose $b_2 = 2$ grains de blé.

Sur la troisième case, on pose $b_3 = 4$ grains de blé.

Sur la quatrième case, on pose $b_4 = 8$ grains de blé.

Et ainsi de suite jusqu'à la 64$^{\text{ème}}$ case.

On désigne par b_n le nombre de grains de blé se trouvant dans la $n^{\text{ème}}$ case.

① Déterminer b_5 ; b_6 et b_7.
② Montrer que les nombres $(b_n)_{1 \leq n \leq 64}$ sont les termes consécutifs d' une suite géométrique dont on précisera la raison.
③ On désigne par S , le nombre total de grains de blé qu'il y a sur l'ensemble de l'échiquier.

a) Vérifier que $S = 2^{64} - 1$.

b) Vérifier que $2^{10} > 10^3$ puis déduire que $2^{64} > 16 \times 10^{18}$.

c) En moyenne 10^4 grains de blé pèsent 1kg. Donner un ordre de grandeur de la quantité de blé qui se trouve sur l'échiquier.
d) La production mondiale actuelle est d'environ 800 millions de tonnes. Déterminer la proportion de la quantité de blé de l'échiquier par rapport à la production mondiale. (Voir la légende du jeu d'échec page 39)

18. Une entreprise E a produit 150 000 articles pendant l'année 2000. Elle décide d'augmenter le nombre d'articles de 2% par an pendant 10 ans.
① Calculer la production de l'année 2001.
② On note P_0 la production de l'année 2000, P_1 la production de l'année 2001, P_n la production de l'année (2000 + n).
a) Quelle est la nature de la suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$?
b) Calculer la production de l'année 2010.
③ Combien d'articles auront été produits de 2000 à 2010 ?

19. Le montant annuel de la location d'un appartement au premier janvier 2000 est égal à 3000 DT. Un propriétaire propose deux types de contrats.
① Dans le premier contrat, le loyer annuel augmente chaque année de 150 DT.
On désigne par P_n le montant annuel du loyer pour l'année (2000 + n).
a) Déterminer P_0, P_1 et P_2.
b) Montrer que P est une suite arithmétique. Déterminer sa raison.
c) Exprimer P_n en fonction de n.
d) Quel sera le montant annuel du loyer en 2015 ?
e) En quelle année, pour la première fois, le loyer dépassera-t-il le double du loyer initial ?
f) Quelle sera la somme perçue par le propriétaire au terme des vingt premières années ?

② Dans le deuxième contrat, le loyer annuel augmente chaque année de 4%.
On désigne par Q_n le montant annuel du loyer pour l'année (2000 + n) .
a) Déterminer Q_0, Q_1 et Q_2.
b) Montrer que Q est une suite géométrique. Déterminer sa raison.
c) Exprimer Q_n, en fonction de n.
d) Quel sera le montant annuel du loyer en 2015 ?
e) En quelle année, pour la première fois, le loyer dépassera-t-il le double du loyer initial ? (à l'aide de la calculatrice).
f) Quelle sera la somme perçue par le propriétaire au terme des vingt premières années?

20. Dans cet exercice, les résultats seront arrondis au millième près.
Une jeune fille décide de placer 2000 DT en compte bloqué. Une banque lui propose deux sortes de placement :
• Placement A : le capital est placé sur un livret d'épargne au taux de 4,5% par an à intérêts composés .
• Placement B : le capital est placé sur un livret d'épargne au taux de 5% par an à intérêts simples.

① On note C_n le capital que la jeune fille aura acquis au bout de n années si elle choisit le placement A.
a) Calculer C_1 et C_2.
b) Démontrer que C est une suite géométrique et exprimer C_n en fonction de n.
② On note T_n le capital que la jeune fille aura acquis au bout de n années si elle choisit le placement B.
a) Calculer T_1 et T_2.
b) Démontrer que T est une suite arithmétique et exprimer T_n en fonction de n.
③ a) Placer dans un repère orthogonal les points de coordonnées $(1,T_1)$; $(2,T_2)$ et (n,C_n) pour n inférieur où égale à 8.
b) Déterminer graphiquement T_5 et T_6.
④ Déterminer en fonction du nombre d'années, le placement le plus avantageux pour la jeune fille.

Chapitre
4

Statistiques et dénombrement

Quelle est la production moyenne d'un olivier en huile d'olive ?

Sommaire

POUR COMMENCER

« Le mathématicien est un oiselier capturant dans une volière des oiseaux aux brillantes couleurs »

Platon (427-347 av. J.-C.)

• Dans la vie courante et dans de nombreux domaines (économie, statistiques, géographie et d'autres), on utilise souvent des estimations, des ordres de grandeur et des pourcentages. Le traitement mathématique de ces données permet de les analyser, de les interpréter et de les examiner d'une vue critique et réfléchie.

• En Tunisie, il y a en moyenne 265 habitants par km^2, pourtant 80% des gouvernorats ont une densité inférieure à 265.

• Les animaux savent-ils compter ?
Les abeilles évaluent assez bien les distances. Mais à la différence de l'homme, elles n'ont pas besoin de compter pour mesurer. Elles se fient à l'énergie qu'elles dépensent.
Les oies migratrices et les hirondelles ne savent pas qu'Alger est à 1300 km de Paris. Ces voyageuses, se fient à leur « horloge interne ».

(D'après Science et vie junior N° 26/1996)

• Un coffre contient 10 paires de chaussettes noires et 10 paires de chaussettes blanches. Si on ne voit rien, il faut tirer au moins 3 chaussettes pour être certain d'avoir une paire assortie. Mais si à la place des paires de chaussettes il y a des paires de gants, il faut tirer au moins 21 gants pour obtenir avec certitude une paire assortie !

I. Statistiques

Série statistique

Activité 1

De plus en plus, les enfants sollicitent l'aide de leurs parents concernant leurs études, mais les parents consacrent-ils suffisamment de temps pour les aider ?
Pour essayer de répondre à cette question, on a enquêté auprès de quelques familles et les informations collectées sont résumées dans le tableau ci-contre qui est organisé de la manière suivante :
- Dans la colonne A : Le nombre d'enfants par famille.
- Dans la colonne B : Le nombre d'enfants pas encore scolarisés.
- Dans la colonne C : Le nombre d'enfants dans le premier cycle de l'enseignement de base.
- Dans la colonne D : Le nombre d'enfants dans le deuxième cycle de l'enseignement de base ou l'enseignement secondaire.
- Dans la colonne E : Le temps en heures consacré chaque semaine par les parents pour aider les enfants à leur scolarité.

① a) Quel est le nombre de familles de cet échantillon ?
b) Quel est le nombre de familles de cet échantillon qui n'ont pas d'enfants ?
c) Quel est le nombre de familles de cet échantillon qui ont deux enfants ?
d) Former un tableau T qui donne le nombre de familles suivant le nombre d'enfants.

A	B	C	D	E
2	0	0	2	10.5
3	0	0	0	0
3	0	0	2	10.5
3	2	1	0	13.5
3	0	1	2	29
2	1	1	0	29
3	1	0	2	14
3	0	0	2	10.5
4	0	2	2	14
3	1	1	1	21
2	0	2	0	14
6	0	0	0	0
2	2	0	0	14
2	2	0	0	3.5
2	0	0	2	2
4	0	1	2	7
2	0	0	0	0
2	2	0	0	7
2	0	1	1	10.5
0	0	0	0	0
3	1	2	0	21
2	0	0	0	0
2	0	2	0	21
1	1	0	0	3.5
2	1	1	0	7
2	0	1	1	17.5
3	0	1	1	17.5
3	2	1	0	21
3	3	0	0	7
2	1	1	0	14
3	0	0	0	0
4	0	0	0	0
3	0	0	0	0
2	2	0	0	10.5
2	1	0	0	7
3	0	0	0	0
2	2	0	0	14
0	0	0	0	0
1	1	0	0	10.5
4	0	0	1	7
1	0	0	0	0
1	0	0	0	0
0	0	0	0	0
2	0	1	1	14
2	0	0	2	17.5
5	0	0	0	0
2	0	0	2	10.5
1	0	1	0	10
5	0	0	0	0
3	0	0	0	0

e) Le tableau T permet de définir une série statistique. Préciser sa population et son caractère.

② On s'intéresse dans cette question au temps consacré, par semaine, par les parents pour aider leurs enfants. (On ne considère que les familles qui ont des enfants très jeunes ou des enfants scolarisés).

a) Quel est le nombre de familles qui consacrent plus que 25 heures par semaine pour aider leurs enfants?

b) Organiser les données dans un tableau par classes d'amplitudes égales à 5.

c) Représenter ce tableau par un histogramme.

d) Quel est le mode de cette série ?

③ Selon vous les parents tunisiens consacrent-ils suffisamment de temps à aider leurs enfants ?

Une série statistique est la donnée :
- D'une population déterminée.
- D'un ou de plusieurs caractères.
- De l'effectif (ou de la fréquence) de chaque valeur ou classe du caractère.

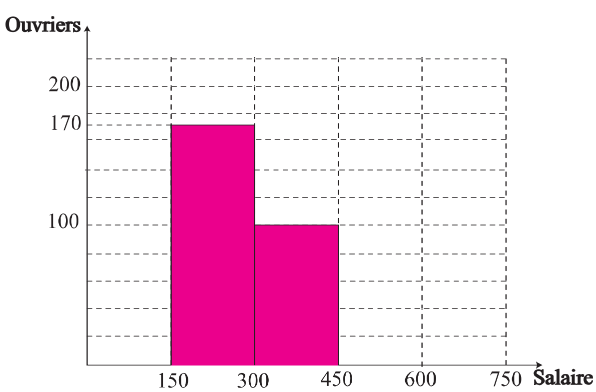
• Le caractère est dit quantitatif s'il est mesurable. (Exemple : Nombre d'enfants, poids, taille…).

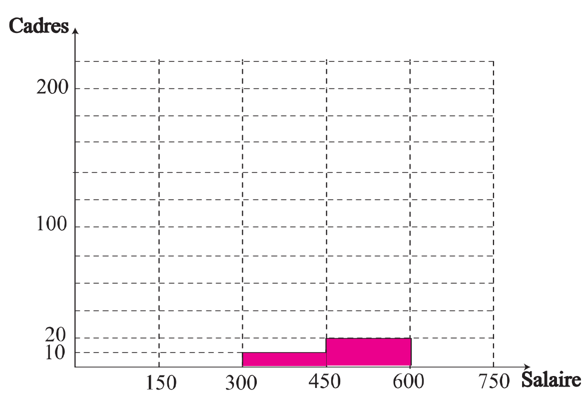
• Le caractère est dit qualitatif s'il n'est pas mesurable. (Exemples : couleur, moyen de transport…).

• La fréquence d'une valeur est le quotient de l'effectif de cette valeur par l'effectif total.

Activité 2

① Dans une entreprise E_1, les employés sont classés en deux catégories « ouvriers et cadres ». Les diagrammes qui suivent donnent la répartition des employés, suivant leurs catégories professionnelles et leurs salaires mensuels (en DT).





a) Déterminer le nombre total des employés dans cette entreprise.
b) Calculer les fréquences des salaires suivant la catégorie professionnelle.
c) Donner le pourcentage, arrondi à l'unité, des cadres par rapport aux employés.

② Le tableau ci-contre donne pour une entreprise E_2 la répartition des employés en fonction de leurs catégories professionnelles et suivant leurs salaires mensuels en (DT).

Catégorie \ Salaire	[150 ; 300[	[300 ; 450[	[450 ; 600[
Ouvrier	280	140	0
Cadre	0	40	40

a) Déterminer le nombre total des employés dans l'entreprise E_2.
b) Calculer les fréquences des salaires suivant la catégorie professionnelle de l'entreprise E_2.
c) Donner le pourcentage, arrondi à l'unité, des cadres de l'entreprise E_2 par rapport aux employés.
③ Dans les calculs qui suivent, les salaires seront exprimées (en DT) et arrondis à l'unité.
a) Calculer les moyennes des salaires S_1 et S_2 respectivement dans les entreprises E_1 et E_2.
b) Calculer les moyennes des salaires des ouvriers O_1 et O_2 respectivement dans les entreprises E_1 et E_2.
c) Calculer les moyennes des salaires des cadres C_1 et C_2 respectivement dans les entreprises E_1 et E_2.
④ Le chef de chaque entreprise prétend que ses employés sont mieux payés. Lequel a raison ?

Quartiles

Activité 3

Le tableau ci-contre indique pour chaque gouvernorat la densité de la population en 2004 c'est-à-dire le nombre d'habitants par Km^2.

Les gouvernorats sont regroupés géographiquement en 7 régions. On se propose de les regrouper suivant leurs densités de population.

On considère la série statistique (S) dont la population est l'ensemble des gouvernorats de la Tunisie et de caractère la densité de population.

① Déterminer la plus forte et la plus faible densité. En déduire l'étendue de cette série.

② a) Calculer la moyenne de cette série.

b) Quel est le pourcentage, arrondi à l'unité, des gouvernorats qui ont une densité supérieure à la moyenne ?

③ a) Organiser la série (S) suivant l'ordre croissant de ses valeurs.

b) En déduire la valeur de la densité médiane (On la note m).

④ La médiane m, divise la série (S) en deux séries S_1 et S_2 de même effectif:

S_1 est la série dont la population est l'ensemble des gouvernorats de densité inférieure à la médiane.

S_2 est la série dont la population est l'ensemble des gouvernorats dont la densité supérieure à la médiane.

a) Déterminer la médiane m_1 de la série S_1.

b) Déterminer la médiane m_2 de la série S_2.

(Source : INS)

	Gouvernorat	Densité de la population
District de Tunis	Tunis	2767
	Ariana	1186
	Ben Arous	640
	Mannouba	279
Nord Est	Nabeul	246
	Zaghouan	58
	Bizerte	147
Nord Ouest	Béja	87
	Jendouba	135
	Le Kef	54
	Siliana	52
Centre Est	Sousse	204
	Monastir	445
	Mahdia	128
	Sfax	113
Centre Ouest	Kairouan	83
	Kasserine	50
	Sidi Bouzid	56
Sud Est	Gabes	47
	Mednine	51
	Tataouine	4
Sud Ouest	Gafsa	37
	Tozeur	21
	Kébili	7

La médiane M_e est la valeur telle que 50% de la population étudiée prend une valeur inférieure ou égale à M_e, et 50% prend une valeur supérieure ou égale à M_e.

Pour déterminer la médiane d'une série à valeurs discrètes :

On classe les individus suivant les valeurs du caractère dans l'ordre croissant.

- Si l'effectif total N est impair, la médiane est la valeur de l'individu de rang $\frac{N+1}{2}$.
- Si l'effectif total N est pair, la médiane est la valeur moyenne des deux individus de rang $\frac{N}{2}$ et $\frac{N}{2}+1$.

⑤ Déterminer le pourcentage des gouvernorats qui ont :

a) Une densité inférieure à m_1.

b) Une densité comprise entre m_1 et m.

c) Une densité comprise entre m et m_2.

d) Une densité supérieure à m_2.

- m_1 s'appelle le premier quartile.
- m_2 s'appelle le deuxième quartile.

⑥ Préciser la position de votre gouvernorat par rapport aux quartiles.

Activité 4

Une enquête est effectuée pour étudier le temps consacré au transport, par jour, par les 1312 employés d'une usine.
Les résultats, regroupés en classes de même amplitude (30 minutes), sont indiqués dans le tableau ci-contre :

Classe	Effectif
[0,30[	175
[30,60[	392
[60,90[	267
[90,120[	127
[120,150[	168
[150,180[	120
[180,210[	63

① Calculer la moyenne de cette série statistique.

② a) Déterminer le nombre des ouvriers qui consacrent, chaque jour, moins de 30 minutes au transport.

b) Déterminer le nombre des ouvriers qui consacrent, chaque jour, moins de 60 minutes au transport.

Dans le cas d'une population répartie en classes, on suppose que dans chaque classe les effectifs sont répartis de manière régulière. Ainsi pour calculer une valeur approximative de la moyenne, on remplace chaque classe par son centre.

③ Le tableau des effectifs cumulés croissants est :

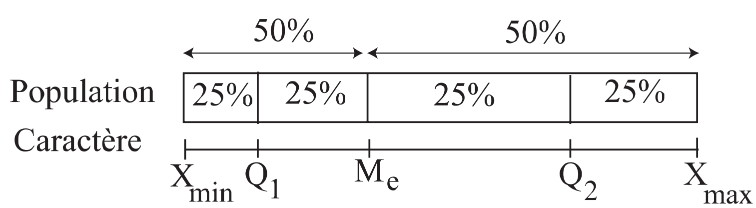
Temps (en minutes) de transport inférieur à	Effectifs cumulés croissants
30	175
60	567
90	834
120	961
150	1129
180	1249
210	1312

a) Déterminer le pourcentage, arrondi à l'unité, des ouvriers qui consacrent un temps inférieur ou égal à 180 minutes par jour.
b) Former le tableau des pourcentages cumulés croissants, arrondi à l'unité.

④ a) Placer dans un repère orthogonal, les points de coordonnées (0,0), (30,13), (60,43), (90,64), (120,73), (150,86), (180,95) et (210,100).
(On pourra choisir 1 cm pour 30 minutes en abscisse et 1 cm pour 10 individus en ordonnée)
b) En déduire le polygone des fréquences cumulées croissantes (exprimées en pourcentages).
⑤ Déterminer graphiquement Q_1, m et Q_2 les abscisses respectives des points de la courbe des pourcentages cumulés croissants d'ordonnées respectives 25, 50 et 75.
Que représentent les nombres Q_1, m et Q_2 pour cette série statistique ?

Le polygone des fréquences cumulées croissantes (exprimées en pourcentage) est la ligne brisée joignant les points M_i (x_i ; p_i) où x_i est une borne de la classe et p_i la somme des pourcentages des valeurs inférieures à cette borne x_i.

■ Le premier quartile Q_1 est la valeur telle que le quart de la population prend une valeur inférieure ou égale à Q_1.
■ Le troisième quartile est la valeur telle que les trois quarts de la population prennent une valeur inférieure ou égale à Q_3.



L'intervalle [Q_1Q_2] s'appelle intervalle interquartile.

Remarque

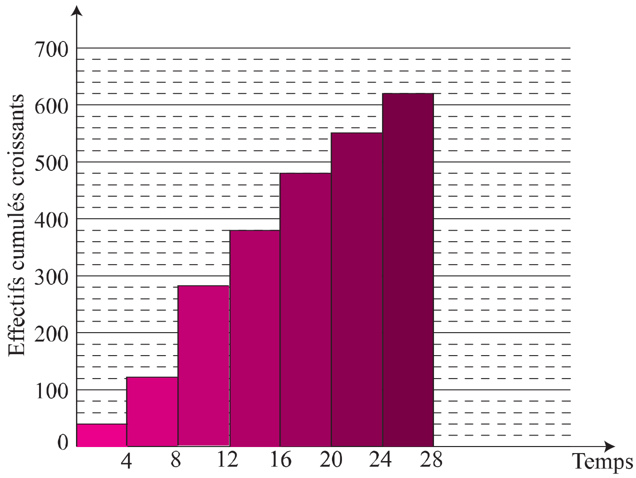
La médiane d'une série statistique est le deuxième quartile de cette série.

Activité 5

Le graphique ci-contre est l'histogramme des effectifs cumulés croissants indiquant la répartition de 620 élèves d'un lycée suivant le temps, en heures, consacré chaque semaine à regarder la télévision.
On suppose que dans chaque classe les effectifs sont répartis de manière régulière.

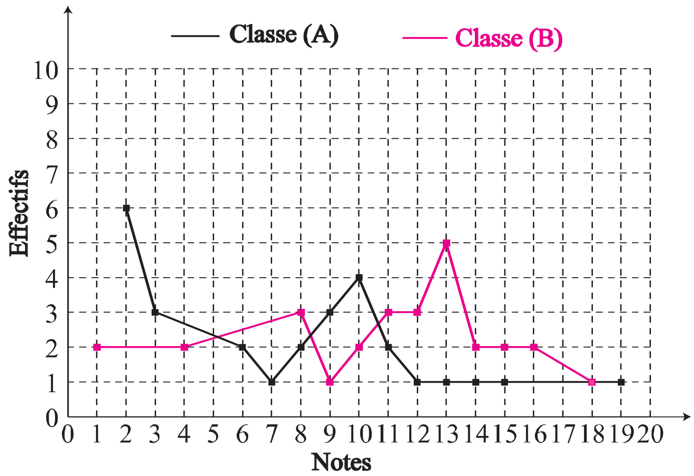
① Déterminer graphiquement la médiane et les quartiles.

② Dans quel quartile vous situez-vous ?



Activité 6

Les deux polygones suivants représentent les notes en mathématiques des élèves de deux classes (A) et (B).



① Déterminer le mode de chacune des séries.

② Quelle est la moyenne des notes de chaque série ?

③ a) Représenter le polygone des fréquences cumulées croissantes de chacune des séries.

b) Déterminer la médiane et les quartiles de chacune des deux séries.

c) Indiquer, pour chacune des deux séries, le pourcentage des élèves qui ont obtenu une note strictement inférieure à la moyenne des notes.

④ a) Quelle est la proportion des élèves en difficulté (note inférieur à 7) dans chacune des deux classes ?

b) Quelle est la proportion des élèves excellents (note supérieure à 16) dans chacune des deux classes ?

Activité 7

Les notes de 20 élèves en gestion sont : 11 ; 7 ; 2 ; 14 ; 4 ; 16 ; 17 ; 3 ; 18 ; 3 ; 19 ; 6 ; 6 ; 16 ; 8 ; 13 ; 12 ; 8 ; 6 ; 15.

① Entrer ces valeurs dans la colonne A d'un classeur Excel.

② Entrer, dans la cellule A21, la fonction =QUARTILE(A1:A20 ; 1), puis appuyer sur « Enter ».

Le nombre apparu dans la cellule A21 représente le premier quartile de cette série statistique.

③ Entrer, dans la cellule A22, la fonction =QUARTILE(A1:A20 ; 2), puis appuyer sur « Enter ».

Le nombre apparu dans la cellule A22 représente le deuxième quartile de cette série statistique.

④ Déterminer dans la cellule A23 le troisième quartile de cette série.

Ecart type

Activité 8

Le tableau ci-contre indique les températures notées respectivement t et t', durant cinq jours consécutifs en hiver dans deux villes A et B.

(t_i)	0	3	2	6	4
(t'_i)	-2	1	3	8	5

① a) Calculer t_A la température moyenne durant les cinq jours pour la ville A.

b) Calculer t'_B la température moyenne durant les cinq jours pour la ville B.

② a) Sur une droite graduée, placer les points d'abscisses les températures relevées dans la ville A ainsi que le point M d'abscisse t_A.

b) Sur la même droite et avec une autre couleur, placer les points d'abscisses les températures relevées dans la ville B ainsi que le point N d'abscisse t'_B.

c) Comparer graphiquement la dispersion des valeurs prises par les températures de chaque ville par rapport à sa température moyenne.

③ On donne les nombres :

$$V_A = \frac{(t_1 - t_A)^2 + (t_2 - t_A)^2 + (t_3 - t_A)^2 + (t_4 - t_A)^2 + (t_5 - t_A)^2}{5}$$

$$V_B = \frac{(t'_1 - t'_B)^2 + (t'_2 - t'_B)^2 + (t'_3 - t'_B)^2 + (t'_4 - t'_B)^2 + (t'_5 - t'_B)^2}{5}$$

a) Calculer $\sqrt{V_A}$ et $\sqrt{V_B}$.

b) Les résultats trouvés confirment-ils la réponse de la question ② c).

Activité 9

Le tableau ci-contre indique le nombre des jours d'absences des ouvriers d'un même atelier qui sont répartis en deux équipes A et B.

① Par une lecture du tableau :

a) Peut-on prévoir pour quelle équipe le nombre moyen de jours d'absences est le plus élevé ?

b) Peut-on prévoir dans quel cas la dispersion est la plus grande.

Nombre de jours d'absences	Nombre d'ouvriers de l'équipe A	Nombre d'ouvriers de l'équipe B
0	24	15
1	4	7
2	7	11
3	0	6
4	0	0
5	1	0
6	0	0
7	2	0
8	2	1

② On désigne par S_A la série statistique correspondante à l'équipe A et par S_B la série statistique correspondante à l'équipe B.

a) Déterminer l'étendue et le mode de chacune des deux séries S_A et S_B.

b) Calculer $\overline{X}$ et $\overline{Y}$ les nombres moyens respectifs de jours d'absences, arrondis à l'unité, pour chaque équipe.

c) Calculer les nombres σ_A et σ_B définis comme suit :

$$. \ \sigma_A = \sqrt{\frac{24\,(0 - \overline{X})^2 + 4\,(1 - \overline{X})^2 + 7\,(2 - \overline{X})^2 + (5 - \overline{X})^2 + 2\,(7 - \overline{X})^2 + 2\,(8 - \overline{X})^2}{40}} \, .$$

$$. \ \sigma_B = \sqrt{\frac{15\,(0 - \overline{Y})^2 + 7\,(1 - \overline{Y})^2 + 11\,(2 - \overline{Y})^2 + 6\,(3 - \overline{Y})^2 + (8 - \overline{Y})^2}{40}} \, .$$

③ Si le chef de l'atelier a à choisir entre les deux équipes pour le trimestre suivant, laquelle choisirara-t-il ? justifier.

Soit la série statistique donnée par le tableau suivant :

Valeurs du caractère	x_1	x_2	.........x_p
Effectif	n_1	n_2	.........n_p

Notons N l'effectif total de cette série statistique.

- La moyenne de cette série est le réel, noté $\overline{X}$ et donné par la formule $\overline{X} = \dfrac{n_1 x_1 + n_2 x_2 + \ldots + n_p x_p}{N}$.
- L'écart type σ de cette série est le réel positif dont le carré est égal à $\sigma^2 = \dfrac{n_1 (x_1 - \overline{X})^2 + n_2 (x_2 - \overline{X})^2 + \ldots + n_p (x_p - \overline{X})^2}{N}$

Remarque

Intuitivement, on peut se rendre compte que σ est d'autant plus grand quand les x_i s'écartent d'avantage de la moyenne $\overline{X}$. Ainsi l'écart type d'une série statistique est une mesure de dispersion liée à la moyenne.

Activité 10

Une machine remplit automatiquement des bouteilles d'eau minérale. On prélève un échantillon de 100 bouteilles, après mesure de la quantité d'eau contenue dans chacune d'elles, on obtient le tableau ci-contre.

① Calculer la moyenne $\overline{X}$ et l'écart type σ de cette série statistique.

② On convient que la machine est bien réglée, si la moyenne de cette série est supérieure à 1503 millilitres et son écart type est inférieur à 1,5. Est-ce le cas ?

Quantité d'eau (en millilitres)	Nombre de bouteilles
[1496,1498[	2
[1498,1500[	4
[1500,1502[	20
[1502,1504[	38
[1504,1506[	28
[1506,1508[	8

Activité 11

Le tableau ci-contre indique les températures moyennes par mois pour les villes de Gabès et de Gafsa relevées pendant une année.

Mois	Gabès	Gafsa
Janvier	7	3
Février	12	8
Mars	14	12
Avril	16	16
Mai	20	24
Juin	24	27
Juillet	28	32
Aout	31	35
Septembre	24	24
Octobre	20	18
Novembre	16	12
Décembre	14	8

① Entrer ce tableau dans un classeur de tableur Excel comme il est représenté (dans la cellule A1 on écrit Mois…).

② a) Ecrire dans la cellule A14 « Moyenne ».

b) Entrer dans la cellule B14 la fonction =MOYENNE (B2 :B13) puis appuyer sur « Enter ».

Que représente la valeur apparue dans la cellule B14 ?

c) Sélectionner B14 et faire apparaître la croix noire en bas et à droite de la cellule, puis tirer le calcul vers C14.

Que représente la valeur apparue dans la cellule C14 ?

③ a) Ecrire dans la cellule A15 « Ecart type ».

b) Entrer dans la cellule B15 la fonction =ECARTYPEP (B2 :B13) puis appuyer sur « Enter ».

Que représente la valeur apparue dans la cellule B15 ?

c) utiliser la même technique que la question ② c) pour déterminer, dans la cellule C15, l'écart type des températures de la région de Gafsa.

d) Interpréter.

Activité 12

① On donne la série statistique ci-contre :

x_i	1	2	3	6
n_i	3	8	12	7

On désire calculer la moyenne et l'écart type de cette série à l'aide d'une calculatrice.

Sur les calculatrices « SHARP EL-506V et EL-546V » pour effectuer des calculs statistiques, choisissez le mode de fonctionnement approprié au moyen de la combinaison $\boxed{\text{2ndF}}$ $\boxed{\text{MODE}}$ $\boxed{3}$

Lorsque vous changez vers le sous mode statistique, appuyer sur la touche

0	pour choisir « STAT 0 » (Statistique à une variable).

- pour entrer les données taper : | 1 | STO | 3 | M⁺ |

1	STO	3	M^+
2	STO	8	M^+
3	STO	12	M^+
6	STO	7	M^+

- Pour afficher la moyenne de cette série taper : RCL X
- Pour afficher l'écart type de cette série taper : RCL σ_x
- Pour afficher l'effectif total de cette série taper : RCL n

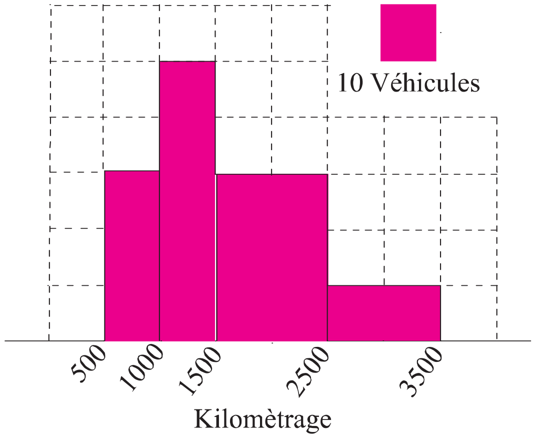
② Choisir une autre série statistique et déterminer sa moyenne et son écart type à l'aide d'une calculatrice.

Classes d'amplitudes inégales

Activité 13

L'histogramme ci-dessous donne la répartition des véhicules d'une société suivant les distances parcourues durant un mois :

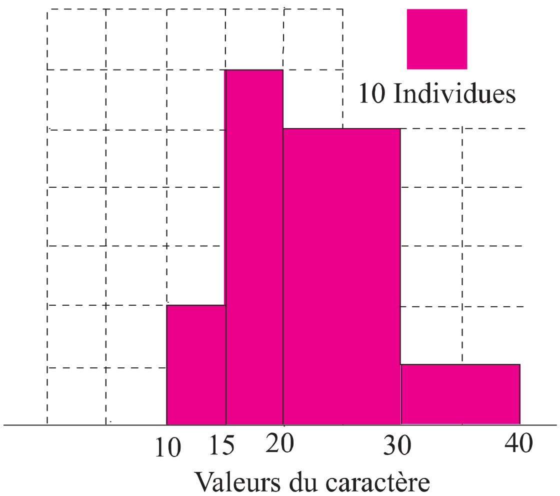
> Dans le cas où les classes n'ont pas toutes la même amplitude, l'effectif de chaque classe est proportionnel à l'aire du rectangle correspondant, il suffit donc de choisir une unité d'aire dans le plan et non pas une unité de longueur sur l'axe des effectifs.



① Combien de véhicules ont parcouru plus que 2500 Km ?
② a) Déterminer le nombre de véhicules dans cette société.
b) Calculer la distance moyenne parcourue durant ce mois.

Activité 14

Une distribution statistique est représentée par l'histogramme ci-contre.



① Retrouver le tableau statistique de la distribution correspondant à cet histogramme.

② Déterminer le mode de cette série.

Activité 15

On effectue des essais sur un échantillon de deux cent lampes électriques afin de tester leur durée de vie. Les résultats sont regroupés dans le tableau ci-contre :

Durée de vie en heures	Effectif
[1100,1200[	5
[1200,1300[	10
[1300,1400[	25
[1400,1500[	75
[1500,1600[	70
[1600,1700[	5
[1700,2200[	10

① a) Construire l'histogramme des effectifs de cette série statistique.

b) Calculer la moyenne $\overline{X}$ et l'écart type σ_X de cette série.

② a) Tracer la courbe des effectifs cumulés croissants.

b) Déduire graphiquement une valeur approchée de la médiane.

③ Un autre lot de lampes électriques de même puissance provenant d'un autre fabriquant est également testé.

La moyenne de durée de vie est de 1450 heures, l'écart type est 150 et la médiane est de 1650.

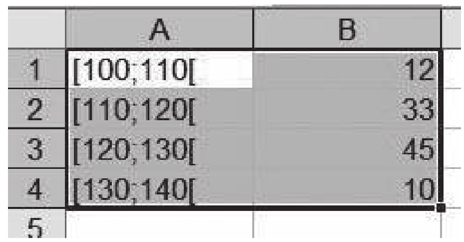
Quel est le lot qui vous semble être le meilleur ?

Activité 16

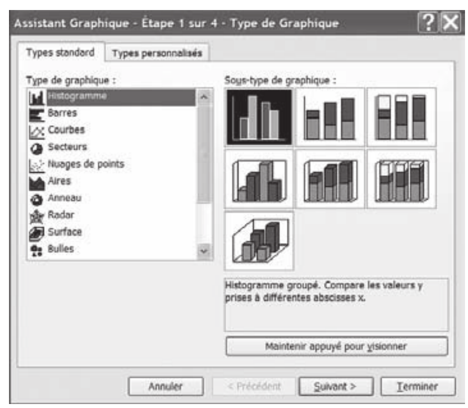
Le tableau ci-contre indique la taille en cm de 100 enfants de 5 à 7 ans.

Taille	Nombre d'enfants
[100,110[	12
[110,120[	33
[120,130[	45
[130,140[	10

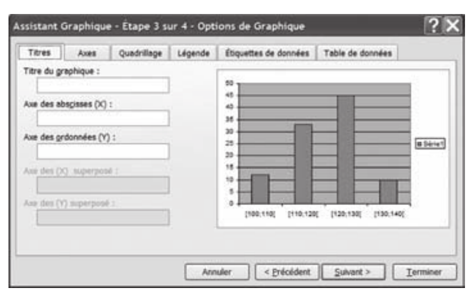
① Entrer dans un classeur du tableur Excel les données de cette série statistique puis sélectionner ces données comme l'indique la figure ci-contre.



② -Pour construire l'histogramme de cette série cliquer sur le bouton de la barre d'outils.
- Sélectionner « type de graphique » / Histogramme et choisir l'icône représentée dans la figure ci-contre.
- Cliquer « suivant » puis « suivant ».



- Vérifier que l'on obtient l'affiche ci-contre.
- Choisir les options de graphique désirées.
- Cliquer « suivant » puis « Terminer ».
On obtient le graphique que vous pouvez transporter à un fichier Word et l'améliorer suivant votre besoin.



II. Dénombrement

Activité 1

Une chaîne de cinq magasins A, B, C, D et E décide d'ouvrir ses magasins en nocturnes avec les contraintes suivantes :
- Les deux premiers magasins ne peuvent pas être ouverts ensemble ;
- il en est de même pour les deux derniers ;
- Au plus un seul magasin peut être ouvert parmi les magasins A, C et D.

① a) Représenter, sur un cercle, chaque magasin par un point.
b) Relier par un segment deux magasins ne pouvant être ouverts ensemble.
② a) Si on décide d'ouvrir le magasin A, quel autre magasin peut-on ouvrir la même nuit ?
b) Si on décide d'ouvrir le magasin C, quels autres magasins peut-on ouvrir la même nuit ?
c) Déterminer le nombre maximal de magasins qu'on peut ouvrir la même nuit.

Activité 2

On veut organiser un examen comportant, outre les matières communes, six matières d'options : français, anglais, mécanique, dessin industriel, internet et sport.
Les profils des candidats à options multiples sont : {Français, Anglais, Mécanique}, {Dessin industriel, Sport}, {Internet, Sport}, {Internet, Méanique}.
① Représenter sur un cercle chaque option par les points : F pour français, A pour anglais, M pour mécanique, D pour dessin industriel, I pour internent, S pour sport.
② Relier deux matières par un segment si elles sont choisies par un même candidat.
③ Une épreuve occupe une journée. Si l'option F est programmée la première journée J_1 alors :
a) Quelles autres options peut-on programmer en J_1 ?
b) Déterminer alors toutes les répartitions possibles pour que toutes les options soient passées en un nombre minimum de journées.

Activité 3

On doit relier cinq sites informatiques A , B , C , D et E par un câble spécial de sorte que chaque site soit relié a chacun des autres.
Déterminer le nombre de câbles à installer.

Activité 4

Le tronc d'un arbre se ramifie en trois grosses branches, chaque grosse branche se ramifie en trois branches moyennes, chaque branche moyenne se ramifie en quatre fines branches, chaque fine branche produit cinq fruits.

① a) Dessiner le tronc et les grosses branches de cet arbre.
b) Choisir une grosse branche et dessiner ses branches moyennes.
c) Choisir une branche moyenne et dessiner ses fines branches.
d) Choisir une fine branche et représenter ses fruits.

② a) Quel est le nombre total des branches moyennes de cet arbre ?
b) Quel est le nombre total des branches fines de cet arbre ?

③ Sachant que six fruits de cet arbre pèsent en moyenne 1 Kg, quelle est la production moyenne en Kg de cet arbre ?

Activité 5

Au self service d'un restaurant, le client a le choix entre trois entrées (E_1, E_2 et E_3), le choix entre deux plats (P_1 et P_2) et le choix entre quatre desserts (d_1, d_2, d_3 et d_4).

① Un client choisit l'entrée E_1. Représenter par des branches tous les choix des plats puis les choix des desserts.

② Déterminer le nombre de tous les menus possibles. (Un menu comporte une entrée, un plat et un dessert).

Activité 6

Cinq équipes de football participent à un tournoi. Chaque équipe rencontre chacune des autres équipes une seule fois.
Déterminer le nombre de matchs.

Activité 7

Le code Pin comporte quatre chiffres choisis parmi les chiffres de 0 à 9.

① Combien y-a-t-il de possibilités d'avoir un code différent ?

② Combien y-a-t-il de possibilités d'avoir un code différent dont les chiffres sont deux à deux distincts ?

Activité 8

Une étude s'intéresse aux défauts constatés sur le freinage et l'éclairage de 400 véhicules.
Le responsable du test de freinage a noté que 6 des 400 véhicules présentent un défaut de freinage.

Le responsable du test d'éclairage a noté que 14 des 400 véhicules présentent un défaut d'éclairage.
Une récapitulation permet de plus, de constater que 15 véhicules présentaient à la fois un défaut de freinage et un défaut d'éclairage.
① Combien de véhicules présentent-ils un défaut de freinage et pas de défaut d'éclairage ?
② Combien de véhicules présentent-ils un défaut d'éclairage et pas de défaut de freinage ?
③ Combien de véhicules n'ont aucun de ces deux défauts ?
④ Combien de véhicules ont au moins un des deux défauts ?

III. Expérience aléatoire et simulation

Activité 1

Lorsqu'on lance une pièce de monnaie, on obtient soit pile (le côté sur lequel est indiquée la valeur de la pièce) soit face.
On dit que la pièce est non truquée s'il y a théoriquement autant de chances de voir apparaître pile que de voir apparaître face.

> Lorsqu'on lance une pièce de monnaie non truquée il est impossible de prévoir le résultat, on dit que le résultat est aléatoire. L'expérience telle que lancer une pièce de monnaie est appelée expérience aléatoire.

① Lancer une pièce de monnaie et noter le résultat par P si on obtient pile et par F si on obtient face.
② a) Répéter l'expérience précédente 20 fois et organiser les résultats dans un tableau.
b) Calculer la fréquence d'apparition de « Pile ».
c) L'hypothèse « On a autant de chances de voir apparaître P que de chances de voir apparaître F » est-elle confirmée ?
③ a) Regrouper dans un même tableau les résultats obtenus par tous les élèves de votre classe.
b) Quelle est la nouvelle fréquence d'apparition de « Pile » ?
c) L'hypothèse « On a autant de chances de voir apparaître P que de chances de voir apparaître F » est-elle confirmée ?

Activité 2

On lance deux pièces de monnaie non truquées (l'une de 100 millimes, l'autre de 50 millimes). Chacune des pièces peut présenter « Pile » ou « Face ».
① a) Déterminer tous les résultats possibles.
b) L'expérience est-elle aléatoire?

② A chaque lancer des deux pièces, on associe le nombre de fois ou « Pile » apparaît, c'est-à-dire 0,1 ou 2.

a) Répéter l'expérience 20 fois et former le tableau des fréquences d'apparition des résultats 0,1 et 2.

b) Soit les hypothèses :

H_1 : « On a autant de chances d'apparitions de 0 Piles que de 2 Piles »

H_2 : « On a deux fois plus de chances d'apparitions de 1 Pile que de 2 Piles »

H_1 et H_2 sont-elles confirmées ?

③ Le tableau ci-contre recense les résultats de cinq expériences de 1000 lancers de deux pièces.

Résultat	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5
0	201	403	268	152	340
1	420	380	532	600	411
2	379	217	200	248	249
Total	1000	1000	1000	1000	1000

a) Les résultats de chaque expérience confirment-ils les hypothèses H_1 et H_2 ?

b) Former un tableau où les résultats seront cumulés :

Dans la colonne 1, reporter les résultats de l'expérience 1. Dans la colonne 2, écrire les sommes des résultats des expériences 1 et 2. Dans la colonne 3, les sommes des résultats des expériences 1,2 et 3. Et ainsi de suite jusqu'à la colonne 5 ou figure les sommes des résultats de toutes les expériences (total 5000 lancers).

Déterminer les fréquences d'apparitions des résultats 0,1 et 2 dans chaque colonne.

Les résultats de la colonne 5 confirment-ils les Hypothèses H_1 et H_2 ?

Activité 3

Lorsqu'une punaise tombe elle se trouve dans l'une des deux positions $\perp$ .
Codons 0 la première et 1 la seconde. En laissant tomber cinquante fois la punaise on obtient la suite :

11100011011011101110011011101011000110011010011110

Déterminer la fréquence de chaque position et représenter la situation par un diagramme circulaire.

Activité 4

Lorsqu'on lance un dé cubique, il apparaît un chiffre de 1 à 6.
Le but de cette activité est de tester « l'honnêteté » d'un dé cubique.

① Le tableau ci-contre donne les résultats de 20 lancers d'un dé cubique.

1	6	2	2
2	4	3	1
3	1	6	2
2	6	1	6
4	3	2	3

a) Déterminer la fréquence d'apparition de chaque face.

b) Peut-on déduire que le dé est truqué ?

② Le tableau ci-contre recense les résultats de 200 lancers de ce même dé.
a) Déterminer la fréquence d'apparition de chaque face.
b) Peut-on déduire que le dé est truqué ?

Numéro	1	2	3	4	5	6
Nombre de sorties	24	40	28	34	36	38

③ Les deux tableaux ci-contre donnent deux séries de 1000 lancers effectués avec le dé précédent.
Que peut-on penser de ce dé ?

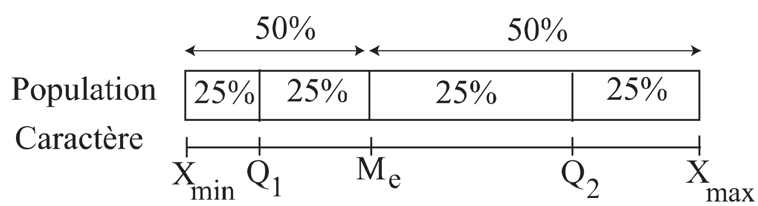
Numéro	1	2	3	4	5	6
Fréquence	0.139	0.143	0.146	0.143	0.145	0.284

Numéro	1	2	3	4	5	6
Fréquence	0.135	0.147	0.148	0.141	0.136	0.293

• La médiane M_e est la valeur telle que 50% de la population étudiée prend une valeur inférieure ou égale à M_e, et 50% prend une valeur supérieure ou égale à M_e.

• Le premier quartile Q_1 est la plus petite valeur telle que au moins le quart de la série prend une valeur inférieure ou égale à Q_1.

• Le troisième quartile est la plus petite valeur telle que au moins les trois quarts de la série prennent une valeur inférieure ou égale à Q_3.



L'intervalle $[Q_1 Q_2]$ s'appelle intervalle interquartile.

• Soit la série statistique donnée par le tableau suivant :

Valeurs du caractère	x_1	x_2	.........x_p
Effectif	n_1	n_2	.........n_p

Notons N l'effectif total de cette série statistique.

• La moyenne de cette série est le réel, noté $\overline{X}$ donné par la formule

$$\overline{X} = \frac{n_1 x_1 + n_2 x_2 + \dots + n_p x_p}{N}$$

• L'écart-type σ de cette série est le réel positif dont le carré σ^2 est égal à

$$\sigma^2 = \frac{n_1 (x_1 - \overline{X})^2 + n_2 (x_2 - \overline{X})^2 + \dots + n_p (x_p - \overline{X})^2}{N}$$

1. Lors d'une étude de la quantité des eaux destinées à la consommation, on analyse le contenu de 60 flacons dont on détermine la concentration en nitrates.
Le tableau ci-contre résume les résultats de l'analyse :

Concentration en (milligrammes par litre)	Nombre de flacons
45,8	1
46,6	9
47	2
47,5	10
48,2	9
49,2	10
49,5	7
50	7
50,1	3
50,2	2

① Calculer la moyenne et l'écart type de cette série (les résultats seront arrondis au centième).
② Pour que l'eau soit potable, sa concentration en nitrates doit être inférieure ou égale à 50 milligrammes par litre.
Quel est le pourcentage de flacons contenant de l'eau impropre à la consommation ?

2. Les 31 élèves d'une classe ont obtenu les notes suivantes en mathématiques :

Notes	7	8	9	10	11	12	13	14
Effectifs	1	5	4	12	5	3	0	1

① Construire le diagramme en bâtons des effectifs de cette série.
② Déterminer une valeur approchée à 10^{-2} près de la moyenne $\overline{X}$ et de l'écart type σ de cette série statistique.
③ Déterminer le pourcentage de notes appartenant à l'intervalle $[\overline{X}-\frac{1}{2}\sigma, \overline{X}+\frac{1}{2}\sigma]$.

3. Une étude a été faite sur la concentration en hémoglobine du sang des femmes. On considère qu'une femme en bonne santé a une concentration en hémoglobine comprise entre 13,2 grammes par 100 millilitres et 15,4 grammes par 100 millilitres.
On a relevé sur un échantillon de 100 femmes les résultats ci-contre :

Concentration en hémoglobine (g/ 100 ml)	Effectifs
[5,7[	1
[7,9[	5
[9,11[	10
[11,13[	18
[13,15[	25
[15,17[	31
[17,19[	8
[19,21[	2

Donner une valeur approchée de la moyenne des concentrations en hémoglobine de ces femmes.
Cette moyenne correspond-elle à un état de bonne santé ?

4. Le responsable d'un magasin de vêtements a relevé, pendant une semaine, le montant (en DT) des achats de chacun de ses 200 clients.
Les résultats figurent dans le tableau ci-contre :

Montant des achats	Effectifs
[50,150[	10
[150,250[	22
[250,350[	52
[350,450[	62
[450,550[	36
[550,650[	14
[650,750[	4

① a) Ecrire le tableau des fréquences cumulées croissantes (exprimées en pourcentage) de cette série statistique.
b) Quel est le pourcentage des clients dont le montant des achats est situé dans l'intervalle [250,550[?
② a) Représenter l'histogramme des fréquences cumulées croissantes. (On prendra comme unités 1 cm pour 50 DT sur l'axe des abscisses, et 1 cm pour 10% sur l'axe des ordonnées).
b) On admet que les achats des clients sont répartis dans chaque classe de manière uniforme. On peut alors remplacer l'histogramme précédent par la ligne brisée joignant le point d'abscisse 50, d'ordonnée 0 et le point d'abscisse 750, d'ordonnée 100 tout en passant par chacun des sommets supérieurs droits des rectangles de l'histogramme. Tracer cette ligne brisée.
c) On se propose de déterminer le pourcentage de clients ayant effectué un achat inférieur ou égal à 500 DT.
Soit R et N les points de la ligne brisée de coordonnées respectives (450 ; 73) et (550 ; 91).
Soit M le point du segment [RN] d'abscisse 500. Le pourcentage de clients ayant effectué un achat inférieur ou égal à 500 DT est l'ordonnée du point M. Déterminer ce pourcentage.
③ Calculer la moyenne $\overline{X}$, l'écart σ de la série par lecture du graphique précédent, estimer le pourcentage de clients dont le montant des achats appartient à l'intervalle $\left[\overline{X} - \sigma , \overline{X} + \sigma\right]$.

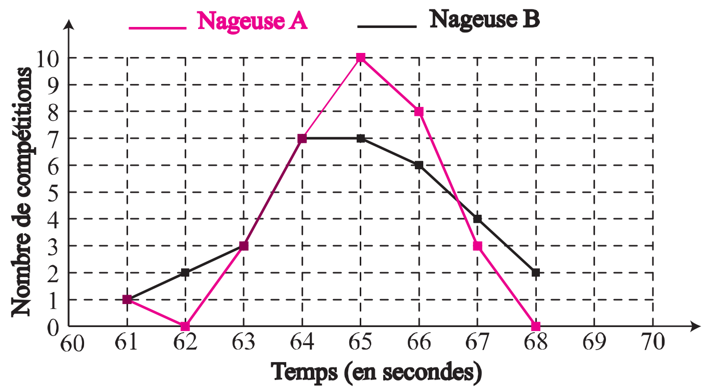
5. Un centre de remise en forme a noté le poids perdu par ses clients en 3 mois.

Poids perdu en kg	- de 4	[4 ; 6[	[6 ; 8[	[8 ; 10[	+ de 10
Nombre de clients	24	16	8	5	7

① Construire l'histogramme (on prendra arbitrairement $[2 ; 4[$ et $[10 ; 12[$ pour les classes extrêmes).
② Construire le polygone des effectifs cumulés croissants et déterminer la médiane de la série. Traduire par une phrase la signification du nombre trouvé.

③ Calculer $\overline{X}$, l'amaigrissement moyen en 3 mois, et l'écart type σ , puis, à l'aide du graphique, déterminer approximativement le nombre et le pourcentage de clients dont le poids perdu appartient à $[\overline{X} - \sigma \, ; \overline{X} + \sigma]$.

6. Deux nageuses A et B ont participé à 32 compétitions de natations (100 mètres nage libre). Les deux polygones suivants représentent le nombre de compétitions de chacune des deux nageuses en fonction du temps mis.



① Calculer pour chacune des nageuses A et B le temps moyen et l'écart type.
② Quelle est la nageuse qui semble la plus régulière ?

7. Une machine fabrique des fers cylindriques de diamètre théorique 25 mm.
On contrôle le fonctionnement de la machine en prélevant un échantillon de 100 pièces au hasard dans la fabrication.
Les diamètres mesurés sont donnés par le tableau ci-contre :

Classes par diamètres	Effectifs
[24,0 ; 24,2[	0
[24,2 ; 24,4[	5
[24,4 ; 24,6[	13
[24,6 ; 24,8[	24
[24,8 ; 25,0[	19
[25,0 ; 25,2[	14
[25,2 ; 25,4[	10
[25,4 ; 25,6[	8
[25,6 ; 25,8[	5
[25,8 ; 26,0[	2

① Calculer la moyenne arithmétique $\overline{X}$ et l'écart type σ de la série statistique obtenue.
② La production de la machine est jugée bonne si la série des mesures de l'échantillon remplit les trois conditions suivantes :
- La moyenne $\overline{X}$ appartient à l'intervalle [24,9 ; 25,1].
- L'écart type σ est strictement inférieur à 0,4.
- 90%, au moins, de l'effectif figure dans l'intervalle $[\overline{X} - 2\sigma \, ; \overline{X} + 2\sigma]$.
La production de la machine est-elle bonne ?

8. Un fabricant de chaussures pour hommes s'interroge sur l'organisation de la chaîne de fabrication. Il veut à la fois éviter d'être en rupture de stock sur une pointure qui se vend fréquemment, et ne pas investir sur la fabrication de pointures trop rares.
Un sondage, sur 250 hommes adultes choisis au hasard, donne la répartition des pointures suivantes :

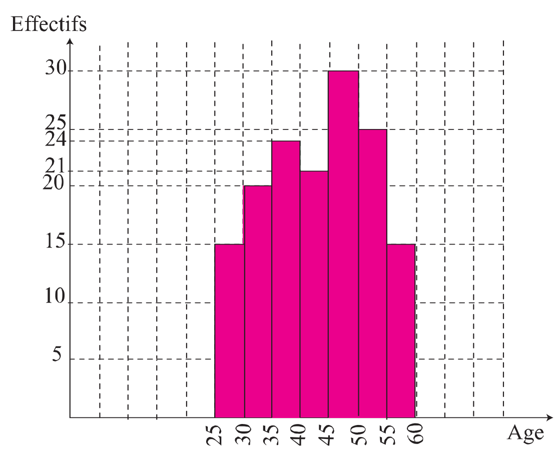
Pointure	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48
Nombre d'hommes	1	4	21	34	48	55	42	37	7	0	1

① Déterminer l'étendue des pointures et la pointure médiane de cet échantillon.
Si on ne comptabilisait pas les deux valeurs extrêmes, que deviendraient l'étendue et la médiane ?

② Quel pourcentage de l'échantillon représente les personnes interrogées qui chaussent du 42 au 44 ?

③ Pour des questions de coûts de fabrication, le fabricant ne veut pas investir dans la fabrication de chaussures dont la pointure ne dépasse pas 5% de la demande.
Si l'on se fie à cet échantillon, quelles pointures seront fabriquées ? Quel pourcentage de clients potentiels ne trouveront pas de chaussures à leurs pieds ?

9. Le diagramme ci-contre donne les résultats d'une enquête concernant l'âge des salariés d'une entreprise.



① Déterminer le nombre des salariés.

② Calculer l'âge moyen des salariés.

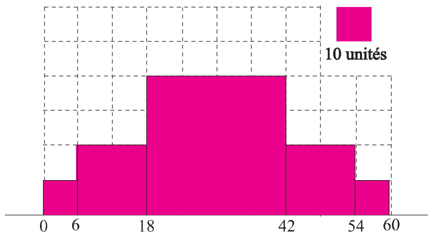
③ Calculer l'âge médian.

④ Calculer le nombre de salariés qui auront atteint l'âge de la retraite (60 ans) durant les dix prochaines années.

⑤ a) Représenter par un histogramme l'âge des salariées de l'entreprise dans 10 ans sachant que chaque départ en retraite est compensé par l'embauche d'un jeune de 25 ans et qu'il n y a pas de départ de l'entreprise autre que les retraités.

b) Quel sera dans dix ans l'âge moyen et l'âge médian ?

10. Une série statistique est représentée par l'histogramme ci-contre.
① Quel est l'effectif total ?
② Quelle est la moyenne ?



11. Un sondage auprès de 150 personnes a donné les résultats suivants :
A la question «Consommez vous régulièrement du café ?», 50 personnes répondent oui.
A la question «Êtes-vous fumeur ?», 80 personnes répondent oui.
A la question «Êtes-vous un fumeur consommant régulièrement du café ?», 35 personnes répondent oui.
① Combien de personnes sont des fumeurs ne consommant pas régulièrement du café?
② Combien de personnes consomment régulièrement du café et ne sont pas fumeurs ?
③ Combien de personnes ne sont pas fumeurs et ne consomment pas régulièrement du café ?

12. On s'intéresse à la présence sur les véhicules d'un parc automobile des trois options suivantes : ABS ; Air Bags ; Climatiseur.
On sait que : 7 véhicules ne sont munis d'aucune de ces options, alors que 18 véhicules sont munis des trois options .
Tous les véhicules munis d'un climatiseur sont munis aussi d'au moins une autre option.
305 véhicules disposent de deux options au moins.
298 véhicules disposent de l'ABS, 428 véhicules disposent d'air bags et 122 véhicules disposent des deux.
Enfin, 87 véhicules disposent de l'ABS et d'un climatiseur.
① Quel est le nombre total de véhicules de ce parc automobile ?
② Quel est le pourcentage de véhicules de ce parc disposant d'une et d'une seule option ?
③ Quel est le pourcentage de véhicules de ce parc disposant d'au plus une option ?

13. Un établissement propose à ses élèves le choix de langues vivantes suivant :
Anglais (A), Allemand (D), Espagnol (E), Italien (I), Russe (R).
Un élève doit choisir deux langues.
Dénombrer tous les choix possibles.

14. Un enfant possède 5 crayons de couleur : un rouge, un vert, un bleu, un jaune et un marron.
Il dessine un bonhomme et choisit : un crayon pour la tête, un crayon pour le corps et un crayon pour les membres.
Déterminer tous les choix possibles des trois crayons :
① En supposant qu'il peut utiliser la même couleur pour différentes parties.
② En supposant qu'il utilise toujours trois couleurs distinctes.

15. Un numéro de téléphone portable est formé de 8 chiffres dont le premier est 9 et le deuxième est 8 ou 7 ou 6 ou 5.
Combien de numéros de téléphone portable sont disponibles ?

16. Nour, Emna, Hcine, Khalil et Amir posent pour une photo, ils se placent côte à côte en alternant filles et garçons.
Représenter par un arbre de choix toutes les photos possibles.

17. Eya possède cinq jupes, trois chemisiers et deux chaussures. Combien de tenues peut - elle composer ?

18. Randa, Riadh, Nadia, Mouna et Ines cinq frères veulent s'asseoir sur un banc de cinq chaises.
① Combien y a-t-il de dispositions possibles.
② Les filles préfère que leur frère soit assis au milieu, combien y a-t-il de dispositions possibles ?

19. ① a) Quel est le nombre de dominos dans une boite de dominos ?
b) Calculer la somme de tous les nombres inscrits sur les dominos ?
② Soit n un entier naturel non nul, on considère les dominos dont les nombres de 0 à n sont inscrits. (pour n = 6 on obtient les dominos habituels)
Déterminer en fonction de n :
a) le nombre T_n de dominos dans une boite.
b) La somme S_n de tous les nombres inscrits sur les dominos.

Chapitre
5

Problèmes du premier degré à une inconnue

L'érosion sculpte les pierres suivant des lignes droites.
Connaît-elle les maths ?

Sommaire

POUR COMMENCER

« Plus on pédale plus vite, plus on avance plus vite.
Moins on pédale plus vite, plus on avance moins vite »

Albert Einstein

Dans la vie de tous les jours, il est fréquent d'entendre des expressions telles que :

- La consommation d'essence d'une voiture aux 100 km est fonction de la vitesse.

- L'évolution du chiffre d'affaires d'une entreprise est fonction du temps.

- Le coût de fabrication d'un bien est fonction du nombre d'unités fabriquées.

Dans toutes ces expressions « fonction de » signifie « dépend de », mais lorsqu'on dit par exemple que « le coût de fabrication d'un bien est fonction du nombre d'unités fabriquées », on reste très vague, on ne dit pas de quelle façon le coût dépend du nombre d'unités.
Les sciences, cherchent toujours à préciser la façon dont une grandeur dépend d'une autre :

- $C(n) = 50n + 1000$ (Coût de fabrication)
- $d = vt$ (Distance parcourue avec une vitesse constante v)

Parfois, une fonction n'est connue que par sa représentation graphique :

I. Fonctions affines

Activité 1

① Soit les fonctions affines f et g définies par $f(x) = 50x + 1000$ et $g(x) = 75x$.
Tracer dans un repère orthogonal les droites Δ_1 et Δ_2 représentations graphiques respectives de f et g.

- Dans un repère (O,I,J), l'ensemble des points M $(x, f(x))$ est appelé la représentation graphique de f.
- La représentation graphique d'une fonction affine $f : x \longmapsto ax + b$ est la droite d'équation $y = ax + b$.

② Dans une entreprise, le coût total de production d'un bien se compose :
- d'un coût fixe égal à 1000 DT,
- d'un coût variable égal à 50 DT par unité.

a) Calculer le coût total de production de 20 unités.
b) On note C_n le coût total de production de n unités. Exprimer C_n en fonction de n.
c) Justifier que les points de coordonnées (n, C_n) appartiennent à Δ_1.

③ Le prix de vente d'un exemplaire est égal à 75 DT. On note R_n le prix de vente de n unités.
Montrer que les points de coordonnées (n, R_n) appartiennent à Δ_2.

④ Déterminer graphiquement le nombre minimal d'unités qui doivent être vendues pour que l'entreprise réalise un bénéfice ?

Activité 2

Soit a et b deux réels, f la fonction affine définie par $f(x) = ax + b$ et Δ sa représentation graphique dans un repère (O,I,J). On considère deux points distincts $M_1(x_1,y_1)$ et $M_2(x_2,y_2)$ de la droite Δ.

① Montrer que $\dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = a$.

② Quel est l'ordonnée du point de la droite Δ d'abscisse 0 ?

Soit a et b deux réels, f la fonction affine définie par $f(x) = ax + b$ et Δ sa représentation graphique dans un repère (O,I,J).

Si $M_1(x_1,y_1)$ et $M_2(x_2,y_2)$ sont deux points distincts de Δ alors $a = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

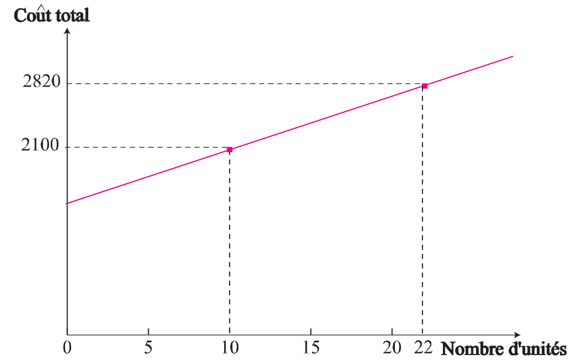
Le réel a est le coefficient directeur ou la pente de Δ. Le réel b est l'ordonnée à l'origine.

Activité 3

Le graphique ci-contre indique (en DT) le coût total de production d'un bien en fonction du nombre d'unités

① Déterminer le coût de fabrication d'une unité.

② Déterminer le coût fixe.



Activité 4

Le prix d'une course en taxi s'obtient en faisant la somme de deux montants :

- Un montant fixe F qui correspond aux frais de prise en charge.

- Un montant variable qui correspond au nombre de kilomètres parcourus.

On désigne par m le prix à payer pour un kilomètre parcouru et par p(x) le prix d'une course de x kilomètres.

① Donner l'expression de p(x) en fonction de F, m et x

② Déterminer m et F sachant que le prix d'une course de 6 kilomètres est 2110 millimes et le prix d'une course de 10 kilomètres est 3310 millimes.

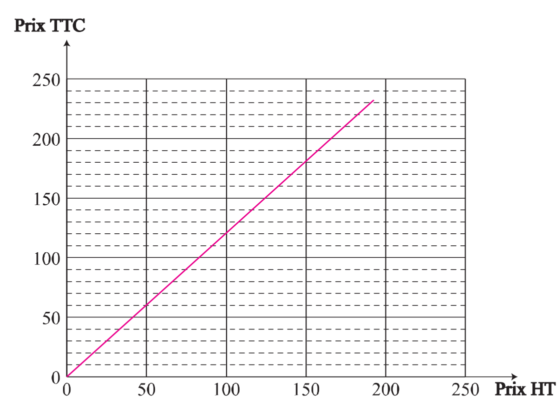
Activité 5

Le graphique ci-contre représente le prix TTC (en DT) en fonction du prix HT (en DT) d'un certain nombre d'articles.

① Déterminer le prix TTC d'un article dont le prix HT est 100 DT.

② a) Calculer la taxe appliquée à ces articles.

b) Déterminer alors le prix TTC d' un article dont le prix HT est de 360DT.



II . Fonctions affines par intervalles

Activité 1

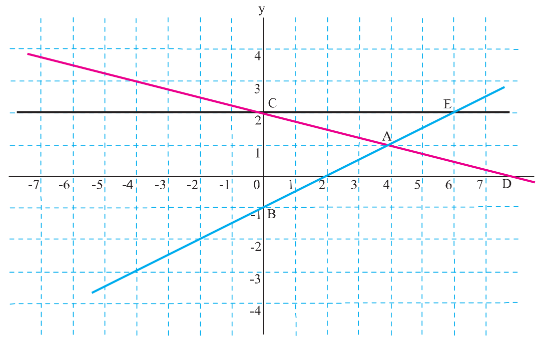
① Soit les fonctions affines f et g définies par $f(x) = -2x + 4$ et $g(x) = x + 1$.
Tracer dans un repère orthogonal les droites Δ_1 et Δ_2, représentations graphiques respectives de f et g.
② Placer le point B de Δ_1 d'abscisse 0 et le point C de Δ_2 d'abscisse 2.
③ Déterminer les coordonnées du point A intersection de Δ_1 et Δ_2.
④ Soit M un point appartenant à la réunion des demi-droites [AB) et [AC).
On désigne par x l'abscisse de M et par h(x) son ordonnée.
a) Que valent $h(-3)$, $h(0)$, $h(5)$ et $h(10)$?
b) Exprimer h(x) en fonction de x.

Activité 2

① Soit les fonctions affines f et g définies par $f(x) = 4 - x$ et $g(x) = x$.
Tracer dans un repère orthogonal les droites Δ_1 et Δ_2, représentations graphiques respectives de f et g.
② A tout réel $x \leq 2$, on associe le réel $h(x) = 4 - x$.
A tout réel $x > 2$, on associe le réel $h(x) = x$.
a) Placer sur le graphique et avec une autre couleur les points de coordonnées $(x,h(x))$ dans chacun des cas suivants :
$x = -2$, $x = -\frac{1}{2}$, $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$ et $x = 4$.
b) Faites une conjecture sur le lieu des points $M(x,h(x))$. Justifier.

Activité 3

Les droites (AB), (AC) et (CE) sont les représentations graphiques des fonctions affines f_1, f_2 et f_3 définies par $f_1(x) = \frac{1}{2}x - 1$, $f_2(x) = -\frac{1}{4}x + 2$ et $f_3(x) = 2$.



[AB) ∪ [AD) est la représentation graphique (ou la courbe représentative) de la fonction :

$$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$
$$x \mapsto g(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x - 1 & \text{si } x \leq 4 \\ -\frac{1}{4}x + 2 & \text{si } x > 4 \end{cases}$$

La fonction g est dite fonction affine par intervalles.

Préciser alors la représentation graphique de chacune des fonctions affines par intervalles suivantes :

$$h(x) = \begin{cases} -\frac{1}{4}x + 2 & \text{si } x \leq 4 \\ \frac{1}{2}x - 1 & \text{si } x > 4 \end{cases}$$

$$i(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x \leq 6 \\ \frac{1}{2}x - 1 & \text{si } x > 6 \end{cases}$$

$$j(x) = \begin{cases} -\frac{1}{4}x + 2 & \text{si } x \leq 0 \\ 2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

$$k(x) = \begin{cases} -\frac{1}{4}x + 2 & \text{si } x \leq 0 \\ 2 & \text{si } 0 < x \leq 6 \\ \frac{1}{2}x - 1 & \text{si } x > 6 \end{cases}$$

Activité 4

Soit la fonction f définie par $f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{si } x \in [-1,1] \\ -2x + 5 & \text{si } x \in]1,3] \\ -1 & \text{si } x \in]3,+\infty[\end{cases}$

① Quel est l'ensemble des réels x qui ont une image par f ?

② Représenter la courbe de f.

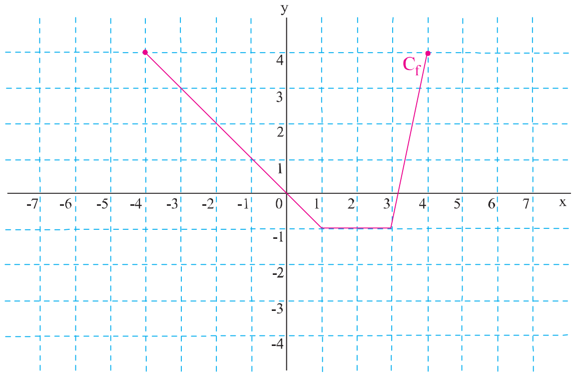
L'ensemble des réels x qui ont une image par une fonction f s'appelle ensemble de définition de f.

Activité 5

C_f est la représentation graphique d'une fonction affine par intervalles f.

① Déterminer l'ensemble de définition de f.

② Déterminer f(x) suivant les valeurs de x.



Activité 6

Une agence de location de voitures propose un tarif composé de :
- Un montant fixe égal à 40 DT par jour.
- Un montant variable égal à 200 millimes par kilomètre parcouru.

Une deuxième agence propose un tarif composé de
- Un montant fixe égal à 60 DT par jour.
- Un montant variable égal à 100 millimes par kilomètre parcouru.

On désigne par $P_1(x)$ le prix à payer à la première agence pour une journée et x kilomètres parcourus et par $P_2(x)$ le prix à payer à la deuxième agence pour une journée et x kilomètres parcourus.

① Exprimer $P_1(x)$ et $P_2(x)$ en fonction de x.

② Représenter sur un même graphique les fonctions $p_1 : x \longmapsto p_1(x)$ et $p_2 : x \longmapsto p_2(x)$.

③ Un client se propose de parcourir 180 Km en une journée. Quelle est l'offre la plus avantageuse ?

d) Déterminer graphiquement l'offre la plus avantageuse selon le nombre de kilomètres parcourus en une journée.

d) Définir une fonction affine par intervalles qui donne la meilleure offre suivant le trajet x parcouru en une journée.

Activité 7

A/ Représenter graphiquement dans un repère orthogonal (O,I,J) la fonction affine par intervalles définie sur $[0,+\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(x) = -5x + 130 & \text{si } x \in [0,8] \\ f(x) = 90 & \text{si } x \in]8,11] \\ f(x) = -10x + 200 & \text{si } x \in]11,20] \\ f(x) = 0 & \text{si } x \in]20,+\infty[\end{cases}$$

B/ On a constaté depuis le début du mois de janvier, une fuite dans un réservoir d'eau. On suppose que chaque jour, le réservoir perd la même quantité.

Le 5 janvier à 8 heures, le réservoir contenait 105 mille litres,
Le 8 janvier à 8 heures, le réservoir contenait 90 mille litres.

① Quelle quantité d'eau le réservoir perd-il en une journée ?

② Une réparation rapide du réservoir a stoppé la fuite le 8 janvier à 8 heures, mais le 11 janvier à 8 heures la fuite a repris de sorte que le 15 janvier à 8 heures, le réservoir contenait 50 mille litres.
Quelle quantité d'eau le réservoir a-t-il perdu par jour, entre le 11 janvier et le 15 janvier ?

③ On désigne par P_n la quantité d'eau dans le réservoir le n janvier à 8 heures.

a) Calculer P_1.

b) Exprimer P_n en fonction de n ($n \in \mathbb{N}^*$).

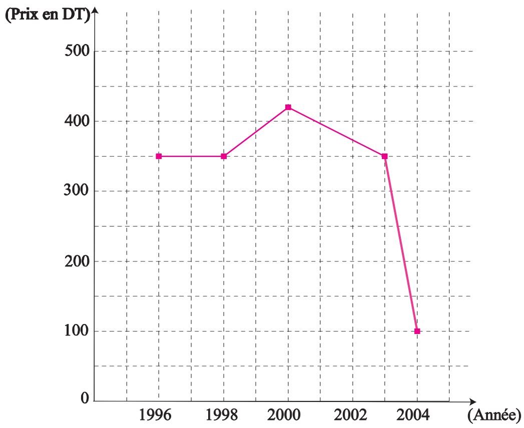
c) Placer dans le repère (O,I,J) les points A_n de coordonnées (n,P_n).

d) A quelle date le réservoir sera-t-il vide ?

III . Sens de variation

Activité 1

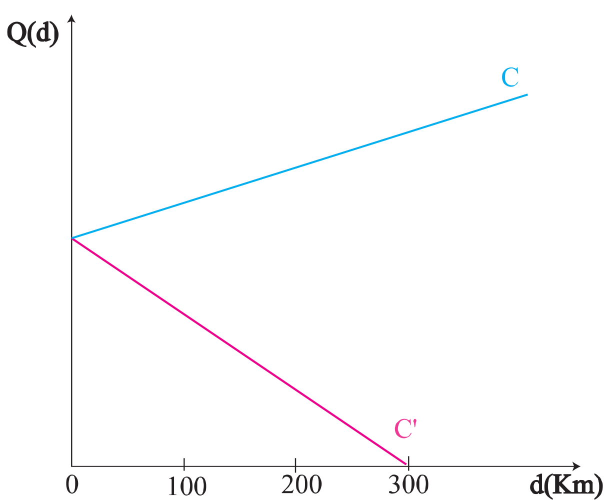
Le graphique ci-contre représente l'évolution du prix d'un produit électronique de 1996 à 2004
De 1998 à 2000, le prix du produit augmente, on dit encore qu'il croit.
Préciser comment varie le prix de ce produit de 2000 à 2004.



Activité 2

① On désigne par Q(d) la quantité de carburant contenue dans le réservoir d'une voiture après un trajet de d kilomètres.
a) Comparer Q(200) et Q(250).
b) Pour quelles valeurs de la distance d a-t-on Q (d) < Q (250) ?

② Parmi ces deux représentations graphiques C et C', préciser celle qui pourrait indiquer la quantité de carburant contenue dans le réservoir d'une voiture, en fonction de la distance parcourue.



Activité 3

C_f est la représentation graphique d'une fonction affine par intervalle f, définie sur $\mathbb{R}$.

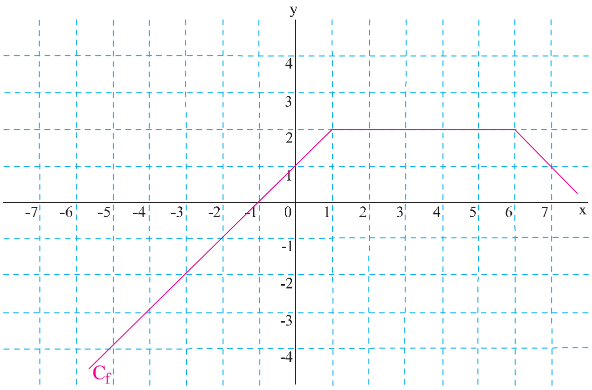
Soit a et b deux réels vérifiants a < b.

Comparer graphiquement f(a) et f(b) dans chacun des cas suivants :

① a et b appartiennent à l'intervalle $]-\infty,1]$.

② a et b appartiennent à l'intervalle $[1,6]$.

③ a et b appartiennent à l'intervalle $[6,+\infty[$.



Définitions

- Une fonction f est dite croissante sur un intervalle I si :
  Pour tous réels a et b de I tels que $a \leq b$, on a $f(a) \leq f(b)$.
- Une fonction f est dite strictement croissante sur un intervalle I si :
  Pour tous réels a et b de I tels que $a < b$, on a $f(a) < f(b)$.

- Une fonction f est dite décroissante sur un intervalle I si :
  Pour tous réels a et b de I tels que $a \leq b$, on a $f(a) \geq f(b)$.

- Une fonction f est dite strictement décroissante sur un intervalle I si :
  Pour tous réels a et b de I, tels que $a < b$, on a $f(a) > f(b)$.

- Une fonction f est dite constante sur un intervalle I si :
  Pour tous réels a et b de I, $f(a) = f(b)$.

Activité 4

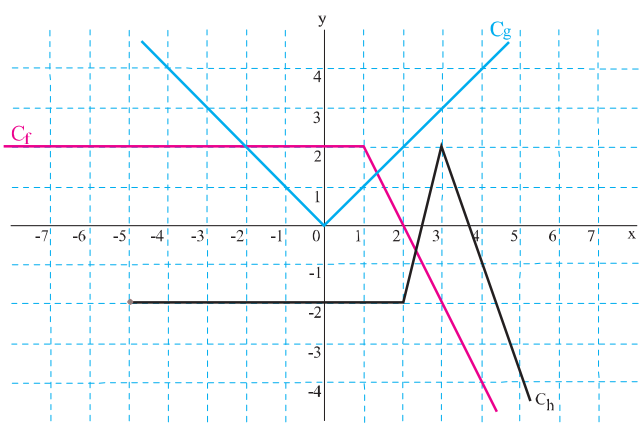
1. ① Soit a et b deux réels tels que $a < b$. Comparer $2a - \frac{2}{3}$ et $2b - \frac{2}{3}$.
② En déduire le sens de variation de la fonction affine f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x - \frac{2}{3}$.

> Etudier le sens de variation d'une fonction f sur un intervalle I, c'est déterminer si cette fonction est croissante, décroissante ou constante sur I.

2. Déterminer le sens de variation de la fonction affine g définie par $g(x) = -\frac{1}{2}x + 3$.

3. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$.
① Montrer que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.
② Montrer que f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_-$.

Activité 5



C_f, C_g et C_h sont les représentations graphiques respectives des fonctions affines par intervalles f, g et h.
Préciser les variations de chacune d'elles sur son ensemble de définition.

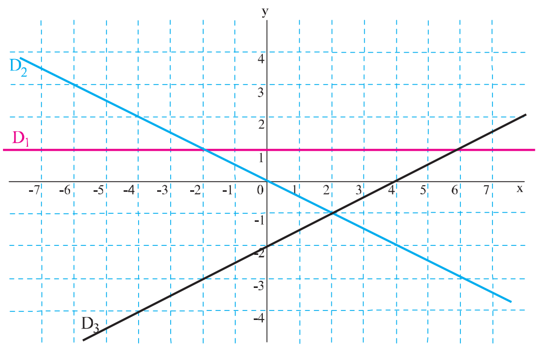
> Déterminer les variations d'une fonction sur son ensemble de définition, c'est déterminer les intervalles sur lesquels elle est croissante, décroissante ou constante.

Activité 6

① D_1, D_2 et D_3 sont les représentations graphiques respectives de trois fonctions affines f_1, f_2 et f_3.

a) Déterminer graphiquement le sens de variation de chacune des fonctions f_1, f_2 et f_3.

b) Déterminer la pente de chacune des droites D_1, D_2 et D_3.



② Soit la fonction affine f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax + b$ où a et b sont deux réels donnés.

Montrer que :

a) f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $a > 0$.

b) f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $a < 0$.

c) f est constante sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $a = 0$.

> Soit f une fonction affine de coefficient a.
> - f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $a > 0$.
> - f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $a < 0$.
> - f est constante sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $a = 0$.

Activité 7

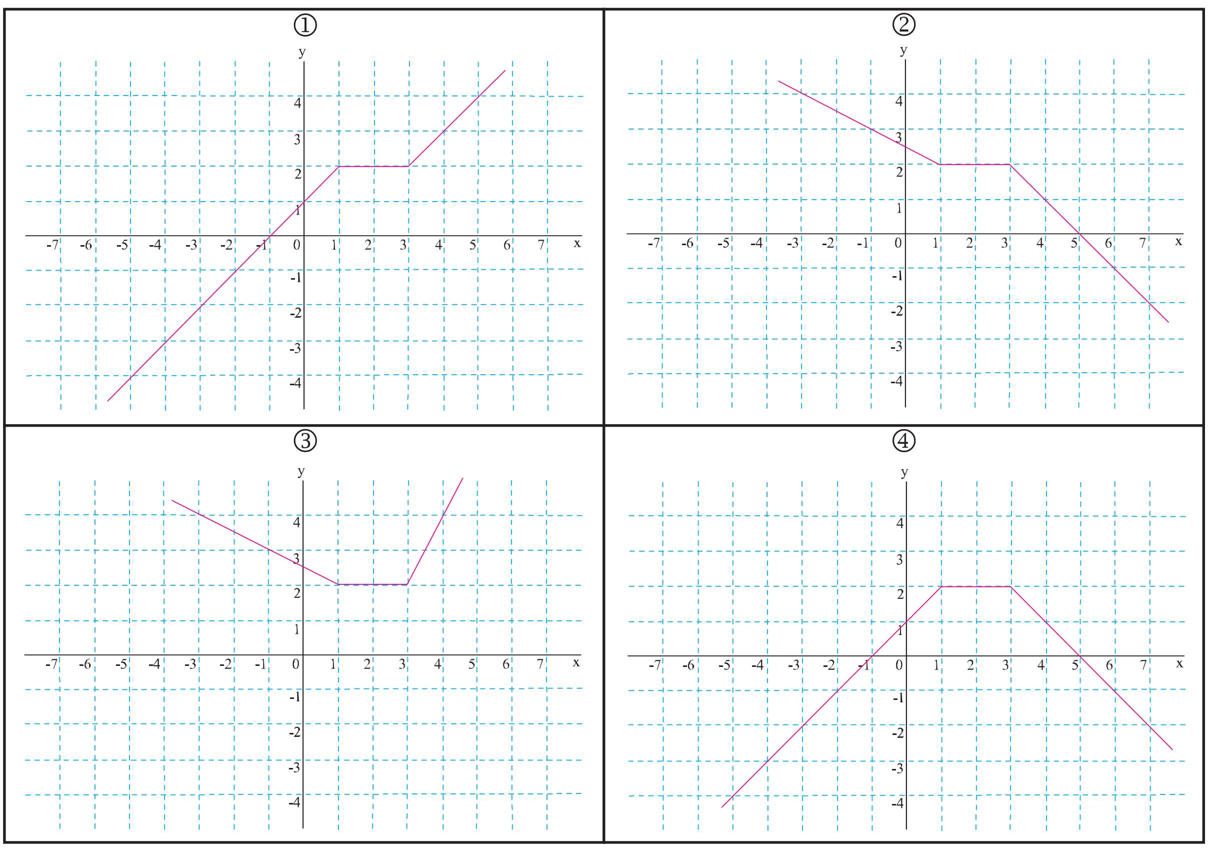
A. Préciser les variations de chacune des fonctions suivantes sur son domaine de définition :

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\quad x \mapsto -5x + 1 \qquad g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\quad x \mapsto x + 2 \qquad h : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\quad x \mapsto \begin{cases} -3x + 1 & \text{si } x \in]-\infty,1] \\ x - 3 & \text{si } x \in]1,+\infty[\end{cases}$$

B. Soit f et g les fonctions affines par intervalles définies par :

$$f(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{2}x + \dfrac{5}{2} & \text{si } x \in]-\infty,1] \\ 2 & \text{si } x \in]1,3] \\ 2x - 4 & \text{si } x \in]3,+\infty[\end{cases} \qquad f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si } x \in]-\infty,1] \\ 2 & \text{si } x \in]1,3] \\ -x + 5 & \text{si } x \in]3,+\infty[\end{cases}$$

Préciser parmi les quatre représentations graphiques suivantes celle de f et celle de g :



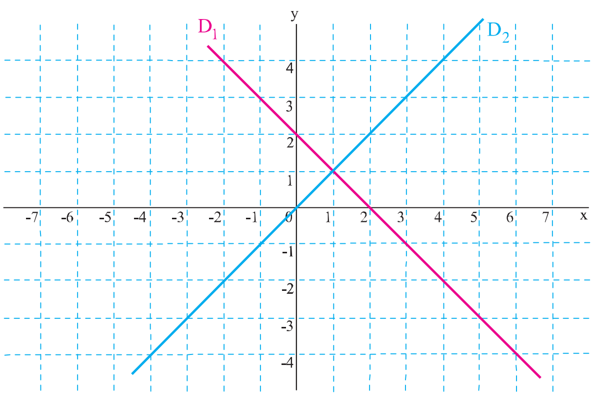
IV. Position relative de deux courbes

Activité 1

① a) Représenter dans un repère orthogonal la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x - 4$.
b) Déterminer l'antécédent par f de chacun des réels 2, (-1) et 0.
c) Déterminer graphiquement les valeurs de x pour lesquelles $f(x) \leq 0$.
d) Déterminer graphiquement l'ensemble E des réels x vérifiant $f(x) \geq 2$.
e) Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) \geq -1$.
② a) Tracer dans le même repère la représentation graphique de la fonction g définie par $g(x) = -\frac{1}{2}x + 3$.
b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = g(x)$.
c) Déterminer l'ensemble des réels x tel que $f(x) > g(x)$.

Activité 2

D_1 et D_2 sont les représentations graphiques respectives de deux fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$.
Comparer f(x) et g(x) dans chacun des cas suivants :
a) $x \in]-\infty,1[$
b) $x \in]1,+\infty[$
c) $x = 1$



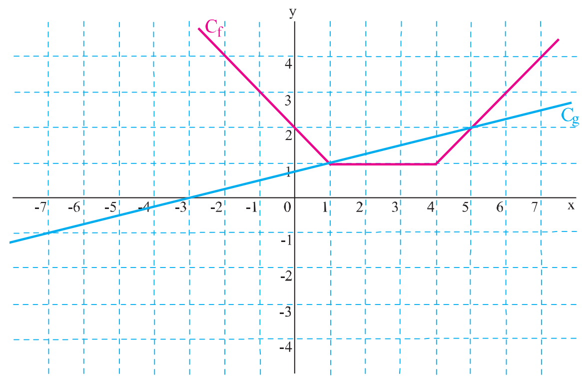
Activité 3

A/ Représenter graphiquement les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = 90\,t$ et $g(t) = 60\,t + 120$.
B/ Un camion quitte la ville de Tunis à 8 heures et se dirige vers la ville de Médenine (située à 540 km) à la vitesse de 60 km par heure.
Une voiture quitte Tunis, à 10 heures (le même jour) se dirige vers Médenine, à la vitesse de 90 km par heure.
① Quelle est la distance parcourue par le camion après 2 heures de trajet ?

② On désigne par $d_1(t)$ et $d_2(t)$ les distances parcourues respectivement par la voiture et le camion après t heures.
a) Sachant que l'on a pris pour origine des temps l'instant du départ de la voiture, exprimer $d_1(t)$ et $d_2(t)$ en fonction de t.
b) Déterminer en fonction de t la position relative des deux véhicules.

Activité 4

Le graphique ci-contre représente deux fonctions f et g.



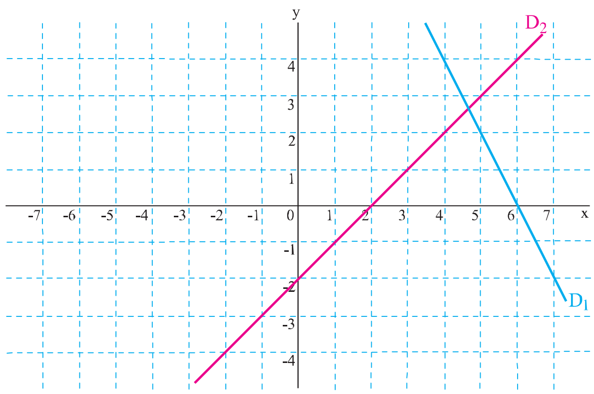
① Résoudre graphiquement $f(x) = g(x)$.
② Comparer f(x) et g(x) dans chacun des cas suivants :
a) $x \in]-\infty,1[$
b) $x \in]1,5[$
c) $x \in]5,+\infty[$
③ Déterminer l'ensemble des réels x tel que $f(x) < g(x)$.

■ Le plan est muni d'un repère (O,I,J), soit f et g deux fonctions, C_f et C_g leurs représentations graphiques relative à un intervalle I.
• (C_f est au dessus de C_g) si et seulement si (pour tout réel x de l'intervalle I on a $f(x) > g(x)$).
• (C_f est au dessous de C_g) si et seulement si (pour tout réel x de l'intervalle I on a $f(x) < g(x)$).
■ La représentation graphique de la fonction nulle est l'axe des abscisses, par conséquent :
• (C_f est au dessus de l'axe des abscisses) si et seulement si ($f(x) > 0$).
• (C_f est au dessous de l'axe des abscisses) si et seulement si ($f(x) < 0$).

V. Signe d'un binôme

Activité 1

① Dans le graphique ci-contre D_1 et D_2 sont les représentations graphiques respectives de deux fonctions affines f et g définies sur $\mathbb{R}$.



a) Déterminer le sens de variation de chacune des fonctions f et g.
b) Etudier suivant les valeurs de x le signe de f(x) et celui de g(x).

② Etudier suivant les valeurs réelles de x le signe de ax + b avec $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$.

L'étude du signe de ax + b avec $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$ est résumée habituellement dans un tableau de signe :

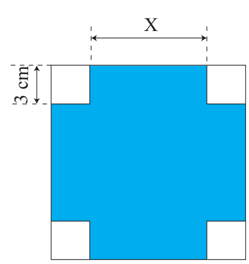
x	$-\infty$		$-b/a$		$+\infty$
ax + b		signe de (-a)	0	signe de (a)	

Activité 2

Etudier sur $\mathbb{R}$ le signe des expressions suivantes :
$-2x + 4$, $5x + 7$, $\sqrt{2}x + 5$, $-\dfrac{2}{3}x + \dfrac{5}{4}$ et $6 - 5x$.

Activité 3

① Développer et simplifier l'expression $(x - 9)(x + 21)$.
② Un fabricant doit réaliser des boites à partir de feuilles carrées de carton. Pour cela, à chaque coin d'une feuille, il doit enlever un carré de 3 cm de côté.



a) Exprimer en fonction de x l'aire de la partie colorée.
b) Pour des contraintes de fabrication, cette aire doit être supérieure à 189 cm^2.
Comment le fabricant doit-il choisir le côté des feuilles ?

Pour chercher le signe d'un produit, on peut chercher le signe de chaque facteur et appliquer la règle de signe.

Activité 4

① Déterminer suivant les valeurs du réel x le signe de $(2x - 3)(\frac{1}{2}x + 1)$.

② Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $(2x - 3)(\frac{1}{2}x + 1) \geq 0$.

③ Résoudre dans $\mathbb{R}_+$ l'inéquation $(2x - 3)(\frac{1}{2}x + 1) \geq 0$.

④ Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\dfrac{\frac{1}{2}x + 1}{2x - 3} \leq 0$.

Activité 5

① Déterminer suivant les valeurs du réel x le signe de $3x - 2$.

② Représenter graphiquement la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = |3x - 2|$.

Soit $a \in \mathbb{R}$,
$|a| = a$ équivaut à $a \geq 0$.
$|a| = -a$ équivaut à $a \leq 0$.

• Le plan est muni d'un repère (O,I,J), si Δ : $y = ax + b$ est la représentation graphique de la fonction affine f définie par $f(x) = ax + b$ et si $M_1(x_1 ; y_1)$; $M_2(x_2 ; y_2)$ sont deux points distincts de Δ alors $a = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$.

Le réel a est le coefficient directeur de Δ ou la pente de Δ.
Le réel b est l'ordonnée à l'origine.

• Soit f une fonction affine de coefficient a.
- f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $a > 0$.
- f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $a < 0$.
- f est constante sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $a = 0$.

• Soit f et g deux fonctions, C_f et C_g leurs représentations graphiques dans un repère. M (x,f(x)) et N (x,g(x)) sont des points de même abscisse x de C_f et C_g.
- (C_f est au dessus de C_g sur un intervalle I) si et seulement si (pour tout réel x de l'intervalle I on a $f(x) > g(x)$).
- (C_f est au dessous de C_g) si et seulement si (pour tout réel x de l'intervalle I on a $f(x) < g(x)$).

• L'étude du signe de $ax + b$ avec $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$ est résumé habituellement dans un tableau de signe :

x	$-\infty$	-b/a	$+\infty$
ax + b	signe de (-a)	0	signe de (a)

• Pour chercher le signe d'un produit ou d'un quotient, on peut chercher le signe de chaque facteur et appliquer la règle de signe.

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3 - 2x$.

① Calculer f(0), f(-5) et $f(\frac{7}{2})$.

② Construire, dans un repère orthogonal (O,I,J) la droite Δ représentation graphique de f.

③ Quel est le coefficient directeur de Δ ?

④ Déterminer les coordonnées des points d'intersections de Δ avec les axes des abscisses et des ordonnées.

2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{8 - x}{4} - 3$.

① f est-elle affine ?

② Construire la représentation graphique de f dans un repère orthogonal (O,I,J).

3. Une garderie d'enfants propose à ses clients le tarif suivant :

Pour chaque enfant, on paye α DT par mois comme abonnement et β DT par séance de garde.

Soit S(x) la somme en DT à payer pour x séances de garde par mois.

① Exprimer S(x) en fonction de α, β et x.

② Un parent a payé 40 DT pour 10 séances et un autre a payé 55 DT pour 15 séances.

a) Placer dans un repère orthogonal les points A(10,40) et B(15,55).

b) Tracer la droite (AB) et en déduire le nombre maximal de séances qu'un parent peut bénéficier avec une somme de 85 DT.

4. Le salaire mensuel d'une vendeuse est calculé de la façon suivante :

100 DT plus 5 % du montant de ses ventes.

① Quel est son salaire si elle vend pour 2000 DT en un mois ?

② On désigne par S le salaire mensuel en DT et par n le montant des ventes en DT.

a) Exprimer S en fonction de n.

b) Représenter graphiquement la fonction qui modélise la situation dans un repère orthogonal (O,I,J).

(Prendre 1 cm pour 1000 DT en abscisses et 1 cm pour 100 DT en ordonnées).

c) quel est le salaire que la vendeuse peut atteindre pour un maximum de vente de 8000 DT ?

5. La valeur totale d'un ensemble de pièces électroniques est 9000 DT. L'évolution et l'innovation fait que cette valeur diminue chaque année d'une façon constante jusqu'à la valeur nulle au bout de 15 ans.
① Quelle est la valeur de la diminution en une année ?
② Exprimer la valeur de l'ensemble des pièces sous la forme d'une fonction du temps et tracer le graphique de la fonction associée à la situation.

6. Le tableau suivant indique les températures relevées toutes les 4 heures dans une ville au cours des 12 premières heures d'une journée d'hiver:

Heure t	0 h	4 h	8 h	12 h
Température T	4°C	-2°C	8°C	10°C

① Dans un repère du plan, l'axe des abscisses représente le temps t (0,5 cm pour 1 h) et l'axe des ordonnées représente la température T (0,5 cm pour 1°C). Placer les quatre points donnés par le tableau.
② Le tableau ne nous donne pas les températures en dehors des valeurs mesurées. Pour estimer ces valeurs:
a) Relier les points successifs par des segments de droites.
b) Donner une estimation de la température à 2 heures, à 6 heures et à 10 heures.

7. Soit f la fonction affine par intervalles définie sur [-2,8] par :

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si } -2 \leq x < 1 \\ -2x + 4 & \text{si } 1 \leq x < 4 \\ \frac{1}{2}x - 6 & \text{si } 4 \leq x \leq 8 \end{cases}$$

① Tracer la représentation graphique de f dans un repère orthogonal (O,I,J)
② Résoudre l'équation f (x) = 0.

8. Le barème des impôts sur le revenu d'un commerçant est défini de la façon suivante :
0 DT pour la tranche du revenu inférieur ou égale à 5 000 DT.
5% du revenu imposable pour la tranche du revenu comprise entre 5 000 DT et 20 000 DT.
10% pour la tranche du revenu supérieur ou égal à 20 000 DT.
① Calculer le montant des impôts sur un revenu de 8 000 DT puis sur un revenu de 30 000 DT.

② a) Déterminer la fonction affine par intervalles donnant les impôts I(x) en fonction du revenu x.
b) Représenter cette fonction dans un repère orthogonal (O,I,J).
c) Lire graphiquement le montant de l'impôt pour un revenu de 12 000 DT.
Remarque :
Le principe de calcul des impôts réels est le même que celui-ci, mais les tranches et les pourcentages ont été simplifiés pour faciliter la tâche.

9. Le plan est muni d'un repère orthogonal (O,I,J).
① Marquer les points A(-2,-3), B(1,1), C(2,1) et D (3,2).
② Soit f la fonction affine par intervalles de représentation graphique [BA) ∪ [BC] ∪ [CD).
a) Déterminer le sens de variation de f.
b) Exprimer f(x) en fonction de x.

10. Une entreprise embauche un représentant et lui propose deux possibilités de rémunération :
1ère possibilité **:** Un salaire fixe mensuel de 500 DT, plus une commission de 5% du montant mensuel des ventes effectuées par le représentant.
2ème possibilité : un salaire fixe mensuel de 400 DT, tant que le montant mensuel des ventes est inférieur ou égal à 2000 DT, plus une commission de 20% calculée uniquement sur la partie du montant mensuel des ventes supérieur à 2000 DT.
① Calculer les salaires f(x) et g(x) correspondantes aux première et deuxième possibilités, pour un montant mensuel x DT des ventes.
② Représenter dans le même repère les fonctions $f : x \longmapsto f(x)$ et $x \longmapsto g(x)$ pour $x \in [0,6000]$ (On prendra 2 cm pour 1000 DT sur l'axe des abscisses et 1 cm pour 100 DT sur l'axe des ordonnées).
③ a) Lire sur le graphique pour quelle valeur du montant mensuel des ventes les deux salaires f(x) et g(x) sont égaux.
b) Quand la deuxième possibilité est-elle préférable à la première ?

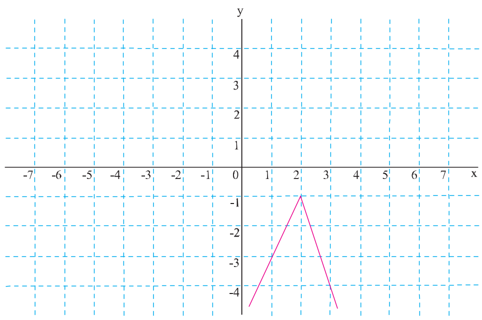
11. Préciser le sens de variation de chacune des fonctions suivantes :

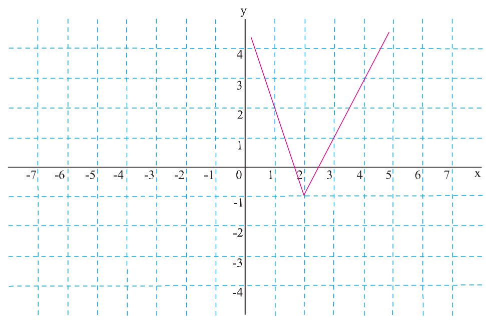
$f : x \longmapsto -\dfrac{2}{3}x - 3$; $g : x \longmapsto \sqrt{3}x - \dfrac{5}{4}$; $h : x \longmapsto \begin{cases} 5x+3 & \text{si } x \in [-5,2] \\ -2x+17 & \text{si } x \in]2,8] \end{cases}$

12. Soit f la fonction affine par intervalles définie par :

$$f(x) = \begin{cases} -3x+5 & \text{si } x \in]-\infty,2] \\ 2x-5 & \text{si } x \in]2,+\infty[\end{cases}$$

Préciser parmi ces deux représentations graphiques celle de f :





13. A/ f et g sont les fonctions affines définies par $f(x) = 4x + 10$ et $g(x) = 5x$.

① Construire, dans un repère orthogonal (O,I,J), les droites Δ_1 et Δ_2 représentations graphiques respectives de f et g.

② Déterminer les coordonnées du point d'intersection de Δ_1 et Δ_2 .

③ Déterminer, suivant les valeurs du réels x, la position relative de Δ_1 par rapport à Δ_2.

B/ Une salle de sport propose à ses clients deux modèles de payement :

<u>Modèle A</u> : Une somme fixe de 10 DT plus 4 DT par séance de deux heures.

<u>Modèle B</u> : 5 DT par séance de deux heures.

Soit n le nombre de séances par mois, A(n) la dépense mensuelle si on choisit le modèle A, B(n) la dépense mensuelle si on choisit le modèle B.

① Exprimer A(n) et B(n) en fonction de n.

② Marquer sur le graphique précédant les points de coordonnées (n,A(n)) et (n,B(n)) pour $n \in \{1;2;3;4;5\}$.

③ Déterminer graphiquement, suivant les valeurs de n, le modèle le plus avantageux.

14. Le prix d'un litre d'huile d'olive varie selon l'acidité et la qualité. Ainsi le prix total de 20 litres avec leur récipient, qui coûte 5 DT, varie entre 61 et 67 DT. Dans quel intervalle varie le prix d'un litre d'huile d'olive ?

15. En 2004 Tunisie Télécom propose à ses clients deux types de lignes GSM :
- Ligne prépayée : Le client paye 225 millimes par minute de communication.
- Ligne Post-payée : Le client paye 13,320 DT par mois comme frais fixes et 180 millimes par minute de communication.

Soit x le nombre de minutes de communication pendant un mois.
① Exprimer en fonction de x, le montant A(x) payé par le client s'il choisit la ligne prépayée.
② Exprimer en fonction de x, le montant B(x) payé par le client s'il choisit la ligne Post-payée.
③ a) Simplifier l'expression A(x) – B(x).
b) Comparer suivant les valeurs de x les montants à payer avec les deux types pendant un mois.

16. Un commerçant vend des montres à la foire. La location de l'emplacement coûte 200 DT. Il achète chaque montre à 28 DT et la revend avec un bénéfice de 25%.
Combien doit-il vendre de montres pendant la période de la foire pour réaliser un bénéfice d'au moins 500 DT ?

17. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

- $(x - 1)(2x - 5) - x(2x - 2) < 0.$
- $x^2 - 6x + 9 > (x - 3)(2x + 1).$
- $(2x - 3)^2 < 1.$
- $\dfrac{x}{2x + 1} > 0.$

Chapitre
6

Problèmes du premier degré à deux ou trois inconnues

Régionnement du plan

Sommaire

« Comment se fait-il que les mathématiques qui sont issues de la pensée humaine indépendamment de toute expérience, s'appliquent si parfaitement à la réalité ? »

Albert Einstein

Jupe ou pantalon

En moyenne la confection d'une jupe nécessite 0,9 mètre de tissus et la confection d'un pantalon nécessite 1,2 mètre.
Combien de jupes et combien de pantalons peut-on confectionner avec 10 mètres de tissus ?

Pourquoi payer deux frais de transport ?

Un commerçant a besoin de 24 unités d'un produit P_1 et 48 unités d'un produit P_2.
Il a la possibilité de les acheter chez deux fournisseurs A et B aux conditions suivantes :

	Prix d'une unité du produit P_1	Prix d'une unité du produit P_2	Frais de transport
Fournisseur A	3 DT	8 DT	20 DT
Fournisseur B	4 DT	7 DT	40 DT

Pour minimiser ses dépenses, il a acheté les 24 unités de P_1 chez le fournisseur A et les 48 unités de P_2 chez le fournisseur B.

I. Equations linéaires du premier degré à deux inconnues

Activité 1

Soit (O,I,J)un repère du plan.

① a) Tracer la droite (AB) pour A(-1,0) et B(2,1).

b) Les points O et C (-3,5) sont-ils des points de (AB)?

> Les points A, B et M sont alignés s'il existe un réel α tel que $\overrightarrow{AM} = \alpha\,\overrightarrow{AB}$.

c) Les points Z(2 , z) avec $z \in \mathbb{R}$ sont-ils des points de (AB) ?

d) Les points T(t , 0) avec $t \in \mathbb{R}$ sont-ils des points de (AB) ?

e) Le point L(395 , 132) est-il un point de (AB) ?

② Soit M(x,y) un point du plan.

a) Vérifier que : $M \in (AB)$ équivaut à il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $\begin{cases} (x+1) = 3k \\ y = k \end{cases}$

b)En déduire une relation entre x et y indépendante de k pour que M(x,y) appartienne à (AB).

> $x - 3y + 1 = 0$ s'appelle équation cartésienne de la droite (AB).

c) Les points $E\left(1 , -\frac{1}{2}\right)$ et F (332 , 111) sont-ils des points de (AB) ?

d) Déterminer le réel r pour que le point R (r , 5) appartienne à (AB).

Activité 2

On considère l'ensemble E = {M(x,y) tel que $2x - 5y + 3 = 0$}.

① Les points A(0 , 1) ; B(2 , 1) et C (- 4 , - 1) sont-ils des points de E ?

② Déterminer l'ordonnée de chacun des points P et Q de l'ensemble E d'abscisses respectives 1 et 6.

③ Soit M(x,y), déterminer une condition sur x et y pour que le point M(x,y) appartienne à la droite (PQ). En déduire alors l'ensemble E.

Activité 3

Soit E = {M(x,y) tel que ax + by = c} où a, b et c sont trois réels donnés.

① On suppose que $b \neq 0$.

a) Exprimer y en fonction de x, a, b et c.

b) Déterminer en fonction de a, b et c les ordonnées des points P et Q de l'ensemble E d'abscisses respectives 0 et 1.

c) Déterminer une équation cartésienne de la droite (PQ).

d) Déterminer alors l'ensemble E.

② On suppose que $b = 0$.

a) Que peut-on dire de l'ensemble E si $a = 0$ et $c \neq 0$?

b) On suppose que $a \neq 0$. Donner deux points R et S de E puis déterminer une équation de la droite (RS).

> L'ensemble E des points M(x,y) tels que $ax + by = c$ avec $a \neq 0$ ou $b \neq 0$ est une droite.
> On dit que E a pour équation $ax + by = c$ et on note $E : ax + by = c$.

Activité 4

Tracer les droites $D_1 : 2x - y = 3$; $D_2 : y = x + 1$; $D_3 : x + 5 = O$; $D_4 : y + 1 = 3$ et $D_5 : 3x - y + 3 = 0$.

Activité 5

① a) Tracer dans un repère (O,I,J) la droite $D : 2x + y - 5 = 0$.

b) Déterminer tous les couples d'entiers naturels solutions de l'équation $2x + y - 5 = 0$.

> D est la représentation graphique des solutions de l'équation $2x + y = 5$.

② Calculer t pour que le couple $(\frac{1}{2}, t)$ soit solution de l'équation $2x + y = 5$.

③ Calculer m pour que le couple (m,1) soit solution de l'équation $2x + y = 5$.

> ■ L'équation $ax + by = c$, où a et b sont deux réels non tous les deux nuls, x et y sont deux inconnues réelles, est appelée équation linéaire du premier degré à deux inconnues.
> ■ La représentation graphique des solutions d'une équation du premier degré à deux inconnues, dans un repère du plan, est une droite.

Activité 6

Représenter graphiquement les solutions de chacune des équations du premier degré à deux inconnues suivantes :

a) $x - \frac{1}{2}y = -1$.

b) $2x + 4y - 1 = 0$.

c) $x + 2 = 0$.

d) $y - 2 = 0$.

II. Systèmes d'équations linéaires du premier degré à deux inconnues

Activité 1

① Représenter graphiquement les solutions de l'équation $3x - 5y = 15$.

② Représenter dans le même repère les solutions de l'équation $x + y = 1$.

③ Déterminer la solution du système

$$(S) : \begin{cases} 3x - 5y = 15 \\ x + y = 1 \end{cases}$$

Un système de deux équations linéaires à deux inconnues est la donnée de deux équations linéaires du premier degré à deux inconnues : $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$

où x et y sont les inconnues.

Déterminer les solutions éventuelles d'un tel système c'est trouver l'ensemble des couples des réels (x,y) pour lesquels les deux égalités sont vraies à la fois.

Activité 2

Déterminer l'ensemble des solutions de chacun des systémes suivants :

$$(S_1) : \begin{cases} 3x - y = 5 \\ x + y = 1 \end{cases} \qquad (S_2) : \begin{cases} 5x + 4y = 1 \\ x - y = 0 \end{cases} \qquad (S_3) : \begin{cases} 3x - 4y = 3 \\ -9x + 12y = 4 \end{cases}$$

Un système de deux équations linéaires à deux inconnues peut être résolu par :

- Substitution :
- on utilise une des équations pour exprimer une des inconnues en fonction de l'autre,
- on porte l'expression obtenue dans l'autre équation,
- on obtient ainsi une équation à une seule inconnue que l'on résout,
- on en déduit l'ensemble des solutions du système.
- Combinaison linéaire :
- on multiplie, si nécessaire, les équations par des nombres choisis de manière que les coefficients d'une inconnue soient opposés,
- on additionne les équations membre à membre pour éliminer cette inconnue,

-Si on obtient une équation à une seule inconnue on la résout et on en déduit l'ensemble des solutions du système.

Activité 3

Pour une pièce théâtrale, les places valent 7 DT et 13 DT. Une association a acheté 32 billets pour un montant de 272 DT.
Combien de billets de chaque sorte l'association a-t-elle acheté ?

Activité 4

① a) Représenter graphiquement dans le même repère les solutions des équations à deux inconnues suivantes :
$2x - y = 1$; $4x - 2y = 3$; $2x + y = 1$ et $x - \frac{1}{2}y = \frac{1}{2}$.

b) Déterminer les solutions éventuelles des systèmes suivants :

$\begin{cases} 2x - y = 1 \\ 4x - 2y = 3 \end{cases}$, $\begin{cases} 2x - y = 1 \\ 2x + y = 1 \end{cases}$ et $\begin{cases} 2x - y = 1 \\ x - \frac{1}{2}y = \frac{1}{2} \end{cases}$.

② Soit le système de deux équations à deux inconnues suivant :

$$(S) : \begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

On désigne par D et D' les représentations graphiques des équations $ax + by = c$ et $a'x + b'y = c'$.

a) Montrer que si $b \neq 0$ et $b' \neq 0$ le système (S) est équivaut à $\begin{cases} y = -\dfrac{a}{b}x + \dfrac{c}{b} \\ y = -\dfrac{a'}{b'}x + \dfrac{c'}{b'} \end{cases}$

b) En déduire que (D parallèle à D') si et seulement si ($ab' = ba'$).

c) Vérifier que le résultat obtenu en b) reste vrai si $b = b' = 0$.

Soit D et D' les représentations graphiques des équations $ax + by = c$ et $a'x + b'y = c'$ d'un système (S).

- Si $ab' \neq a'b$ alors le système (S) admet une solution unique.
- Le système (S) peut être résolu graphiquement :

On trace D et D',
- Si D et D' sont strictement parallèles alors le système n'admet pas de solution.
- Si D et D' sont confondues alors les solutions du système sont les solutions de l'une des deux équations.
- Si D et D' sont sécantes alors la solution du système est le couple des coordonnées de leur point d'intersection.

Remarque

Soit k un réel. Lorsque k varie, les droites D_k d'équations : $ax + by = k$ sont parallèles.

Activité 5

Déterminer les solutions éventuelles de chacun des systèmes suivants :

$$S_1 : \begin{cases} 2x - y = 1 \\ 3x + y = -2 \end{cases} \qquad S_2 : \begin{cases} \sqrt{2}x - \sqrt{3}y = \sqrt{5} \\ x - y = 0 \end{cases}$$

$$S_3 : \begin{cases} x - 2y = 5 \\ -2x + 4y = 1 \end{cases} \qquad S_4 : \begin{cases} x - 2y = 5 \\ -2x + 4y = -10 \end{cases}$$

III. Régionnement du plan

Inéquations du premier degré à deux inconnues

Activité 1

Un artisan fabrique des objets A et des objets B. Il dispose de 27 Kg de matière première. La fabrication d'un objet A nécessite 2 Kg de matière première et celle d'un objet B nécessite 5 Kg.
On désigne par n le nombre d'objets A et par m le nombre d'objets B que l'artisan peut fabriquer.
① vérifier que $2n + 5m \leq 27$ et en déduire que $m \leq -\frac{2}{5}n + \frac{27}{5}$.
② a) Tracer dans un repère orthogonal la droite $\Delta : 2x + 5y = 27$ (on utilisera un papier millimétré).
b) Est-il possible de fabriquer n objets A et m objets B dans les cas suivants :
(n = 2 et m = 4) ; (n = 6 et m = 3) ; (n =7 et m = 4) ; (n = 8 et m = 3) ; (n = 9 et m = 1).

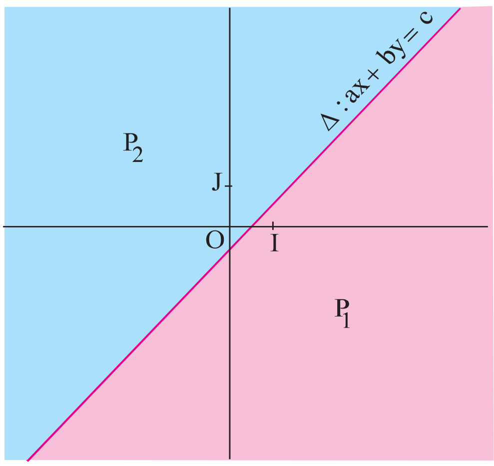
> $2x + 5y \leq 27$ est une inéquation du premier degré à deux inconnues.
> Le couple (2,4) est une solution de cette inéquation.

c) Placer les points E (2,4) ; F (6,3) ; G (7,4) ; H (8,3) et K (9,1).
③ L'artisan peut-il exploiter toute la quantité de la matière première ?
Si oui, donner tous les cas possibles.

Activité 2

① Construire dans un repère orthogonal la droite $\Delta : 2x - y = 1$.
② a) Placer dans le même repère les points A (3,2), B(3,5) et C(3,7).
b) Calculer $2x - y$ dans chacun des cas suivants :
$(x,y) = (3,2)$; $(x,y) = (3,5)$ et $(x,y) = (3,7)$.
③ Soit M un point du plan de coordonnées (α,β) et N le point de Δ d'abscisse α.
a) Déterminer en fonction de α l'ordonnée de N.
b) Comparer β et $(2\alpha - 1)$ dans chacun des cas suivants :
- M est sur Δ.
- M est au dessus de Δ.
- M est au dessous de Δ.

Si Δ est la représentation graphique des solutions de l'équation du premier degré à deux inconnues, $ax + by = c$ alors le plan est partagé en trois parties :



- La droite Δ ensemble des points $M(x,y)$ tels que $ax + by = c$.
- Un demi-plan P_1 de frontière Δ et ne contenant pas Δ ensemble des points $M(x,y)$ tels que $ax + by < c$.
- Un demi-plan P_2 de frontière Δ et ne contenant pas Δ ensemble des points $M(x,y)$ tels que $ax + by > c$.

Activité 3

A. ① Représenter graphiquement les solutions de l'équation $5x - 2y = 3$.
② Vérifier que $(0,0)$ est une solution de l'inéquation $5x - 2y < 3$.
③ Colorier alors le demi-plan P_1, ensemble des points $M(x,y)$ tels que $5x - 2y < 3$.

B. Déterminer graphiquement l'ensemble des points $M(x,y)$ tels que $x - 5y \geq 1$.

C. Déterminer graphiquement l'ensemble des points $M(x,y)$ tels que $x - 5y > 0$.

Activité 4

① Représenter graphiquement les solutions de l'inéquation $0{,}9x + 1{,}2y \leq 10$. (On utilisera un papier millimétré).

② Un chef d'atelier de confection d'habits dispose de 10 mètres de tissus. Il veut confectionner des jupes et des pantalons. Une jupe nécessite 0,9 mètre et un pantalon nécessite 1,2 mètres.
Déterminer le nombre de jupes et le nombre de pantalons qu'il peut confectionner avec un minimum de déchet.

Systèmes d'inéquations du premier degré à deux inconnues

Activité 5

① Représenter graphiquement les solutions du système (S) : $\begin{cases} x - y < 1 \\ x + y > 3 \end{cases}$

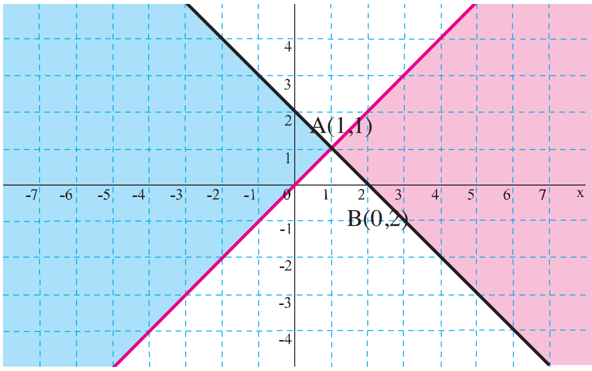
② Indiquer, parmi les couples suivants, ceux qui sont solutions du système (S) : (-1,2) ; (2,5) ; (4,5) ; (2,-1)

③ Donner d'autres couples solutions de (S) .

Activité 6

A. ① Ecrire un système d'inéquations dont les solutions sont les coordonnées des points de la partie bleue.

② Ecrire un système d'inéquations dont les solutions sont les coordonnées des points de la partie verte.



B. Représenter graphiquement les ensembles des points M(x,y) vérifiant respectivement :

① $\begin{cases} x + 2y \leq 5 \\ x > 3 \end{cases}$ ② $\begin{cases} x + 2y \leq 5 \\ y < 3 \end{cases}$ ③ $\begin{cases} x > 3 \\ y < 3 \end{cases}$

Activité 7

« Graphmatica » est un logiciel pour tracer des courbes. Vous prouvez télécharger ce logiciel à partir de plusieurs sites Internet (version 2.0 d).

① Ouvrir un dossier « Graphmatica ».

② a) Ecrire en haut l'inéquation y < x + 1 puis cliquer sur le bouton .

b) Quelle est la partie du plan qui correspond aux solutions de l'inéquation -x + y < 1 ?

③ a) Représenter de même les solutions de l'inéquation y > -x + 2.

b) Déduire la partie du plan qui correspond aux solutions du système :

$\begin{cases} -x + y < 1 \\ x + y > 2 \end{cases}$

④ cliquer deux fois sur l'un des axes pour faire apparaître la fenêtre « options du repère » et choisir les options que vous désirez ou cliquer sur le bouton pour choisir les options du repère par défaut.

Pour transporter le graphique à un fichier Word :
Cliquer « Edition », « copier en vectoriel » puis coller dans le fichier désiré.

IV. Exemples de problèmes d'optimisation

(Dans les activités suivantes, il est recommandé d'utiliser un papier millimétré)

Activité 1

① Représenter graphiquement les solutions du système (S) : $\begin{cases} 5x + 4y \leq 100 \\ 3x + 8y \leq 120 \end{cases}$
(on peut prendre 1mm comme unité)

② Une entreprise fabrique des objets de type (A) et des objets de type (B).
La réalisation d'un objet de type (A) nécessite :
- 50 DT pour la matière première.
- 30 DT pour la main d'œuvre.

La réalisation d'un objet de type (B) nécessite :
- 40 DT pour la matière première.
- 80 DT pour la main d'œuvre.

On note a le nombre d'objets du type (A) fabriqué en une journée et b le nombre d'objets du type (B) fabriqué en une journée.
La dépense journalière en matière première ne doit pas dépasser 1000 DT.
La dépense journalière en main d'œuvre ne doit pas dépasser 1200 DT.
a) Ecrire les contraintes que doivent satisfaire les entiers a et b.
b) Est-il possible de fabriquer 12 objets du type (A) et 12 objets du type (B) en une journée ?
c) L'entreprise décide de fabriquer 12 objets du type (A) en une journée. Déterminer le nombre maximal d'objets du type (B) qu'elle peut fabriquer.

Activité 2

A/ Représenter graphiquement les solutions de chacun des systèmes suivants :

$(S_1) : \begin{cases} x - y \geq -20 \\ y \leq 40 \end{cases}$ $(S_2) : \begin{cases} x - y \leq -20 \\ x \leq 20 \end{cases}$ $(S_3) : \begin{cases} x \geq 20 \\ y \geq 40 \end{cases}$

B/ Un commerçant a la possibilité d'acheter deux produits P_1 et P_2 chez deux fournisseurs A et B aux conditions suivantes :

	Prix d'une unité du produit P_1	Prix d'une unité du produit P_2	Frais de transport
Fournisseur A	3 DT	8 DT	20 DT
Fournisseur B	4 DT	7 DT	40 DT

① Le commerçant veut acheter 10 unités de chaque produit.
Calculer la dépense correspondante dans chacun des cas suivants :
a) Tout acheter chez le fournisseur A.
b) Tout acheter chez le fournisseur B.
c) Acheter le produit P_1 chez le fournisseur A et le produit P_2 chez le fournisseur B.
② Mêmes questions que ① mais pour 100 unités de chaque produit.
③ On se propose de déterminer le mode d'achat, le plus favorable, suivant les quantités de produits P_1 et P_2 achetées.
Posons n la quantité du produit P_1 et m la quantité du produit P_2.
a) On suppose que le commerçant achète tout chez le fournisseur A. On désigne par d_1 le montant de ses dépenses. Vérifier que $d_1 = 3n + 8m + 20$.
b) On suppose que le commerçant achète tout chez le fournisseur B. On désigne par d_2 le montant de ses dépenses. Exprimer d_2 en fonction de n et m.
c) On suppose que le commerçant achète le produit P_1 chez le fournisseur A et le produit P_2 chez le fournisseur B. On désigne par d_3 le montant de ses dépenses. Exprimer d_3 en fonction de n et m.
④ a) Vérifier que si l'achat des deux produits chez le fournisseur A réalise le minimum de dépenses alors le couple (n,m) vérifie le système (S_1).
b) Déterminer les conditions que doit vérifier le couple (n,m) pour que l'achat des deux produits chez le fournisseur B réalise le minimum de dépenses.
c) Déterminer les conditions que doit vérifier le couple (n,m) pour que l'achat de n unités du produit P_1 chez A et m unités du produit P_2 chez B réalise le minimum de dépenses.
d) Pour l'achat de 60 unités du produit P_1, déterminer suivant les valeurs de m le mode d'achat qui réalise le minimum de dépenses.

Activité 3

Un menuisier fabrique deux meubles M_1 et M_2. La fabrication de ces deux meubles nécessite deux sortes de bois B_1 et B_2 en quantités données dans le tableau ci-contre.

	Bois B_1	Bois B_2
Meuble M_1	0,5 m^3	0,3 m^3
Meuble M_2	0,2 m^3	0,3 m^3

Pour une période P, le menuisier ne peut disposer que de 4 m^3 du bois B_1 et de 2,7 m^3 du bois .

① Si on désigne par x et y respectivement le nombre des meubles M_1 et M_2 fabriqués, montrer alors que les contraintes de fabrication se traduisent par le système suivant : (S) $\begin{cases} x + y \leq 9 \\ 5x + 2y \leq 40 \end{cases}$

② Représenter graphiquement l'ensemble des solutions du système

$(u \in \mathbb{R} \; ; \; v \in \mathbb{R}) \qquad \begin{cases} u + v \leq 9 \\ 5u + 2v \leq 40 \end{cases}$

③ On suppose que les meubles M_1 et M_2 fabriqués sont tous vendus et que chaque meuble M_1 apporte un bénéfice de 150 DT et que chaque meuble M_2 apporte un bénéfice de 100 DT.

Exprimer le bénéfice total b correspondant à la vente de x meubles M_1 et de y meubles M_2.

④ Soit Δ_b la représentation graphique des solutions de l'équation $150x + 100y = b$.

a) Tracer Δ_{1500}.

b) Le menuiser peut-il réaliser un bénéfice de 1500 DT ?

c) Déterminer graphiquement le bénéfice maximal réalisé, dans cette période P, et le nombre des meubles M_1 et M_2 correspondant.

d) Même question que c) mais lorsque le nombre des meubles M_1 est inférieur à 5.

Activité 4

A/ Représenter graphiquement dans un repère (O,I,J) les solutions du systèmes

$$(S) : \begin{cases} 2x + y \geq 10 \\ 2x + 3y \geq 12 \end{cases}$$

B/ On veut transporter 900 personnes et 60 tonnes de matériel. On dispose de 7 avions de type A et 6 avions de type B.
Un avion de type A peut transporter 180 personnes et 10 tonnes de matériel, un avion de type B peut transporter 90 personnes et 15 tonnes de matériel.
① Dénombrer les manières possibles de réaliser un tel transport.
② La location d'un avion du type A coûte 4 mille DT, celle d'un avion du type B coûte 3 mille DT.
a) Tracer dans le même repère (O,I,J) la droite D d'équation $4x + 3y = 15$.
b) Le transport peut-il être réalisé avec 15 mille DT ?
③ On note d la dépense en mille DT qui correspond à l'utilisation de n avions du type A et m avions du type B.
a) Exprimer d en fonction de n et m.
b) déterminer graphiquement le nombre d'avions de chaque type qui minimise le coût de ce transport et préciser ce coût.

V. Systèmes d'équations du premier degré à trois inconnues

Activité 1

On se propose de déterminer, s'ils existent, trois réels x ,y et z vérifiant le système suivant :

$$(S) : \begin{cases} 2x - y + z = 7 \\ x + 2y - z = 6 \\ -x + y + 2z = 11 \end{cases}$$

On note (E_1), (E_2) et (E_3) les équations respectives du système (S).
① Exprimer z en fonction de x et y à partir de (E_1) puis remplacer, l'expression de z obtenue, dans (E_2) et (E_3). On obtient alors un système (S′) de deux équations à deux inconnues x et y.
② Déterminer le couple (x,y) solution du système (S′).
③ En déduire la valeur de z.

Pour déterminer les solutions éventuelles d'un système de trois équations à trois inconnues, on peut utiliser la méthode de substitution qui consiste à :
- Exprimer l'une des inconnues en fonction des autres dans l'une des équations.
- Remplacer cette inconnue par l'expression obtenue dans les autres équations.
- Déterminer les solutions du système obtenu.

Activité 2

Un individu a placé pour une période d'une année un capital de 68 mille DT en trois parts : La première au taux de 5% , la deuxième au taux de 7% , et la troisième au taux de 8%.
Le revenu annuel de la troisième part est le double de la somme des revenus des autres parts. Le revenu annuel total des trois parts est de 4800 DT.
Soit a , b et c les trois parts respectives.
Modéliser la situation et déterminer la valeur des trois parts.

Activité 3

Soit le système (S) : $\begin{cases} 3x - 2y + 7z = 19 \\ 2x - 3y - z = 3 \\ 6x + 4y + 3z = 8 \end{cases}$

On note : L_1 l'équation $3x - 2y + 7z = 19$
L_2 l'équation $2x - 3y - z = 3$
L_3 l'équation $6x + 4y + 3z = 8$

On convient de noter $aL_1 + bL_2$ l'équation :
$a(3x - 2y + 7z) + b(2x - 3y - z) = 19a + 3b$

L'équation $aL_1 + bL_2$ s'appelle une combinaison linéaire de L_1 et L_2.

① a) Déterminer $2L_1 - 3L_2$ et $2L_1 - L_3$.
b) Déduire que le système (S) est équivalent au système :

$$(S') : \begin{cases} 3x - 2y + 7z = 19 \\ 5y + 17z = 29 \\ -8y + 11z = 30 \end{cases}$$

② On note : L'_2 l'équation $5y + 17z = 29$
L'_3 l'équation $-8y + 11z = 30$

Eliminer l'inconnue y dans l'équation L'_3 par combinaison linéaire de L'_2 et L'_3.

③ Déduire la solution du système (S).

Remarque

Le procédé utilisé est appelé méthode de Pivot de Gauss.

Activité 4

Déterminer les solutions éventuelles des systèmes suivants :

$$(S_1) : \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 9x - 3y + z = 0 \\ 4x - 2y + z = -3 \end{cases} \qquad (S_2) : \begin{cases} a - b - 2c = 1 \\ 2a + 2b + c = -1 \\ -3a - b + c = 1 \end{cases}$$

Activité 5

Un capital est scindé en trois parties placées, durant une année, à des taux différents 8%, 4% et 10%.
Le capital acquis au bout de cette année est de 62 500 DT.
Les deux premières parties rapportent au total 2 200 DT d'intérêt et les deux dernières parties rapportent au total 2 900 DT.
Déterminer le montant de chaque partie et le capital initial.

- Le plan est muni d'un repère (O,I,J)

• L'équation $ax + by = c$, où a et b sont deux réels non tous les deux nuls et x et y sont deux inconnues réelles, est appelée équation linéaire du premier degré à deux inconnues.

• La représentation graphique des solutions d'une équation du premier degré à deux inconnues est une droite.

• Soit le systéme $(S_1) : \begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$

Soit D et D' les représentations graphiques des équations $ax + by = c$ et $a'x + b'y = c'$.

• Si $ab' \neq a'b$ alors le système (S) admet une solution unique.

• Le système (S) peut être résolu graphiquement :

On trace D et D',

- Si D et D' sont strictement parallèles alors le système n'admet pas de solution.
- Si D et D' sont confondues alors les solutions du système sont les solutions de l'une des deux équations.
- Si D et D' sont sécantes alors la solution du système est le couple des coordonnées de leur point d'intersection.

1. ① Représenter graphiquement dans le même repère les solutions des équations suivantes :

a) $x - y = 1$

b) $2x - 2y = 3$

c) $x + 3y = 3$

② Déduire les solutions éventuelles de chacun des systèmes suivants :

$$(S_1) : \begin{cases} x - y = 1 \\ 2x - 2y = 3 \end{cases} \qquad (S_2) : \begin{cases} x - y = 1 \\ x + 3y = 3 \end{cases}$$

2. Déterminer les solutions éventuelles de chacun des systèmes suivants :

$$(S_1) : \begin{cases} 3x - y = 1 \\ -x + 2y = 2 \end{cases} \qquad (S_2) : \begin{cases} x - 2y = 1 \\ 2x - 4y = 0 \end{cases}$$

$$(S_3) : \begin{cases} \frac{2}{3}x - \frac{1}{2}y = 0 \\ x - y = 5 \end{cases} \qquad (S_4) : \begin{cases} \frac{1}{2}x - 2y = 1 \\ -x + 4y = -2 \end{cases}$$

3. Lors d'un héritage, on doit partager une somme de 42 mille DT entre trois filles et deux garçons. Déterminer la part de chacun sachant que la part d'un garçon est le double de celle d'une fille.

4. Une personne répartit une somme de 20 mille DT sur deux comptes bloqués pendant une année.

Le premier compte à un taux de 5% par an. Le deuxième compte à un taux de 8% par an.

La somme des intérêts recueillis après une année est de 1240 DT.

Quelles sont les sommes réparties dans chaque compte ?

5. Un fleuriste vend à 5.800 DT un paquet formé de 3 roses et de 4 œillets, il vend à 7.200 DT un paquet formé de 2 roses et 6 œillets. Quel est le prix d'une rose et d'un œillet ?

6. Plusieurs élèves se cotisent pour faire un cadeau à un ami. Si chacun d'eux verse 8 DT alors il manque 2 DT, Si chacun d'eux verse 9 DT alors il y a 4 DT de trop. Déterminer le nombre des élèves participants et le prix du cadeau.

7. Un cycliste parcourt la route reliant A à B. Sur la partie plate, sa vitesse est de 12 kilomètres par heure ; en montée, sa vitesse est de 8 kilomètres par heure et en descente, sa vitesse est de 16 kilomètres par heure.
De A vers B, le cycliste met 5 heures.
De B vers A, le cycliste met 6 heures.
La partie plate a une longueur totale de 12 kilomètres.
Quelle est la longueur des montées et des descentes en allant de A vers B ?

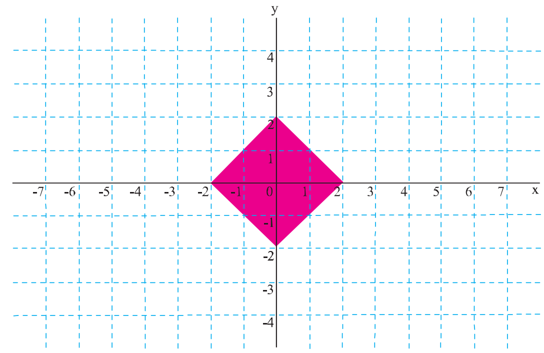
8. Dans une entreprise, deux postes de dépenses, Administration (A) et Entretien (E) sont tels que la dépense de A est de 1800 DT plus 10% de la dépense de E ; la dépense de E est 300 DT plus 20% de la dépense de A.
On désigne par a les dépenses de A et par e les dépenses de E.
Déterminer les valeurs, arrondis au dixième, de a et e.

9. Représenter graphiquement les solutions des inéquations suivantes :
① $2x - 3y \geq 1$.
② $x - \frac{1}{2}y > 0$.
③ $\frac{1}{2}x + y \leq -2$.

10. Déterminer graphiquement les solutions des systèmes suivants :

$(S_1) : \begin{cases} 2x - y \leq -2 \\ 2x + y \leq -2 \end{cases}$ $\quad (S_2) : \begin{cases} x - y \leq -1 \\ x \geq 2 \end{cases}$ $\quad (S_3) : \begin{cases} 2y \leq -1 \\ x + y \geq 2 \end{cases}$

11. Déterminer le système d'inéquations dont l'ensemble des solutions est l'intérieur du carré représenté dans le graphique ci-contre.



12. Dans un atelier de menuiserie, on fabrique des tables de type A et des tables de type B. Une table de type A nécessite 3 heures de travail et 4 panneaux, une table de type B nécessite 2 heures de travail et 6 panneaux.
On désigne par x et y le nombre des tables respectivement de type A et de type B fabriquées en une journée.
① Calculer, en fonction de x et y, le temps de travail et le nombre des panneaux utilisés en une journée pour la fabrication de ces tables.
② On dispose quotidiennement d'un maximum de 120 heures de travail et de 300 panneaux. Ecrire les inéquations que doivent satisfaire les nombres x et y.
③ Représenter graphiquement les solutions du système suivant :

$$(S) : \begin{cases} x \geq 0 \text{ et } y \geq 0 \\ 3x + 2y \leq 120 \\ 2x + 3y \leq 150 \end{cases}$$

④ Est-il possible de fabriquer en une journée :
a) 40 tables de types A et 20 tables de type B ?
b) 20 tables de type A et 25 tables de type B ?
⑤ Le chef de l'atelier décide de fabriquer 30 tables de type A en une journée, déterminer le nombre maximal des tables de type B qu'il peut fabriquer.

13. A/ Représenter graphiquement dans un repère orthogonal (O,I,J) les solutions du système suivant :

$$(S) : \begin{cases} x + 2y \leq 12 \\ 2x + y \leq 10 \end{cases}$$

B/ Dans un magasin, on donne un billet de tombola à tout client achetant un paquet de 1 Kg de petits fours à 3 DT ou un paquet de chocolat de 500 g à 6 DT.
Une cliente dispose de 24 DT et elle ne peut pas porter une quantité dépassant 5 Kg.
① Soit n et m les nombres respectifs des paquets de petits fours et de chocolat. Vérifier que (n,m) est une solution du système (S).

② Soit k le nombre des billets de tombola.
a) Exprimer k en fonction de n et m.
b) Soit la droite Δ_k : x + y = k. Représenter dans le même repère (O,I,J) la droite Δ_{10}.
c) La cliente peut-elle avoir 10 billets de tombola ?
③ Déterminer l'achat que doit faire la cliente pour avoir le maximum de billets de tombolas sachant qu'elle a acheté au moins un paquet de chaque sorte.

14. Une entreprise fabrique deux types de produits A et B en utilisant deux machines M_1 et M_2.
Pour fabriquer le produit A, il faut utiliser la machine M_1 pendant 2 heures et la machine M_2 pendant 4 heures.
Pour fabriquer le produit B, il faut utiliser la machine M_1 pendant 3 heures et la machine M_2 pendant 1 heure.
La machine M_1 est disponible 90 heures par mois et la machine M_2 est disponible 120 heures par mois.
En désigne par x le nombre de produits A et par y le nombre de produits B fabriqués pendant un mois.
① Déterminer, en fonction de x et de y, l'expression du temps utilisé, en heures, de la machine M_1, puis l'expression du temps d'utilisation de la machine M_2 pendant un mois de fabrication.
② a) Ecrire le système des inéquations que doivent satisfaire les nombres x et y.
b) Déterminer graphiquement les solutions de ce système.
③ L'entreprise décide de fabriquer 20 produits B en un mois, déterminer le nombre maximal de produits A qu'elle peut fabriquer.
④ Les bénéfices dégagés par la vente des produits sont 40 DT pour A et 30 DT pour B.
Déterminer la production permettant d'obtenir le bénéfice mensuel maximum et calculer ce bénéfice.

15. Déterminer les solutions éventuelles des systèmes suivants :

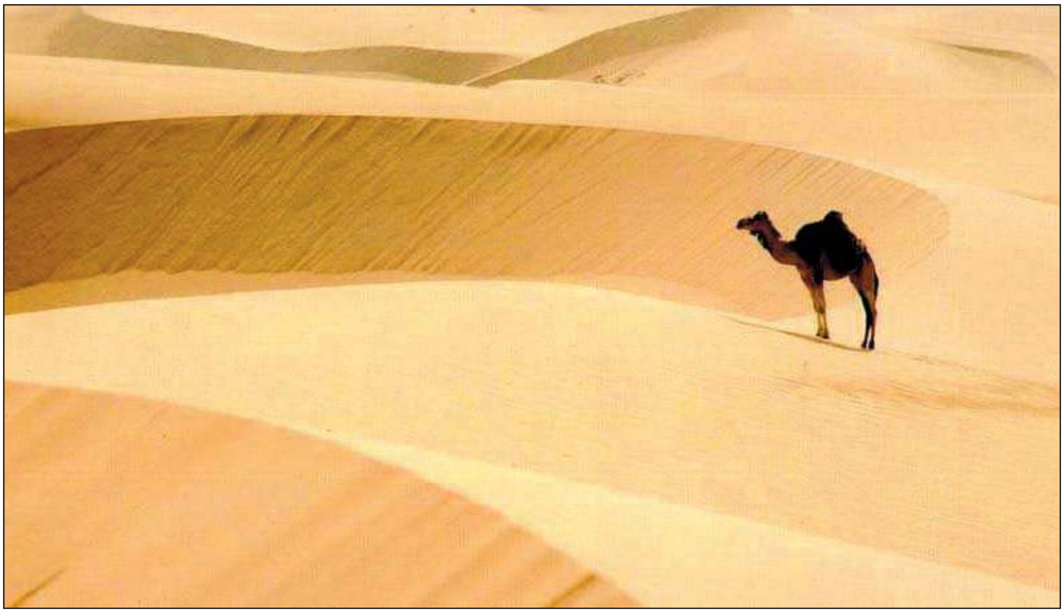
$$(S_1) : \begin{cases} 2x + y - z = 3 \\ 4x - 2y + z = -1 \\ 2x - 3y + 2z = -4 \end{cases} \qquad (S_2) : \begin{cases} a + b + 2c = 4 \\ 2a + b - 4c = -3 \\ 3a - 2b - 2c = 5 \end{cases}$$

16. A l'occasion de son $40^{\text{ème}}$ anniversaire, les enfants veulent offrir à leur mère un bouquet de 40 fleurs, composé d'iris de roses et d'œillets.
Un iris coûte 0,8 DT, une rose coûte 0,6 DT et un œillet coûte 1 DT.
Combien les enfants ont-t-ils acheté d'iris, de roses et d'œillets sachant que la somme des iris et des œillets est égale au nombre des roses et que le prix de revient du bouquet est de 29,6 DT ?

17. Au théâtre, le prix normal d'un billet d'entrée est de 20 DT.
Un groupe de 25 personnes va au théâtre, certains parmi eux paient 20 DT, d'autres peuvent bénéficier d'une réduction de 10% et d'autres peuvent bénéficier d'une réduction de 20%. Pour les 25 entrées le groupe a payé 452 DT et la somme payée par ceux qui ont bénéficié d'une réduction est 292 DT.
Trouver le nombre de billets de chaque type.

Chapitre 7

Problèmes du second degré



Dans le désert, le vent sculpte souvent des dunes parfaitement paraboliques

Sommaire

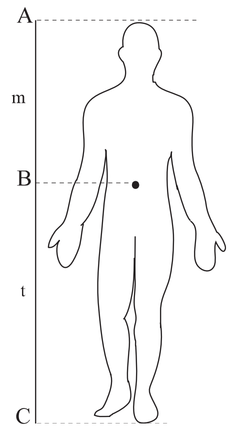
« Seul deux choses sont infinies : l'univers et la bêtise humaine.»

Albert Einstein

Nombre d'or

1,618 est une valeur approchée des rapports $\frac{AC}{BC} = \frac{BC}{AB}$.
(Pour commencer chapitre 2)

Etant donné un segment [AC]. Il est toujours possible de trouver un point B de ce segment vérifiant $\frac{AC}{BC} = \frac{BC}{AB}$ c'est-à-dire $\frac{t}{m} = \frac{t+m}{m}$.



Si on note $\frac{t}{m} = \varphi$ alors on aura $\frac{\varphi m}{m} = \frac{\varphi m + m}{\varphi m}$ ou encore $\varphi = \frac{1+\varphi}{\varphi}$.

Ainsi le rapport $\frac{AC}{BC}$ est une solution de l'équation $x^2 = x + 1$.
Dans ce chapitre, on démontrera que $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ est la seule solution positive de l'équation $x^2 = x + 1$.

1,618 est l'arrondi au millième du nombre d'or φ.

I. Introduction

Ensemble de définition

Activité 1

① Soit f la fonction affine définie par $f(x) = -3x + 1$.
Déterminer l'ensemble de définition de f.

② Soit g la fonction affine par intervalles définie par :

$$g(x) = \begin{cases} 7x - 16 & \text{si } x \in [1,2] \\ -x & \text{si } x \in]2,+\infty[\end{cases}$$

Déterminer l'ensemble de définition de g.

③ Avec une vitesse constante de 60Km/h, la distance parcourue d (en Km) est une fonction du temps t et on a $d(t) = 60t$.

Déterminer l'ensemble de définition de d.

④ Le coût de production C d'un produit est fonction du nombre d'exemplaires n et on a $C(n) = 200n + 5000$.
Déterminer l'ensemble de définition de C.

Le procédé qui à chaque réel x fait correspondre au plus un réel, appelé image de x, permet de définir une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ et on note :

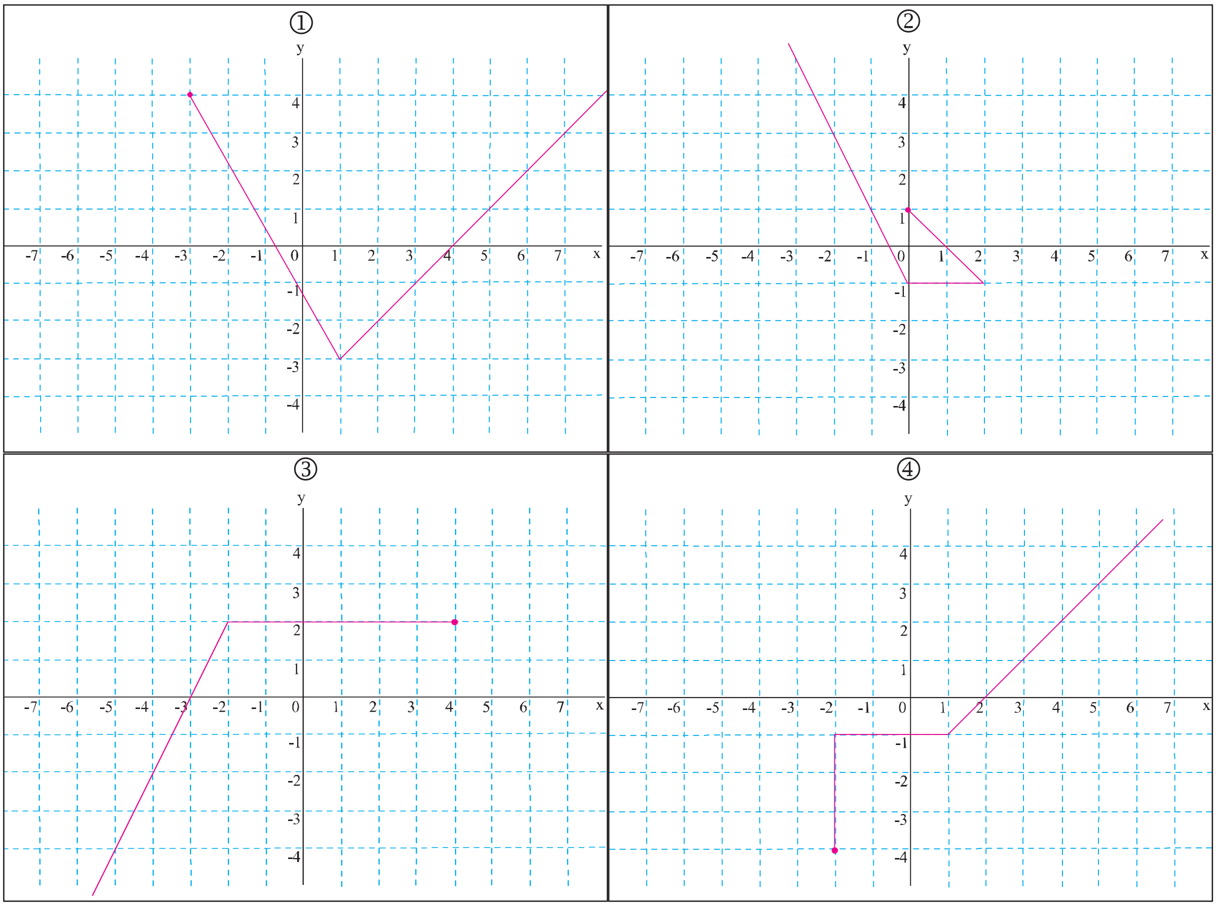
$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto f(x)$$

L'ensemble de tous les réels x qui ont une image par f s'appelle ensemble de définition de f.
Si D_f est l'ensemble de définition de f, on dit que f est définie sur D_f.

Activité 2

Pour chacune des courbes suivantes, préciser si elle est la courbe représentative d'une fonction. Si oui déterminer l'ensemble de définition de cette fonction.

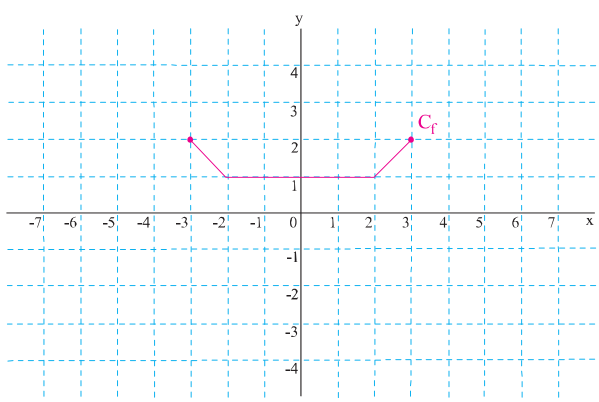
Le plan étant rapporté à un repère (O,I,J) et soit f une fonction définie sur D_f. L'ensemble des points $M(x,f(x))$ pour $x \in D_f$ est la courbe représentative de f dans le repère (O,I,J).
Cette courbe étant notée C_f, on dit que $y = f(x)$ est une équation de C_f.



Fonction paire - Fonction impaire

Activité 3

A. La courbe C_f ci-contre est la représentation graphique d'une fonction f dans un repére orthogonal.



① Déterminer l'ensemble de définition D_f de f.

② C_f admet-elle un élément de symétrie ? Si oui lequel?

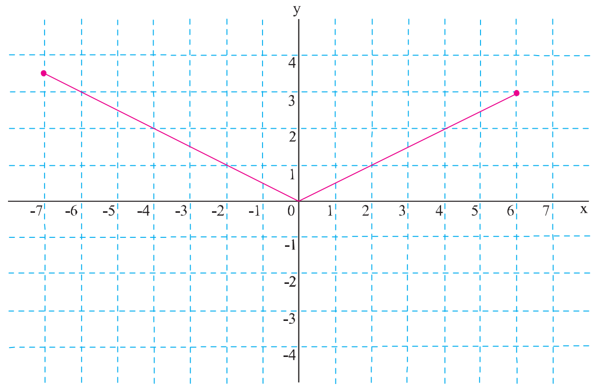
③ Vérifier que pour tout $(x \in D_f)$ on a $(-x \in D_f)$, puis comparer graphiquement f(x) et f(-x).

B. La courbe ci-contre est la représentation graphique d'une fonction g dan un repére orthogonal .

① Déterminer l'ensemble de définition D_g de g.

② Soit $x \in D_g$, (-x) appartient-il à D_g ?

③ C_g admet-elle un élément de symétrie ?



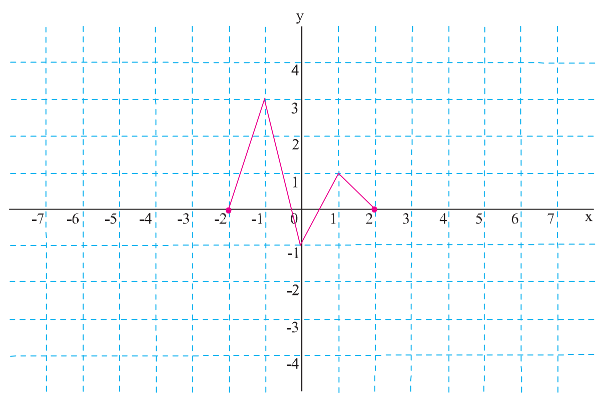
C. La courbe ci-contre est la représentative graphique d'une fonction h .

① Déterminer l'ensemble de définition D_h de h.

② Soit $x \in D_h$, (-x) appartient-il à D_h ?

③ Donner un réel x de D_h tel que $h(-x) \neq h(x)$.

④ C_h admet-elle un élément de symétrie ?



Définition

Soit f une fonction définie sur D_f .
On dit que f est une fonction paire si pour tout réel x de D_f, $(-x) \in D_f$ et $f(-x) = f(x)$.

Soit f une fonction définie sur D_f et C_f sa courbe représentative dans un repère orthogonal.
(f est une fonction paire) équivaut à (l'axe des ordonnées est un axe de symétrie pour C_f).

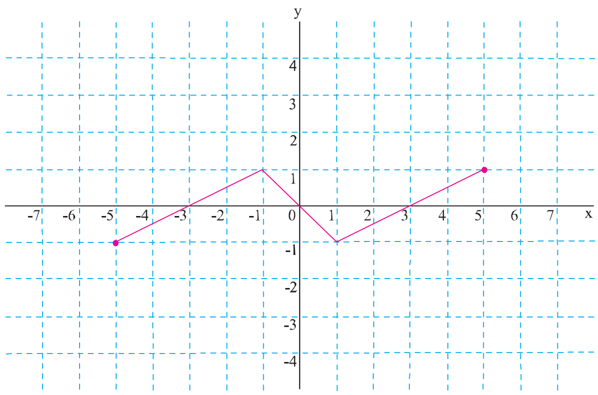
Activité 4

A. La courbe ci-contre est la représentation graphique d'une fonction f dans un repére orthogonal.

① Déterminer l'ensemble de définition D_f de f.

② C_f admet-elle un élément de symétrie ? Si oui lequel ?

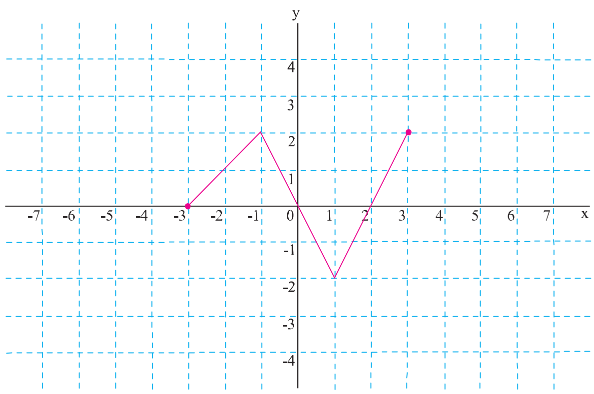
③ Vérifier que pour tout ($x \in D_f$), on a ($-x \in D_f$), puis comparer graphiquement f(x) et f(-x).



B. La courbe ci-contre est la représentation graphique d'une fonction g dans un repére orthogonal.

① Déterminer l'ensemble de définition D_g de g.

② C_g admet-elle un élément de symétrie ?



Définition

Soit f une fonction définie sur D_f.
On dit que f est une fonction impaire si pour tout réel x de D_f, $(-x) \in D_f$ et $f(-x) = -f(x)$.

Soit f une fonction définie sur D_f et C_f sa courbe représentative dans un repère orthogonal.
(f est une fonction impaire) équivaut à (le centre du repère est un centre de symétrie pour C_f).

Activité 5

Le plan est muni d'un repère orthogonal (O,I,J).
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x - 1 & \text{si } x \in]-\infty,0] \\ \frac{1}{2}x - 1 & \text{si } x \in]0,+\infty[\end{cases}$$

① a) Tracer dans (O,I,J) la courbe C de f.
b) Vérifier que C admet un axe de symétrie que l'on précisera.

② a) Soit A (0,-1), B (-2,0) et C (2,0). Placer les points A′, B′ et C′ images respectifs de A , B et C par la translation de vecteur $2\overrightarrow{OJ}$.

b) La réunion des demi droites [A′ B′) et [A′ C′) est la représentation graphique d'une fonction g. Exprimer g(x) en fonction de x.

La courbe représentative de g dans le repére (O,I,J) est l'image de la courbe représentative de f par la translation de vecteur $2\overrightarrow{OJ}$.

II. Les paraboles

Fonction du type $x \mapsto ax^2$

Activité 1

Soit p la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $p(x) = x^2$.
① a) Montrer que p est une fonction paire.
b) Montrer que p est croissante sur [0, +∞[.
② Sur un papier millimétré et dans un repère orthogonal (O,I,J), tracer la courbe représentative C_f de la fonction affine par intervalles définie par :

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in [0,1] \\ 3x - 2 & \text{si } x \in]1,2] \\ 5x - 6 & \text{si } x \in]2,+\infty[\end{cases}$$

③ On désigne par (P) la courbe représentative de p dans le même repère (O,I,J).

a) Marquer sur le même repère et avec une autre couleur les points de (P) d'abscisses respectives 0, 1, 2 et 3.

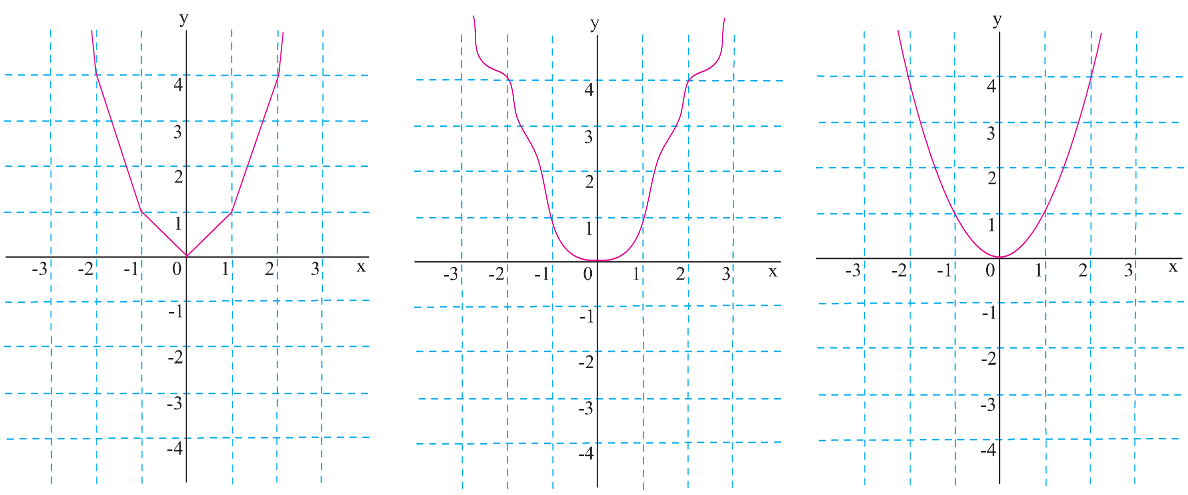
b) Marquer le point de coordonnées $\left(\frac{1}{2}, p\left(\frac{1}{2}\right)\right)$.

c) Marquer le point de coordonnées $\left(\sqrt{2}\,,\ p\left(\sqrt{2}\right)\right)$.

d) • Déterminer le signe de $(x - 2)(x - 3)$ pour $x \in [2,3]$ et $x \in [3,+\infty[$.

• Développer $(x - 2)(x - 3)$ puis déduire la position relative de (P) et C_f pour $x \in [2,3]$ et pour $x \in [3,+\infty[$.

e) Une des représentations graphique suivantes est celle de la fonction p. Laquelle ?



f) Achever alors la représentation graphique de p.

La courbe représentative de la fonction $x \longmapsto x^2$ dans un repére orthogonal (O,I,J) est une parabole d'équation $y = x^2$.

Remarque

- Lorsque x est positif et « très grand » c'est à dire supérieur à un réel « très grand » A, alors $x^2 > A^2$, c'est à dire x^2 est aussi « très grand ».
On traduit ce fait en disant que la fonction p a pour limite $(+\infty)$ lorsque x tend vers $(+\infty)$.

- Lorsque x est négatif « très grand » en valeur absolue, x^2 est « très grand » et positif.
On traduit ce fait en disant que la fonction p a pour limite $(+\infty)$ lorsque x tend vers $(-\infty)$.

Activité 2

① Tracer dans un repére orthogonal (O,I,J) la parabole (P) d'équation $y = x^2$.
② Soit f la fonction définie par $f(x) = -x^2$ et C_f sa courbe représentative dans le même repère (O,I,J).
a) Placer les points A , B et C de (P) d'abscisses respectives (-1), 1 et 2.
b) Placer les points A′, B′ et C′ de C_f d'abscisses respectives (-1), 1 et 2.
c) Soit a un réel, M le point de (P) d'abscisse a et M'(a,f(a)). Vérifier que M et M' sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses.Déduire C_f à partir de (P).
d) Déterminer graphiquement les variations de f, la parité de f, les limites de f en $(-\infty)$ et en $(+\infty)$ et l'axe de symétrie de C_f.

Activité 3

① Tracer dans un repére orthogonal (O,I,J) la parabole (P) d'équation $y = x^2$.
② Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{1}{2}x^2$ et C_f sa courbe représentative dans le même repère (O,I,J).
a) Placer les points A , B et C de (P) d'abscisses respectives (-2), 2 et 3.
b) Placer les points A′ , B′ et C′ de C_f d'abscisses respectives (-2), 2 et 3.
c) Soit a un réel, M le point de (P) d'abscisse a, H(a,0).

Vérifier que $\overrightarrow{HM'} = \frac{1}{2}\,\overrightarrow{HM}$.

d) Construire alors C_f.

e) Déterminer graphiquement les variations de f, la parité de f, les limites de f en $(-\infty)$ et en $(+\infty)$ et l'axe de symétrie de C_f.

Activité 4

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -3x^2$ et C_g sa courbe représentative dans un repère orthogonal (O,I,J).

① a) Montrer que g est une fonction paire.

b) Etudier les variations de g sur $\mathbb{R}_+$.

② a) Tracer dans un repére orthogonal (O,I,J) la parabole (P) d'équation $y = x^2$.

b) Soit a un réel, M le point de (P) d'abscisse a, H(a,0) et M'(a,g(a)).

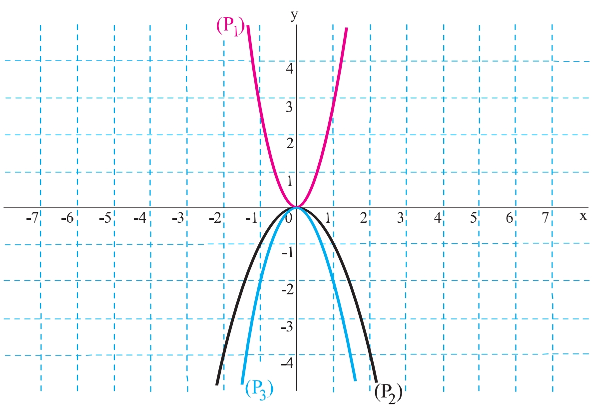
Vérifier que $\overrightarrow{HM'} = -3\overrightarrow{HM}$.

c) Construire alors C_g.

> La courbe représentative d'une fonction de type $x \longmapsto ax^2$ avec $a \in \mathbb{R}^*$ dans un repère orthogonal (O,I,J). est une parabole de sommet le point O et d'axe de symétrie la droite (OJ). On dit que c'est la parabole d'équation $y = ax^2$.

Activité 5

Les paraboles d'équations respectives $y = x^2$; $y = -2x^2$ et $y = 3x^2$ sont représentées sur la figure ci-contre. Identifier chacune d'elles.



Activité 6

A/ Représenter graphiquement dans un repère orthogonal, les fonctions

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto \frac{1}{4}x^2$ $\quad$ $x \mapsto 2x + 5$

B/ Pour un nombre de n machines fabriquées et vendues par une entreprise, on désigne par C(n) le coût de production exprimé en centaines de dinars et par R(n) le montant des recettes réalisées exprimé en centaines de dinars.

On admet que $C(n) = 2n + 5$ et $R(n) = 0{,}25n^2$.

① Calculer R(4) - C(4), R(16) - C(16) et interpréter les résultats obtenus.

② Déterminer graphiquement le nombre minimal de machines fabriquées et vendues pour que l'entreprise réalise un bénéfice ?

Fonction du type $x \mapsto ax^2 + b$

Activité 7

① Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -\frac{1}{2}x^2$.

a) Déterminer la parité de la fonction f.

b) Déterminer le sens de variation de f sur $\mathbb{R}_+$.

c) Tracer la courbe C_f de f dans un repère orthogonal (O,I,J).

② Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 5$ et C_g sa courbe représentative dans le même repère orthogonal (O,I,J).

a) Placer les points O'(0,g(0)), A(-1,f(-1)), A'(-1,g(-1)), B(2,f(2)) et B'(2,g(2)).

b) Vérifier que $\overrightarrow{OO'} = \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'} = 5\overrightarrow{OJ}$.

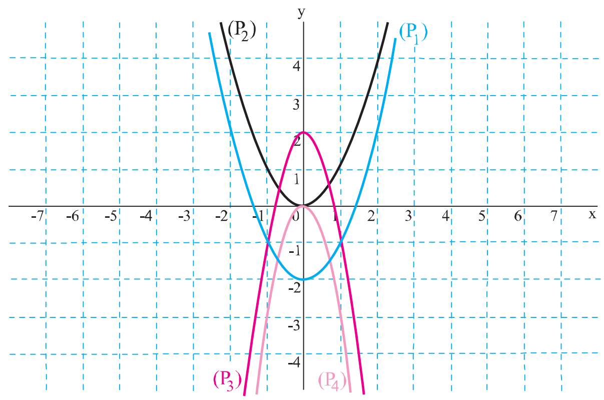
c) Soit a un réel, M(a,f(a)) et M'(a,g(a)). Vérifier que $\overrightarrow{MM'} = 5\overrightarrow{OJ}$.

d) En déduire une construction de la courbe C_g.

③ Tracer dans le même repère la courbe représentative de la fonction $h : x \mapsto -\frac{1}{2}x^2 + 7$.

Activité 8

Les fonctions $f : x \longmapsto x^2$, $g : x \longmapsto -3x^2$; $h : x \longmapsto x^2 - 2$ et $k : x \longmapsto -3x^2 + 2$ sont représentées sur la figure ci-contre.
Identifier leurs courbes représentatives parmi les paraboles (P_1) , (P_2) , (P_3) et (P_4).

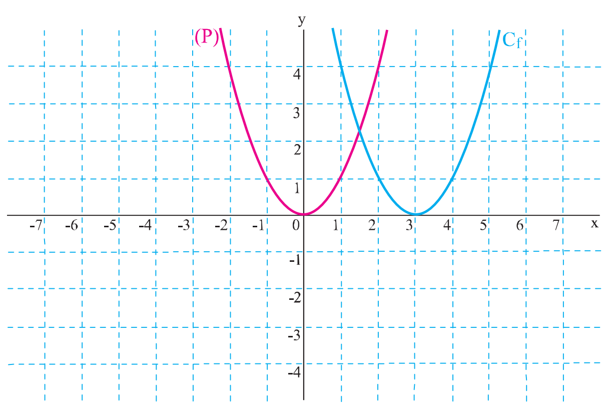


La courbe représentative d'une fonction de type $x \longmapsto ax^2 + b$ avec $a \in \mathbb{R}^*$ dans un repère orthogonal (O,I,J) est une parabole de sommet le point S (0,b) et d'axe de symétrie la droite (OJ). On dit que c'est la parabole d'équation $y = ax^2 + b$.

Fonction du type $x \longmapsto a(x+b)^2$

Activité 9

Dans la figure ci-contre, (P) est la parabole d'équation $y = x^2$, C_f la courbe représentative d'une fonction f.



① a) Déterminer graphiquement le réel f(t), pour chacune des valeurs suivantes du réel t :
t = 2, t = 3 et t = 5.
b) Comparer chacun des réels f(t) à l'ordonnée p(t) du point de la parabole (P) d'abscisse t.
② Soit A un point de (P), Tracer le point A′ image de A par la translation de vecteur $3\overrightarrow{OI}$.
Où se trouve A′ ?

Activité 10

① Tracer dans un repère orthogonal (O,I,J) la parabole (P) : $y = x^2$.

② Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x + 2)^2$ et C_f sa courbe représentative dans le même repère orthogonal (O,I,J).

a) Placer les points $A(1, f(1))$, $A'(-1, f(-1))$ et $O'(-2, f(-2))$.

b) Soit a un réel, B le point de (P) d'abscisse a et $B'(a-2,f(a-2))$.

Vérifier que $\overrightarrow{BB'} = -2\overrightarrow{OI}$.

c) Tracer alors C_f.

> La courbe représentative d'une fonction de type $x \longmapsto a(x + b)^2$ avec $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$ dans un repère orthogonal (O,I,J) est une parabole de sommet le point S(-b,0) et d'axe la droite $\Delta : x = -b$. On dit que c'est la parabole d'équation $y = a(x + b)^2$

Activité 11

① Tracer dans un repère orthogonal (O,I,J) la parabole (P) d'équation $y = (x + 1)^2$.

② Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (x + 1)^2 - 4$.

a) Utiliser (P) pour tracer la courbe C_g.

b) Déterminer les coordonnées des points d'intersection de C_g avec l'axe des abscisses.

c) Utiliser le graphique pour déterminer les réels x vérifiant $g(x) \leq 0$.

Activité 12

① Ouvrir un fichier « Graphmatica » (version 2.0 d).

② Ecrire en haut y = x^2 +1.

③ Cliquer sur le bouton pour construire la courbe représentative de la fonction $x \longmapsto x^2 + 1$.

④ cliquer deux fois sur l'un des axes pour faire apparaître la fenêtre « options du repère » et choisir les options que vous désirez ou cliquer sur le bouton pour choisir les options du repère par défaut.

⑤ Construire de même la courbe représentative de la fonction $x \longmapsto -2(x+ 1)^2$.

Pour transporter le graphique à un fichier Word :

Cliquer « Edition » / « copier en vectoriel » puis coller dans le fichier désiré.

III. Trinôme du second degré

Activité 1

① Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec a, b et c trois réels tels que $a \neq 0$. On pose $\Delta = b^2 - 4ac$. Vérifier que :

$$f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$$

② Calculer dans chacun des cas suivants le réel Δ et donner la forme canonique :

a) $f(x) = 3x^2 + 5x - 1$.

b) $g(x) = -3x^2 + 4x - 5$.

c) $h(x) = x^2 + x + 1$.

d) $k(x) = x^2 + 2x + 1$.

• L'expression $ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ s'appelle trinôme du second degré.

• L'écriture $a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$ s'appelle la forme canonique de ce trinôme.

Activité 2

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 4x + 2$ et C_f sa courbe représentative dans un repère orthogonal (O,I,J).

① Déterminer la forme canonique de f(x).

② Etudier les variations de f.

③ Tracer C_f.

La représentation graphique, dans un repère orthogonal, de la fonction $f : x \longmapsto ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ est la parabole d'axe la droite d'équation $x = -\frac{b}{2a}$ et de sommet $S\left(-\frac{b}{2a}, f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$. On dit que c'est la parabole d'équation $y = ax^2 + bx + c$.

Activité 3

① On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 + 240x + 1000$ et sa courbe représentative dans un repère orthogonal (on choisira 0,5 cm pour 20 en abscisses et 0,5 cm pour 1000 en ordonnées).
Tracer la courbe C_f.

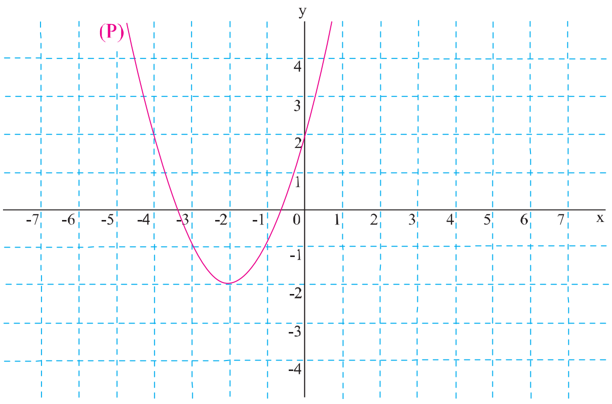
② Dans une entreprise le coût de fabrication (en DT) de n objets sont donnés par : $C(n) = 2n^2 + 240n + 1000$.
Déterminer graphiquement le nombre d'objets qu'on peut fabriquer de sorte que le coût ne dépasse pas 14000 DT.

Activité 4

La parabole (P) ci-contre est la représentation graphique d'une fonction f.

① Déterminer l'axe et le sommet de la parabole (P).

② Exprimer f(x) en fonction de x.



Activité 5

① a) Tracer dans un repère orthogonal parabole (P) d'équation $y = x^2 - 2x$.
b) Déterminer les coordonnées des points d'intersection de (P) avec l'axe des abscisses.

② a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $x^2 - 2x \geq 0$.
b) Expliquer comment on peut retrouver les solutions de l'inéquation $x^2 - 2x \geq 0$ à partir du graphique.

Positions relatives d'une parabole et d'une droite

Activité 6

On considère l'expression A (x) = $x^2 - 4x + 3$.

① Calculer A (-1), A $\left(-\frac{1}{2}\right)$, A (1), A (2), A (3) et A (4).

② On se propose de déterminer le signe de A (x).

a) Tracer dans un repère orthogonal la parabole (P) : $y = x^2 - 4x + 3$.
b) Utiliser le graphique pour déterminer les ensembles suivants :

$S_1 = \{x \in \mathbb{R}$ tel que $x^2 - 4x + 3 = 0\}$.

$S_2 = \{x \in \mathbb{R}$ tel que $x^2 - 4x + 3 \geq 0\}$.

$S_3 = \{x \in \mathbb{R}$ tel que $x^2 - 4x + 3 < 0\}$.

Activité 7

Tracer dans le même repère la parabole (P) : $y = x^2$ et les droites Δ et Δ' d'équations respectives $y = x - 3$ et $y = x + 1$.
① a) Préciser à partir du graphique la position relative de (P) par rapport à Δ.
b) Existe-t-il un réel x tel que $x^2 - x + 3 = 0$?

② a) Vérifier graphiquement que l'équation $x^2 - x - 1 = 0$ admet deux solutions.
b) Donner un encadrement, d'amplitude inférieur ou égal à 1 ,de chacune de ces deux solutions.

c) Vérifier que $x^2 - x - 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}$ puis déduire les valeurs exactes des solutions de l'équation $x^2 - x - 1 = 0$.
d) Préciser la position relative de la parabole (P) par rapport à Δ'.

Racines et signe d'un trinôme du second degré

Activité 8

① Déterminer suivant les valeurs du réel x le signe de :
a) $2x + 1$
b) $x^2 + 4$
c) $x^2 - 4x + 4$

② Soit f la fonction définie par $f(x) = 3x^2 + 2x - 1$.

a) Vérifier que f (x) peut s'écrire sous la forme $3(x + 1)\left(x - \frac{1}{3}\right)$.

b) Déterminer alors suivant les valeurs du réel x le signe de f(x).

Activité 9

Soit $P(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$.

On pose $\Delta = b^2 - 4ac$.

① Ecrire la forme canonique de P(x).

② On suppose que $\Delta < 0$:

Déterminer suivant les valeurs de x le signe de $\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$ et en déduire le signe de P (x) en fonction du signe de a.

③ On suppose que $\Delta \geq 0$:

a) Vérifier que $P(x) = a\left(x - \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x - \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}\right)$.

b) Déterminer alors les solutions de l'équation P (x) = 0 ainsi que le signe de P(x).

On pourra noter $x' = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x'' = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$.

c) déterminer $x' + x''$ et $x'.x''$

- P (x) = 0 s'appelle équation du second degré.
- $\frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $\frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ s'appellent les racines de P(x).
- $a(x-x')(x-x'')$ est une factorisation de P (x).

Soit $P : x \longmapsto ax^2 + bx + c$ avec a, b et c trois réels tels que $a \neq 0$.
Le signe de P(x) dépend du signe de a et du signe du réel $(b^2 - 4ac)$.
Le réel $b^2 - 4ac$ s'appelle discriminant du trinôme et se note Δ.

- Si $\Delta < 0$ alors pour tout réel x, $\begin{cases} P(x) \neq 0 \\ \text{et} \\ P(x) \text{ et } a \text{ sont de même signe} \end{cases}$

- Si $\Delta = 0$ alors $\begin{cases} \text{L'unique racine de } P(x) \text{ est } \dfrac{-b}{2a} \\ \text{et} \\ \text{pour tout } x \neq \dfrac{-b}{2a}, P(x) \text{ et } a \text{ sont de même signe} \end{cases}$

- Si $\Delta > 0$ alors :
$\begin{cases} P(x) \text{ admet deux racines } x' = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } x'' = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \\ \text{et} \\ P(x) \text{ a le signe de } (-a) \text{ entre les racines et le signe de } a \text{ à l'extérieur des racines} \end{cases}$

Remarque

Si l'équation $P(x) = 0$ admet deux racines x' et x'', alors $x' + x'' = \dfrac{-b}{a}$ et $x'.x'' = \dfrac{c}{a}$.

Activité 10

① Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a) $4x^2 - 3x - 1 = 0$.

b) $2x^2 + x + 1 = 0$.

c) $-\dfrac{1}{2}x^2 + 13x = 0$.

d) $x^2 - x + \dfrac{1}{4} = 0$.

e) $2005x^2 - 2004x - 1 = 0$ (On pourra remarquer que 1 est une racine).

f) $2x^2 + 17x + 15 = 0$ (On pourra remarquer que (-1) est une racine).

g) $-3x^2 + 10x - 7 = 0$.

② Déterminer les racines éventuelles et le signe des trinômes suivants :

a) $f(x) = 5x^2 + 3x + 6$.

b) $g(x) = x^2 - 5x + 4$.

c) $h(x) = -3x^2 + 7x - 9$.

d) $k(x) = -2x^2 + x + 1$.

e) $l(x) = x^2 - 2x + 1$.

Activité 11

① Calculer la somme des 100 premiers entiers naturels.

② Déterminer l'entier naturel non nul n tel que $1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + n = 1275$.

Activité 12

① Déterminer les réels x tel que

$\frac{x^2}{10} = 60 - x$.

② Une étude théorique a montré que lorsque le prix d'un certain produit électrique est de p DT, l'offre est de $\frac{p^2}{2}$ unités et la demande est de $(60 - p)$ unités. Quel doit être le prix du marché pour que l'offre et la demande soient égales ? (Equilibre du marché)

b) A ce prix, combien d'unités de ce produit les fabricants doivent-ils produire ?

En économie, le prix du marché p d'un produit détermine la demande, c'est-à-dire le nombre susceptible de consommateurs, ainsi que l'offre, c'est-à-dire le nombre d'unités que les fabricants mettent sur le marché.

Activité 13

Dans une entreprise, les coûts de fabrication (en DT) de q objets sont donnés par $C(q) = 0{,}1\,q^2 + 10q + 1500$.

Le prix de vente unitaire est 87 DT.

① Déterminer q pour que les coûts de fabrication soient égaux à 1610 DT.

② Pour quelles valeurs de q le bénéfice est-il nul ?

(On parle de points morts de la production).

• Soit f une fonction définie sur D_f et C_f sa courbe représentative dans un repère orthogonal.
(f est une fonction paire) équivaut à (l'axe des ordonnées est un axe de symétrie pour C_f).

• Soit f une fonction définie sur D_f et C_f sa courbe représentative dans un repère orthogonal.
(f est une fonction impaire) équivaut à (le centre du repère est un centre de symétrie pour C_f).

• La représentation graphique, dans un repère orthogonal, de la fonction $f : x \longmapsto ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ est la parabole d'axe la droite d'équation $x = -\frac{b}{2a}$ et de sommet $S\left(-\frac{b}{2a}, f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$.

• Soit $P : x \longmapsto ax^2 + bx + c$ avec a, b et c trois réels tels que $a \neq 0$.
Le signe de P(x) dépend du signe de a et du signe du réel $(b^2 - 4ac)$.
Le réel $b^2 - 4ac$ s'appelle discriminant du trinôme et se note Δ.

Si $\Delta < 0$ alors pour tout réel x, $\begin{cases} P(x) \neq 0 \\ \text{et} \\ P(x) \text{ et } (a) \text{ sont de même signe} \end{cases}$

Si $\Delta = 0$ alors $\begin{cases} \text{L'unique racine de } P(x) \text{ est } \frac{-b}{2a} \\ \text{et} \\ \text{pour tout } x \neq \frac{-b}{2a}, P(x) \text{ et } (a) \text{ sont de même signe} \end{cases}$

Si $\Delta > 0$ alors $\begin{cases} P(x) \text{ admet deux racines } x' = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } x'' = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \\ \text{et} \\ P(x) \text{ a le signe de } (-a) \text{ entre les racines et le signe de } (a) \text{ à} \\ \text{l'extérieur des racines} \end{cases}$

1. Soit f la fonction définie par $f(x) = -5x + 1$.
Déterminer l'ensemble de définition de f.

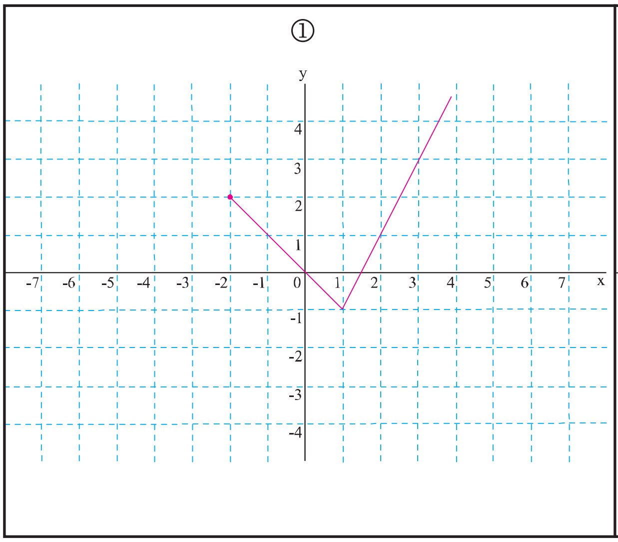
2. Dans une entreprise les coûts de fabrication en DT de n objets sont donnés par $C(n) = 50n + 1000$.
Déterminer l'ensemble de définition de C.

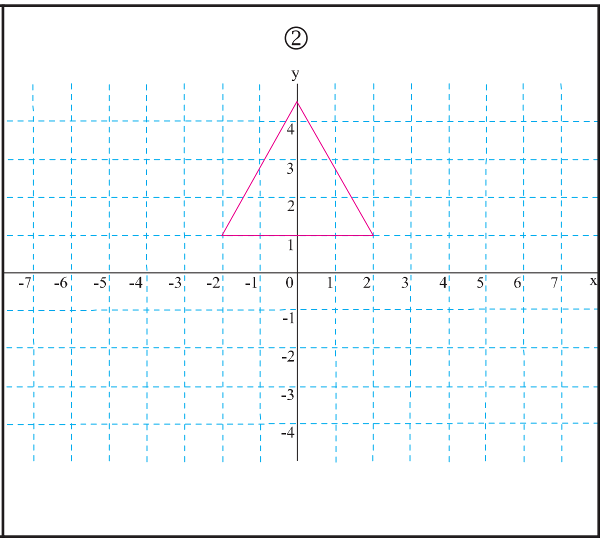
3. Soit la fonction affine par intervalles g définie par :

$$g(x) = \begin{cases} 2x - 3 & \text{si } x \in]-\infty,3[\\ -3x + 1 & \text{si } x \in [3,5] \end{cases}$$

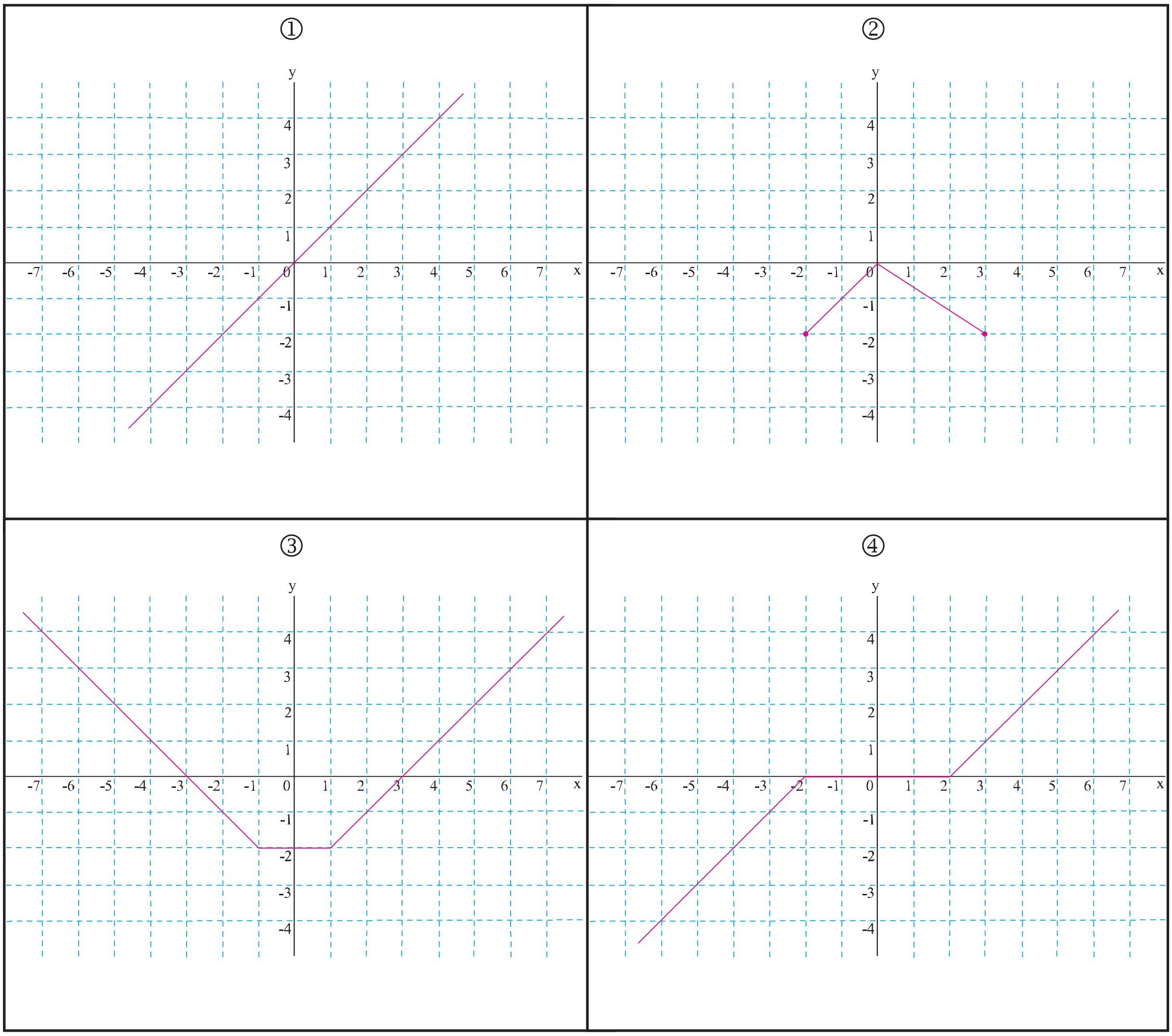
Déterminer l'ensemble de définition de g.

4. Préciser pour chacune des courbes ci-dessous si elle est la courbe représentative d'une fonction. Si oui déterminer son ensemble de définition.



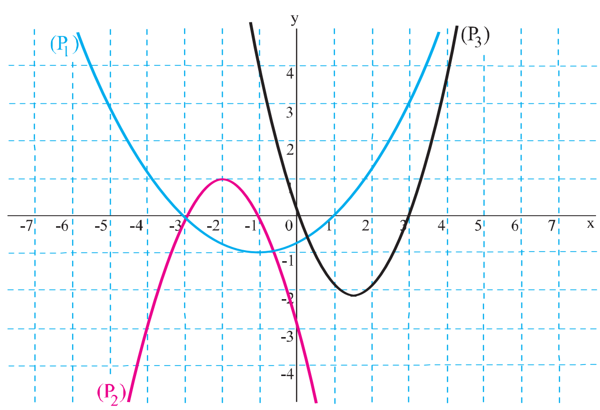


5. Préciser parmi les courbes ci-dessous celles qui représentent une fonction paire ou impaire :



6. Les fonctions $f : x \longmapsto x^2 - 3x$, $g : x \longmapsto \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}$ et $h : x \longmapsto -x^2 - 4x - 3$ sont représentées sur la figure ci-contre.

Identifier leurs courbes représentatives parmi les paraboles (P_1) , (P_2) et (P_3).



7. Soit la fonction f : $x \longmapsto -x^2 + 2x + 1$.
① Déterminer l'ensemble de définition de f.
② Etudier les variations de f sur $]-\infty,1]$ et $[1,+\infty[$.
③ Construire la courbe C_f de la fonction f dans un repère orthogonal (O,I,J).

8. Soit f la fonction définie par $f(x) = 2x^2 + 3$.
① Montrer que f est une fonction paire.
② Etudier les variations de f sur $\mathbb{R}_+$.
③ Construire dans un repère orthogonal la courbe représentative C_f de f.
④ Soit g la fonction définie par g (x) = x + 1. Construire dans le même repère orthogonal la courbe représentative C_g de g.
③ Déterminer graphiquement l'ensemble suivant : $E = \{x \in \mathbb{R} \text{ tel que } 2x^2 + 3 > x + 1\}$.

9. ① Soit f la fonction définie par $f(x) = -10x^2 + 900x - 2610$.
Construire dans un repère orthogonal (O,I,J) la courbe représentative C_f de f.
② Une usine fabrique et vend des boîtes de jeu pour enfants. Après la fabrication et la vente de n centaines de boites de jeu, le bénéfice net réalisé en un mois s'exprime, en DT, par $B(n) = -10n^2 + 900n - 2610$ pour n compris entre 3 et 60. Utiliser la courbe C_f pour déterminer pour quel nombre de boîtes de jeu fabriquées et vendues, le bénéfice réalisé par cette usine est-il maximal ?
Préciser la valeur, en DT, du bénéfice mensuel maximal.

10. ① a) Soit f la fonction définie par $f(x) = 0{,}1x^2 - 2x + 20$.
Construire dans un repère orthogonal (O,I,J) la courbe représentative C_f de f.
(Il est recommandé d'utiliser un papier millimétré).
b) Soit g la fonction définie par $g(x) = 3{,}4x$.
Construire dans le même repère orthogonal la courbe représentative C_g de g.
c) Déterminer graphiquement la position relative de C_f et C_g.
② Une entreprise fabrique chaque jour une quantité q d'objets. Le coût de production de la fabrication de ces q objets, exprimé en DT, est donné par :
$C(q) = 0{,}1\,q^2 - 2q + 20$.
a) Déterminer le nombre d'objets qu'on peut fabriquer avec un coût minimal.
b) Le prix de vente d'un objet est de 3,4 DT. Déterminer en fonction de q le montant journalier V(q) reçu par l'entreprise pour la vente de q objets.
c) Déterminer le nombre d'objets qu'il faut fabriquer et vendre pour réaliser un bénéfice journalier.

11. On considère des terrains rectangulaires de périmètre 120 mètres.
Parmi tous ces terrains, on se propose de déterminer celui d'aire maximale.

① Montrer que si x désigne une des deux dimensions du terrain rectangulaire, son aire vaut $x(60 - x)$.

② Soit la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x) = -x^2 + 60x$.

a) Construire la courbe représentative C_f de f dans un repère orthogonal (O,I,J).

b) En déduire l'aire maximale d'un terrain rectangulaire de périmètre 120 m.

12. Une entreprise fabrique et vend chaque jour une quantité n d'objets.
Le coût de production de la fabrication de ces objets, exprimé en DT, est donné par $C(n) = n^2 + 100$.
Le prix de vente d'un objet est de 40 DT.

① Exprimer en fonction de n, le montant V(n) reçu par l'entreprise pour la vente des n objets.

② Déterminer en fonction de n, Le bénéfice journalier B(n).

③ Soit f la fonction définie par $f(x) = -x^2 + 40x - 100$ et C_f sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

a) Construire C_f.

b) En déduire le nombre d'objets qu'il faut fabriquer et vendre pour réaliser un bénéfice journalier maximal.

13. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

① $x^2 - 4x + 2 = 0$.

② $2x^2 + 3x + 1 = 0$.

③ $-5x^2 + 2x = -1$.

④ $9x^2 + 6x + 1 = 0$.

14. Déterminer pour chacune des trinômes suivants leurs racines éventuelles et leurs signes :

① $f(x) = 5x^2 - 2x - 3$.

② $g(x) = 2x^2 - 5x + 4$.

③ $h(x) = -9x^2 + 12x - 4$.

Chapitre
8

Exemples de fonctions de références

Comment l'araigné tisse-t-elle sa toile suivant des courbes?

Sommaire

« Je rêve d'un jour où l'égoïsme ne régnera plus dans les sciences, où on s'associera pour étudier, au lieu d'envoyer aux académiciens des plis cachetés, on s'empressera de publier ses moindres observations pour peu qu'elles soient nouvelles, et on ajoutera " je ne sais pas le reste" »

Évariste Galois (1811-1832)

De l'infinement petit à l'infinement grand

Le sang humain est composé, entre autres, de globules rouges. La forme d'un globule rouge est assimilable à celle d'un cylindre dont la base circulaire a pour diamètre 7×10^{-3} millimètre et la hauteur est 3×10^{-3} millimètre.

1 millimètre cube de sang contient 4 500 000 globules rouges.

Dans le corps humain il y a environ 6 litres de Sang, c'est-à-dire 27×10^{12} globules rouges.

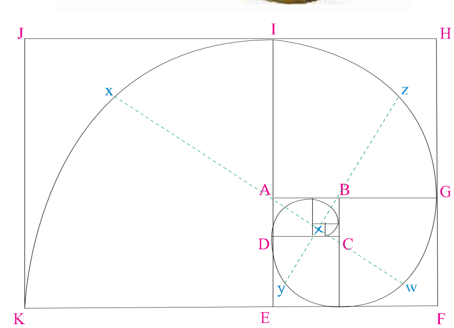
Si on met tous les globules rouges, les uns à coté des autres, on obtient une file dont la longueur est de 81 000 kilomètres (deux fois le périmètre de la terre).

Les fractales

Certaines formes rencontrées dans la nature, comme ce nautile ci-contre, possèdent une structure propre qui se répète. Leur analyse a conduit les mathématiciens à les modéliser. Ainsi ont été crées les fractales, courbes calculées et identiques à elles-mêmes lorsque l'on fait un zoom sur une partie.

$$\frac{IJ}{IH} = \frac{GH}{GF} = \frac{BG}{BA} = \frac{DE}{DA} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Encore le nombre d'or !



I. Fonction du type $x \longmapsto ax^3$ $(a \neq 0)$

Activité 1

On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \longmapsto x^3$

On désigne par C_f sa courbe représentative dans un repère orthogonal (O,I,J).

① a) Etudier la parité de f.

b) Etudier le sens de variation de f sur $\mathbb{R}_+$.

② a) Tracer dans le repère (O,I,J), la parabole (P) d'équation $y = x^2$.

b) Marquer, avec une autre couleur, les points de coordonnées (0,f(0)), $(\frac{1}{2}, f(\frac{1}{2}))$, (1,f(1)) et (2,f(2)).

c) Etudier la position relative de C_f et (P) pour $x \geq 0$.

d) Marquer d'autres points de la courbe C_f d'abscisses positives puis tracer C_f.

e) Déterminer graphiquement les limites de f en $(+\infty)$ et en $(-\infty)$.

Activité 2

① Tracer dans un repère orthogonal la courbe représentative C_f de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$.

② Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -x^3$.

a) Utiliser C_f pour construire C_g.

b) En déduire les variations de g.

③ Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = -\frac{1}{2}x^3$.

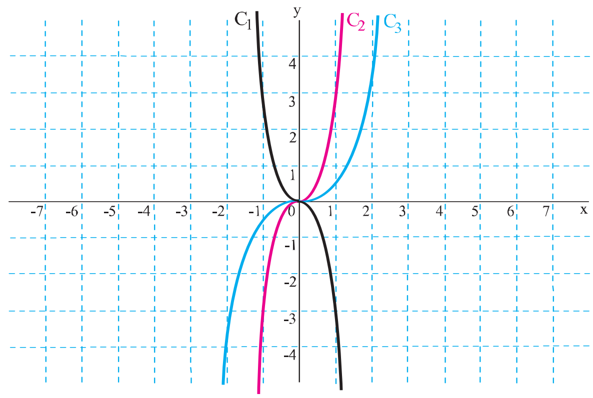
a) Etudier les variations de h sur $\mathbb{R}$.

b) Tracer dans le même repère la courbe représentative C_h de h.

Activité 3

Les fonctions $f : x \longmapsto 3x^3$; $g : x \longmapsto \dfrac{1}{2}x^3$ et $h : x \longmapsto 3x^3$ sont représentées sur la figure ci-contre.

Identifier leurs courbes représentatives parmi C_1 , C_2 et C_3.



II. Fonction $x \longmapsto \sqrt{x}$

Activité 1

On sait que tout réel positif ou nul possède une racine carrée. On peut donc considérer une fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ qui à tout réel positif ou nul associe sa racine carré, ainsi la fonction $f : x \longmapsto \sqrt{x}$ est définie sur $\mathbb{R}_+$.
On désigne par C_f sa courbe représentative dans un repère orthogonal (O,I,J) .

① Déterminer le sens de variation de f.

② Marquer quelques points de C_f et tracer C_f.

Activité 2

① Tracer dans un repère orthogonal la courbe représentative C_f de la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{x}$.

② En déduire dans le même repère les courbes représentatives C_g et C_h des fonctions g et h définies par $g(x) = \sqrt{x} + 2$ et $h(x) = \sqrt{2x}$.

Activité 3

Une entreprise fabrique un produit. Pour une période donnée le coût de production (en DT), est donné en fonction du nombre d'articles fabriqués par $C(q) = 3800 + \sqrt{10q}$ pour $0 < q < 80$.
Lorsque tous les articles fabriqués sont vendus, la recette totale est donnée par $R(q) = 100q$. Le bénéfice total est alors $B(q) = R(q) - C(q)$.
On se propose de déterminer le nombre q d'articles à produire et à vendre pour que la production soit rentable, c'est-à-dire pour que $B(q) > 0$.
① Soit les fonctions $f(x) : x \longmapsto 3800 + \sqrt{10x}$ et $g(x) : x \longmapsto 100x$.
Représenter graphiquement dans un repère orthogonal (O,I,J) les fonctions f et g. (On prendra 1 cm pour 10 sur l'axe des abscisses et 1 cm pour 5000 sur l'axe des ordonnées)
② a) Déterminer graphiquement la position relative de C_f par rapport à C_g.
b) Indiquer pour quels nombres d'articles produits la production est rentable.

III. Fonction du type $x \longmapsto \frac{a}{x}$ $(a \neq 0)$

Activité 1

(Dans cette activité on utilisera un papier millimétré)
On sait que tout réel non nul possède un inverse, donc on peut définir une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ qui à tout réel non nul associe son inverse, ainsi la fonction $f : x \longmapsto \frac{1}{x}$ est définie sur $\mathbb{R}^*$.
① Soit a et b deux réels strictement positifs tels que $a < b$.
Comparer $\frac{1}{a}$ et $\frac{1}{b}$ et en déduire le sens de variation de f sur $\mathbb{R}^*_+$.
② Placer dans un repère orthogonal les points de coordonnées $(1,f(1))$, $(2,f(2))$, $(\frac{1}{2},f(\frac{1}{2}))$, $(4,f(4)$ et $(\frac{1}{4},f(\frac{1}{4}))$. Essayer de joindre ces points sans lever la main.

③ a) Tracer la droite $\Delta : y = \frac{1}{4}$

b) Soit $x > 4$ comparer $f(x)$ et $f(4)$ et en déduire la position relative de C_f et Δ pour $x > 4$.

c) Existe-t-il un réel x tel que $f(x) = 0$? La courbe C_f peut-elle couper l'axe des abscisses ?

d) Tracer alors la partie de la courbe C_f pour $x \geq 4$.

④ a) Tracer $\Delta' : x = \frac{1}{4}$.

b) Soit $0 < x < \frac{1}{4}$ comparer $f(x)$ et $f\left(\frac{1}{4}\right)$.

c) La courbe C_f peut-elle couper l'axe des ordonnées ?

d) Tracer la partie de la courbe C_f pour $0 < x \leq \frac{1}{4}$.

⑤ a) Montrer que f est impaire.

b) Achever alors la courbe C_f.

■ Soit A un réel strictement positif et « très grand », $\frac{1}{A}$ est donc un réel strictement positif et « très petit ».

On traduit ceci en disant que $\frac{1}{x}$ tend vers 0 par valeurs positives quand x tend vers $(+\infty)$, on dit que l'axe des abscisses est une asymptote à la courbe d'équation $y = \frac{1}{x}$.

■ Soit A un réel strictement positif et « très petit », $\frac{1}{A}$ est donc un réel strictement positif et « très grand ».

On traduit ceci en disant que $\frac{1}{x}$ tend vers $(+\infty)$ quand x est tend vers 0 par valeurs positives, on dit que l'axe des ordonnées est une asymptote à la courbe d'équation $y = \frac{1}{x}$.

Activité 2

Tracer dans le même repère orthogonal les courbes représentatives C_f et C_g des fonctions f et g définies par $f(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = -\frac{1}{x}$.

Activité 3

① Soit la fonction $f : x \longmapsto \frac{3}{x}$.

a) Etudier la parité de f.

b) Etudier le sens de variation de f sur $\mathbb{R}^*_+$.

c) Tracer dans un repère orthogonal (O,I,J) la courbe représentative C_f de la fonction f.

② Soit la fonction $g : x \longmapsto \frac{3 - 2x}{x}$ et C_g sa courbe représentative dans le même repère (O,I,J).

a) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction g.

b) Vérifier que pour tout réel non nul x, on a $g(x) = f(x) - 2$.

c) Utiliser C_f pour construire C_g.

d) Déterminer graphiquement les limites de g en $(+\infty)$ et en $(-\infty)$.

> La courbe représentative, dans un repère orthogonal (O,I,J), de la fonction $x \longmapsto \frac{a}{x}$ est une hyperbole de centre O et d'asymptotes les droites (OI) et (OJ).

Activité 4

Une entreprise produit des ordinateurs. Lorsqu'elle produit n ordinateurs $(1 \leq n \leq 10)$ on sait que :

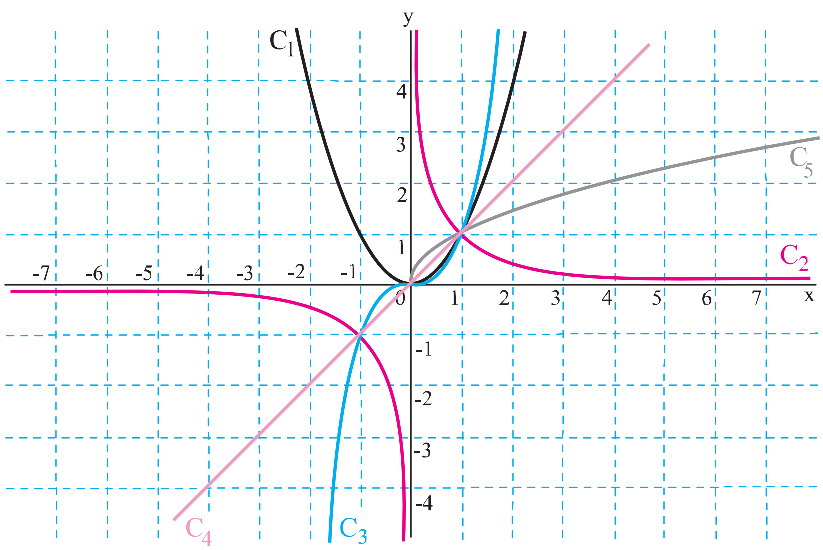
- Le coût unitaire de fabrication (main d'œuvre et matière première) est 600 (en DT).
- Le coût d'étude est $\frac{15000}{n}$ (en DT).
- Le coût total est la somme des coûts de fabrication et d'étude.

Soit g et h les fonctions définies sur [1,10] par $g(x) = 600x$ et $h(x) = \frac{15000}{x}$.

① Construire les représentations graphiques de g et h dans un repère orthogonal. (1 cm pour 5000 DT en ordonnée)
② Comparer suivant les valeurs de n le coût de fabrication au coût d'étude.

Activité 5

Les fonction $f : x \longmapsto x$; $g : x \longmapsto \dfrac{1}{x}$; $h : x \longmapsto x^2$; $k : x \longmapsto \sqrt{x}$; $\ell : x \longmapsto x^3$ sont représentées sur la figure ci-dessous.



① Identifier leurs courbes représentatives parmi les courbes C_1, C_2, C_3, C_4 et C_5.
② Ordonner suivant les valeurs de x, les expressions f(x), g(x), h(x), k(x) et ℓ(x).

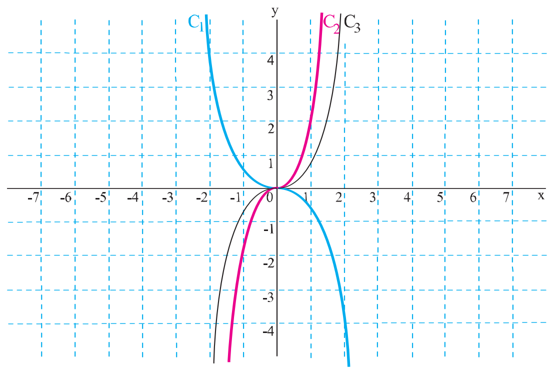
1. Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{1}{4}x^3$.

① Montrer que f est une fonction impaire.

② Etudier le sens de variation de f sur $\mathbb{R}_+$.

③ Construire la courbe C_f de f dans un repère orthogonal (O,I,J).

2. Les fonctions $f : x \longmapsto -\frac{1}{2}x^3$; $f : x \longmapsto 2x^3$ et $f : x \longmapsto \frac{3}{4}x^3$ sont représentées sur la figure ci-contre. Identifier leurs courbes représentatives parmi les courbes C_1, C_2 et C_3.



3. Une étude des conditions de production et de commercialisation d'une entreprise a montré que son coût total de fonctionnement journalier s'exprime (en DT) sous la forme $C(n) = \frac{1}{5}n^3 + 200$ où n désigne le nombre d'articles vendus par jour ($0 \leq n \leq 20$).

① Calculer C(0) ; C(5) ; C(10) et C(20).

② Soit C la fonction définie sur l'intervalle [0,20] par : $C(x) = \frac{1}{5}x^3 + 200$.
Représenter graphiquement la fonction C dans un repère orthogonal.
(On prend 1 cm pour 2 en abscisse et 1 cm pour 50 en ordonnée).

③ la recette total est de la forme R(n) = 55n. Représenter graphiquement dans le même repère la fonction définie sur [0,20] par R(x) = 55x.
A l'aide du graphique, déterminer la zone de rentabilité.

4. Tracer dans le même repère orthogonal C_f , C_g et C_h les courbes représentatives respectives des fonctions définies par $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = -\sqrt{x}$ et $h(x) = \sqrt{x} + 2$.

5. Soit la fonction $f : x \longmapsto \frac{-2}{x}$.

① Montrer que f est une fonction impaire.

② Etudier le sens de variation de f sur $\mathbb{R}^*_+$.

③ Tracer dans un repère orthogonal (O,I,J) la courbe représentative C_f de la fonction f.

④ Soit la fonction $g : x \longmapsto \frac{x - 2}{x}$ et C_g sa courbe représentative dans le même repère (O,I,J).
a) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction g.
b) Vérifier que pour tout réel non nul x, on a $g(x) = f(x) + 1$.
c) Utiliser C_f pour construire C_g.
d) Déterminer graphiquement les limites de g en $(+\infty)$ et en $(-\infty)$.

6. ① Sur le même dessin, représenter graphiquement les fonctions $f : x \longmapsto \frac{1}{2x}$; $g : x \longmapsto \frac{1}{x}$ et $h : x \longmapsto \frac{3}{2x}$.
② Dans quelle région du plan se situerait la courbe représentative de la fonction $k : x \longmapsto \frac{0,7}{x}$?

7. Une personne souhaite placer une somme S à un certain taux $\frac{t}{100}$ a fin d'obtenir 1500 DT d'intérêt annuel.
① Exprimer S en fonction de t.
② Représenter graphiquement la fonction définie sur [1 ; 20] qui, à chaque valeur de t, associe la somme S à placer.

8. ① a) Tracer dans un repère orthogonal la fonction f définie sur [1 ; 50] par $f(x) = -\frac{40}{x}$.
b) En déduire la représentation graphique de la fonction g définie sur [1 ; 50] par $g(x) = 50 - \frac{40}{x}$.
② Dans une usine, une étude porte sur le nombre quotidien d'objets que peut fabriquer un ouvrier au début d'apprentissage. Le $n^{\text{ème}}$ jour, cet ouvrier fabrique $\left(50 - \frac{40}{n}\right)$ objets.
a) Déterminer le nombre d'objets fabriqués au $2^{\text{ème}}$ jour, au $4^{\text{ème}}$ jour et au $10^{\text{ème}}$ jour.
b) A partir de quel jour le nombre d'objets fabriqués se stabilise ?

9. Le plan est rapporté à un repère orthogonal (O,I,J).
Soit M un point dont les coordonnées (x,y) sont strictement positives. On désigne par A le projeté orthogonal de M sur (OI) et B le projeté orthogonal de M sur (OJ).

① a) Quelle est la nature du quadrilatère OAMB.
b) Placer un point M de manière que l'aire du rectangle OAMB soit égale à 4.
② Déterminer et construire l'ensemble des points M de coordonnées (x,y) positives tels que l'aire du rectangle est constante et égale à 4.

10. Pour réaliser un lotissement, on forme des lots rectangulaires de superficie égale.

Soit S la mesure en m^2 de cette superficie, x et y les mesures en mètres des deux dimensions de ces lots rectangulaires.
① Exprimer y en fonction de x et S.
② Dans la suite de l'exercice, la superficie commune des lots est fixée à 625 m^2.
a) Calculer y pour les valeurs suivantes de x :x = 15 ; x = 25 ; x = 30 ; x = 45.
b) Lorsque le lot est carré, quelle est la mesure de son coté.
③ Dans un repère orthonormé (1 cm graphique représente 5 mètres).
Tracer la courbe C_f représentant la fonction f : $x \longmapsto \dfrac{625}{x}$ qui modélise la situation.
④ Afin d'éviter que certains des lots aient une de leurs dimensions inférieure à 15 mètres, on demande de :
a) Déterminer la condition que doit vérifier x pour que $f(x) \geq 15$.
b) Déterminer l'ensemble auquel doit appartenir x pour que les deux dimensions d'un lot rectangulaire soient supérieures ou égales à 15 mètres.
c) Sur la courbe C_f colorier la partie dont les points correspondent à des lots dont les deux dimensions soient supérieures ou égales à 15 mètres.

11. un produit est vendu habituellement dans les magasins (A) et (B) par barils de n kg, au prix de p (DT) le baril.
Dans le magasin (A), on fait une réduction de x% du prix du baril ($0 < x \leq 60$).
Dans le magasin (B), on offre y% de produit gratuit en plus pour l'achat d'un baril.
① Montrer que le prix du kg est le même dans le magasin (A) que dans le magasin (B) si et seulement si $\left(1 - \dfrac{x}{100}\right)\left(1+ \dfrac{y}{100}\right) = 1$.

② a) Ecrire la relation de la question ① sous la forme y = f(x) .
b) Préciser l'ensemble de définition de f.

c) Déterminer les variations de f.

d) Utiliser le Logiciel « Graphmatica » pour représenter graphiquement la fonction f .

e) Sachant que le magasin (A) a fait une réduction de 20%, déterminer les offres du magasin (B) pour que sa promotion soit la plus avantageuse.

f) Sachant que le magasin (B) offre 50% de produit gratuit, déterminer les réductions possibles du magasin (A) pour que sa promotion soit la plus avantageuse.