REPUBLIQUE TUNISIENNE
MINISTERE DE L'EDUCATION

MATHÉMATIQUES

2ème Année de l'Enseignement Secondaire

Sections : – Sciences
– Technologie de l'informatique

Tome 1

Auteurs

Ali Rahmouni
Inspecteur principal

Salah Marzougui
Inspecteur

Ahmed Hnaien
Professeur principal

Abdelaziz Oukhai
Professeur principal

Evaluateurs

Hikma Smida
Professeur universitaire

Mohamed lahbib Kefi
Inspecteur principal

Najiba M'hamdi
Inspectrice

Centre National Pédagogique

Rien ne sert à crier
quand on a raison

Remerciements

Nous remercions,

- *Les évaluateurs pour leurs remarques pertinentes, pour leur critique constructive et pour leur grande disponibilité.*
- *Les inspecteurs de mathématiques dont les remarques et les conseils ont été utiles à la réalisation de ce manuel.*

Présentation du manuel

Ce livre est conforme aux nouveaux programmes fixés par la loi d'orientation de l'éducation et de l'enseignement du 23 juillet 2002.

Exception faite du chapitre " Calcul dans IR ", chacun des autres chapitres comporte huit rubriques :

Pour démarrer

Cette rubrique aborde certains pré requis utiles à l'enseignement - apprentissage des nouvelles notions

Explorer

Les activités figurant dans cette rubrique ont pour objet un apprentissage progressif et graduel des nouvelles notions. Certaines de ces activités ont pour but de favoriser l'apprentissage de la modélisation et de l'application des mathématiques au monde réel.

Assimiler

Cette rubrique comporte des exercices d'applications directes. Leur but étant de favoriser un apprentissage autonome de l'élève et de lui fournir l'opportunité de se familiariser avec les nouvelles notions ainsi que de contrôler ses acquis de base.

Synthèse

Cette rubrique contient les résultats exigibles du programme pour une meilleure mémorisation des connaissances et des savoir faire essentiels.

Développer ses compétences

Cette rubrique comporte des situations dont le but est de permettre à l'élève

- D'approfondir les concepts
- De développer des raisonnements

tout en lui laissant une grande part d'autonomie et d'initiative.

Utiliser les T.I.C.

Cette rubrique est destinée à permettre aux élèves de chercher, expérimenter, conjecturer en utilisant la calculatrice ou un logiciel numérique ou géométrique

Exercices et problèmes

Les exercices sont variés et sont classés en deux catégories

Appliquer : Cette partie renferme des applications directes ou indirectes du cours et qui permettent aux élèves de s'entraîner et de se familiariser avec les différentes notions étudiées. Ces exercices qui présentent peu de difficultés devraient être faits par tous.

Maîtriser : Cette partie renferme des exercices et des problèmes qui permettent aux élèves la mobilisation de leurs compétences, le perfectionnement du raisonnement, la maîtrise du calcul, l'initiation à la recherche ...

Math et culture

C'est une rubrique de culture mathématique générale et qui n'est pas toujours en relation avec le chapitre étudié.

Projet de Répartition du programme de 2ème sciences

Premier trimestre	◆ Calcul dans IR ◆ Problèmes du premier et du second degré ◆ Notion de polynômes ◆ Arithmétique	◆ Calcul vectoriel ◆ Barycentre ◆ Translations ◆ Homothéties	
Deuxième trimestre	***2 heures par semaine***	***2 heures par semaine***	***1 heure par semaine***
	◆ Arithmétique (suite et fin) ◆ Suites arithmétiques ◆ Suites géométriques	◆ Rotations ◆ Trigonométrie ◆ Droites et plans de l'espace.	◆ Géométrie analytique ◆ Statistiques
Troisième trimestre	***2 heures par semaine***	***2 heures par semaine***	***1 heure par semaine***
	◆ Généralités sur les fonctions ◆ Fonctions de référence	◆ Parallélisme dans l'espace ◆ Orthogonalité dans l'espace	◆ Statistiques (suite et fin)

Cette répartition est proposée par les auteurs, à titre indicatif.

Sommaire

Il faut se mettre à l'eau pour apprendre à nager, pour savoir résoudre des problèmes, il faut en résoudre.

Georges Polya

Les ensembles de nombres

Activité 1

$\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels.
$\mathbb{Z}$ désigne l'ensemble des entiers relatifs.
$\mathbb{D}$ désigne l'ensemble des décimaux.
$\mathbb{Q}$ désigne l'ensemble des nombres rationnels.
$\mathbb{R}$ désigne l'ensemble des nombres réels.

Recopier et compléter le tableau ci-contre.
(La croix indique que le nombre appartient à l'ensemble)

	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{D}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{R}$
2,5			x	x	x
12					
$-\frac{2}{3}$					
$\sqrt{5}$					
$-\frac{63}{7}$					
π					
$\frac{5}{8}$					
$\frac{\sqrt{3}}{7}$					

Activité 2

Répondre par vrai ou faux.

a) $\sqrt{3} \in \mathbb{D}$; $\frac{5}{8} \in \mathbb{D}$; $-23 \in \mathbb{Q}$; $-23 \in \mathbb{Z}$; $\sqrt{36} \notin \mathbb{N}$; $6{,}13 \notin \mathbb{D}$; $1{,}98 \in \mathbb{Q}$; $\sqrt{7} \in \mathbb{Q}$

$\frac{3}{11} \in \mathbb{Q}$; $\frac{27}{3} \notin \mathbb{N}$; $\frac{2}{9} \in \mathbb{D}$

b) $\mathbb{N} \subset \mathbb{D}$; $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$; $\mathbb{Q} \subset \mathbb{D}$; $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

Activité 3

1) Calculer $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$, en déduire sans calcul la valeur de $\frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12}$.

2) Trouver quatre entiers naturels a, b, c et d distincts tels que $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} = 1$.

3) Trouver cinq entiers naturels a, b, c, d et e distincts tels que $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} + \frac{1}{e} = 1$.

Activité 4

Quels termes faut-il enlever à la somme

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \frac{1}{10} + \frac{1}{12}$$

pour que la somme des termes restants soit égale à 1 ?

Activité 5

Soient $a = \dfrac{4009275}{2314756}$ et $b = \dfrac{847754}{489451}$

1) Sans faire de calcul, prouver que $a \neq b$.

2) Qu'affiche la calculatrice pour les valeurs de a et b ?

3) Répondre aux mêmes questions pour

$a = \dfrac{51044217}{64389876}$; $b = \dfrac{48357083}{61000183}$ et pour $a = \dfrac{8621961}{47605467}$; $b = \dfrac{673970}{3721272}$

Activité 6

On demande à un vieillard son âge, il répond :

« $\dfrac{2\times\left(\dfrac{-6}{11}\right)+\dfrac{\dfrac{6}{11}+3}{4}}{\dfrac{10}{816}\times\left(\dfrac{-6}{11}\right)+\dfrac{\dfrac{6}{11}+2}{544}}$ » . Quel est l'âge du vieillard en années ?

(Par *Numérix, collection Eureka, Dunod*)

Activité 7

Cocher la case convenable.

Le produit $\left(1+\dfrac{1}{2}\right)\times\left(1+\dfrac{1}{3}\right)\times\ldots\times\left(1+\dfrac{1}{2002}\right)\times\left(1+\dfrac{1}{2003}\right)$ vaut

☐ 2004 ☐ 2003 ☐ 2002 ☐ 1002 ☐ 1001.

(Concours Kangourou 2003)

Proportionnalité et pourcentage

Activité 8

L'allongement d'un ressort est proportionnel à la masse que l'on suspend à ce ressort.
Une masse de 15 g provoque un allongement de 9 mm.
Reproduire et compléter le tableau suivant :

Masse *(en grammes)*	15	50		80		145
Allongement *(en millimètres)*	9		42		33	

Activité 9

1) Un article qui coûte 32 dinars est soldé à $20^{d},400$. Exprimer en pourcentage le solde effectué ?

2) Un client a obtenu une réduction de $10^{d},500$ sur un article de 150 dinars. Quel est le pourcentage de la réduction ?

3) Un article est mis en vente à 10 dinars. Il subit deux augmentations successives de 10% puis de 20%. Quel est le pourcentage global d'augmentation ?

4) Un article mis en vente subit une augmentation de10 % puis une réduction et il est revenu au prix initial. Quel est le taux de la réduction ?

Activité 10

1) Le prix H.T (hors taxes) d'un article est 58 dinars.
Quel est le prix T.T.C (toutes taxes comprises) pour un taux de T.V.A. (taxes sur la valeur ajoutée) de17% ?
2) Pour le même taux de T.V.A. un article est vendu à $35^{d},100$ T.T.C.
Quel est son prix H.T ?

Les identités remarquables

Activité 11

a) Calculer

$(3-\sqrt{5})^2$; $(2+a\sqrt{3})^2$; $(3\sqrt{2}-5\sqrt{6})^2$; $(2+a)^3$; $(1-\sqrt{5})^3$

b) Ecrire sous la forme $a+b\sqrt{c}$, où a, b et c sont des entiers.

$\sqrt{14-6\sqrt{5}}$; $\sqrt{3+2\sqrt{2}}$; $\sqrt{28+10\sqrt{3}}$; $\sqrt{21-8\sqrt{5}}$

Activité 12

a) Calculer mentalement 11^2 ; 19^2 ; 29^2
b) Soit $x = n(n+1)(n+2)(n+3)+1$; $n \in \mathrm{IN}$
Calculer x pour : n =1 ; n = 2 ; n = 3 ; n = 4
c) Enoncer une conjecture sur x et la démontrer.

Activité 13

a) Calculer mentalement $(75895478)^2 - (75895477) \times (75895479)$
b) Vérifier les égalités suivantes

$7^2+7=8^2-8$; $11^2+11=12^2-12$; $29^2+29=30^2-30$

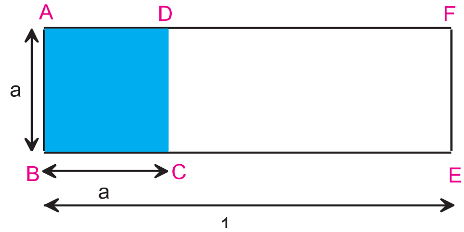
c) Peut-on généraliser ce résultat ?

Activité 14

Soit A = 111…11 (n fois le chiffre 1) et B = 100…005 [(n-1) fois le chiffre 0]
1) Calculer B – 9A.
2) Montrer que A x B + 1 est un carré parfait.

Comparaison de réels - encadrements

Activité 15 Comparaison de a ; a^2 ; $\sqrt{a}$



1) Comparer $(0,3)^2$ et 0,3.
2) a étant un réel tel que $0 < a < 1$.
   a) Observer la figure ci-contre et exprimer les aires de ABCD et de ABEF en fonction de a.
   b) Exploiter la figure pour comparer a et a^2.

3) Prouver que si $0 < a < 1$, alors $a > a^2$.

4) Comparer a et a^2, lorsque $a \geq 1$.

5) Soit a un réel strictement positif.

Comparer a et $\sqrt{a}$ pour $0 < a < 1$ et pour $a \geq 1$.

6) Comparer

a) $\sqrt{2} - 1$ et $(\sqrt{2} - 1)^2$; b) $0,34$ et $\sqrt{0,34}$; c) $\sqrt{\frac{7}{3}}$ et $\frac{7}{3}$; d) $\sqrt{\frac{1}{1 + x^2}}$ et $\frac{1}{1 + x^2}$

Activité 16

Soit x = 0,999…958 (100 fois le chiffre 9).

Quel est le 100ème chiffre après la virgule de $\sqrt{x}$?

Activité 17 Comparaison de a et $\frac{1}{a}$

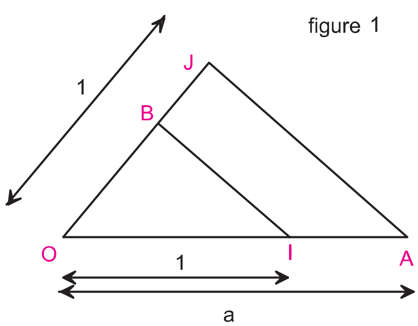
1) Dans la figure 1, les droites (BI) et (AJ) sont parallèles, OI = OJ = 1 et OA = a, avec $a > 1$.

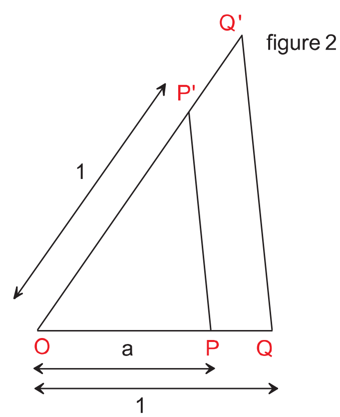
a) Comparer OA et OB.

b) Déterminer la distance OB en fonction de a.

En déduire une comparaison de a et $\frac{1}{a}$, lorsque $a > 1$.

2) Exploiter la figure 2 pour comparer a et $\frac{1}{a}$, lorsque $0 < a < 1$.





Activité 18

Comparer sans faire de calcul.

a) $\frac{23}{21}$ et $\frac{86}{88}$; b) $\frac{0,062}{0,07}$ et $\frac{5,34}{4,29}$; c) $\frac{1 + \sqrt{3}}{2 - \sqrt{2}}$ et $\frac{3 + \sqrt{5}}{3 + 2\sqrt{5}}$

Activité 19

Soit a un réel tel que $-2 \leq a \leq 3$.

Déterminer un encadrement de $a + 4$; $2a$; $-a$; $-3a + 5$.

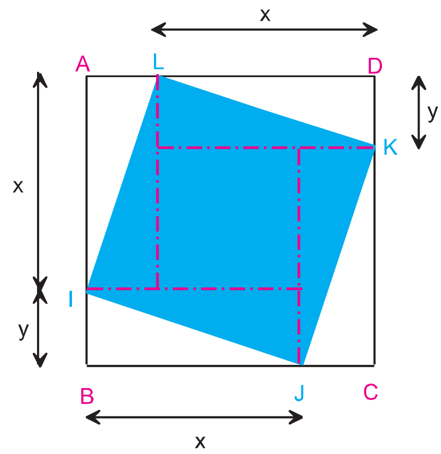
Activité 20

Une pièce rectangulaire a une aire comprise entre 16,12 m² et 16,96 m², et une longueur comprise entre 5,2 m et 5,3 m. Donner un encadrement de sa largeur.

Activité 21

1) En exploitant la figure ci-contre, montrer que pour tous réels positifs x et y on a

$$2xy \leq x^2 + y^2$$



2) Dans cette question, tous les réels considérés sont strictement positifs.

Montrer les inégalités suivantes

a) $x + \dfrac{1}{x} \geq 2$

b) $\dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x} \geq 2.$

c) $(x + y)\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}\right) \geq 4$

d) $(a + b + c)\left(\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}\right) \geq 9.$

Activité 22

Soit a et b deux réels strictement positifs.

Montrer que $\dfrac{1}{a+b} < \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}$ et que $\sqrt{a+b} < \sqrt{a} + \sqrt{b}$

Activité 23

Montrer que $\sqrt{2003} + \sqrt{2005} < 2\sqrt{2004}$

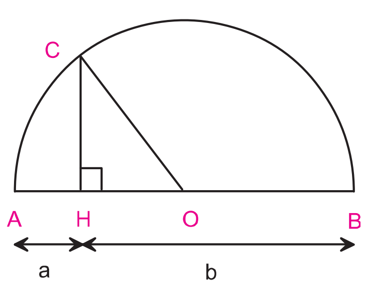
Activité 24 Moyenne arithmétique - moyenne géométrique

1) a) Utiliser la figure ci-contre, pour exprimer la distance AB en fonction de a et b. En déduire le distance OC en fonction de a et b.

b) Exprimer la distance OH en fonction de a et b.

c) Déterminer la distance CH en fonction de a et b.

d) En déduire que $\dfrac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$. Retrouver ce résultat par le calcul.



2) Soient a, b et c trois réels positifs. Montrer que $(a + b)(b + c)(c + a) \geq 8\,abc$.

Activité 25

Soit ABC un triangle et soit M un point à l'intérieur de ce triangle.

1) On se propose de démontrer que $MB + MC \leq AB + AC$

Soit I le point d'intersection de (BM) et (AC)

a) Montrer que $BM + MI \leq AB + AI$ et que $MC \leq MI + IC$

b) En déduire que $MB + MC \leq AB + AC$

2) Etablir de même que $MA + MB \leq CA + CB$ et que $MA + MC \leq BA + BC$.

Activité 26

Soit ABCD un quadrilatère et soit p son demi-périmètre. Montrer que

a) $AC + BD \geq AB + DC$

(on pourra utiliser l'inégalité triangulaire dans les triangles AOB et COD où O est l'intersection des diagonales)

b) $AC + BD \geq AD + BC$

c) $p \leq AC + BD \leq 2p$.

Les radicaux

Activité 27

Ecrire les nombres suivants sans radicaux au dénominateur.

$$\frac{1}{3+\sqrt{2}} \; ; \; \frac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{2}} \; ; \; \frac{\sqrt{7}+2}{\sqrt{5}} \; ; \; \frac{-\sqrt{3}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}} \; ; \; \frac{2+\sqrt{11}}{\sqrt{13}-2\sqrt{5}}.$$

Activité 28

Soient $A = \sqrt{9-4\sqrt{5}} + \sqrt{9+4\sqrt{5}}$ et $B = \sqrt{7-4\sqrt{3}} + \sqrt{7+4\sqrt{3}}$

a) Calculer A^2. En déduire une écriture plus simple de A.

b) Calculer B^2. En déduire une écriture plus simple de B.

Activité 29

Déterminer les entiers naturels a, b et c vérifiant :

$$\sqrt{7+\sqrt{a}} = 3 \quad ; \quad \sqrt{b+\sqrt{36}} = 7 \quad ; \quad \sqrt{77+\sqrt{11+\sqrt{25}}} = c$$

Activité 30

Le nombre $4\sqrt{4-2\sqrt{3}} + \sqrt{97-56\sqrt{3}}$ est-il un entier ?

(Olympiades Africaines 2004)

Activité 31

Soient A, B et C trois points du plan tels que $AB = \sqrt{48}$, $BC = \sqrt{243}$ et $AC = \sqrt{75}$

Montrer que A, B et C sont alignés.

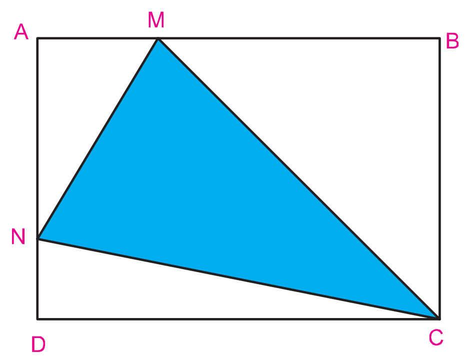
Activité 32

1) ABCD est un rectangle de longueur $AB = 10$ et de largeur $AD = 7$.

Soient $M \in [AB]$ et $N \in [AD]$ tel que $AM = 3$ et $AN = 5$.

Calculer le périmètre et l'aire du triangle MNC.

2) Calculer l'aire d'un triangle dont les côtés mesurent $\sqrt{13}$; $\sqrt{74}$ et $\sqrt{85}$



Activité 33

a) Soit $a \in IR^+$. Montrer que $\sqrt{a+1} - \sqrt{a}$ est l'inverse de $\sqrt{a+1} + \sqrt{a}$.

b) Calculer $\dfrac{1}{1+\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + ... + \dfrac{1}{\sqrt{98}+\sqrt{99}} + \dfrac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}$

c) Déterminer le plus petit entier naturel n tel que

$$\frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} \geq 100$$

Activité 34 Formule de Héron

1) Calculer l'aire d'un triangle dont les côtés mesurent en centimètres 18 ; 24 et 30 .

2) La formule suivante (attribuée à Héron d'Alexandrie : 1er Siècle), permet de calculer l'aire A d'un triangle lorsque l'on connaît les longueurs a, b, c de ses côtés :

$A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, où p désigne le demi-périmètre du triangle.

a) Retrouver l'aire du triangle de la première question.

b) Calculer l'aire d'un triangle dont les côtés mesurent 14 cm, 15 cm et 27 cm.

Activité 35 Développement - Factorisation

Développer et réduire les expressions ci-dessous

$A = (x-1)(x+2)$; $B = (2x-3a)^2 - 12ax$; $C = \left(a\sqrt{5} - b\right)\left(a + b\sqrt{5}\right)$

$D = a(b-c) + b(c-a) + c(a-b)$; $E = a(a+b-c) + b(b+c-a) + c(c+a-b)$

$F = (x-y)(y-z) + (y-z)(z-x) + (z-x)(x-y)$; $G = (2x-3)(-x+2) - x(5-4x)$.

Activité 36

Développer et réduire les expressions ci-dessous

$A = (x-1)^3 - 3x(x+1)$; $B = (2x+3)^2 + (3x-2)^2$

$C = (2x+3y)^3 - (2x-3y)^3$; $D = 4(a-b)^2 - 3(b-3a)^2$

Activité 37

Factoriser chacune des expressions ci-dessous

$A = 25x^2 - 9$; $B = 3x - 6 + (x^2 - 4x + 4)$; $C = (2x-1)^2 - (1-x)^2$; $D = 25x^2 - 30x + 9$

$E = x^3 - 64$; $F = 8 + 27x^3$; $G = 4x^2 - 1 - (2x-1)(3x+7)$.

Activité 38

Soient $A = (4x-1)^2 - (4x-1)(3x-6)$ et $B = 1 - 9x^2 + 2(x-2)(3x-1)$

1) Factoriser A , B et A – B

2) Développer et réduire A , B et A – B

3) Factoriser $7x^2 + 33x - 10$.

Activité 39

1) Montrer les égalités suivantes

a) $(a^2 + a\sqrt{2} + 1)(a^2 - a\sqrt{2} + 1) = a^4 + 1$.

b) $t^2 - 8\,t + 15 = (t - 3)(t - 5)$.

c) $4\,y^2 + (4 - 2\,y)^2 = 8\,(y - 1)^2 + 8$.

2) a) Montrer que, pour tout réel $x \neq -1$, $\dfrac{2x + 6}{x + 1} = 2 + \dfrac{4}{x + 1}$

b) Montrer que, pour tout réel x positif, $\sqrt{1 + x + 2\sqrt{x}} = 1 + \sqrt{x}$.

Activité 40

On pose $A(x) = x^3 - x\,|x| + 2x + 2$; $B(x) = (x + 1)(x^2 - x + 2)$; $C(x) = x^3 + x + 2$.

1) a) Calculer $A(0)$, $B(0)$, $C(0)$

$A(1)$, $B(1)$, $C(1)$

$A(-1)$, $B(-1)$, $C(-1)$.

b) A-t-on $A(x) = B(x)$ pour tout réel x ?

2) a) Montrer que pour tout réel x on a $A(x) - B(x) = x\,(1 - |x|)$.

b) En déduire que $A(x) = B(x)$ équivaut à $x \in \{-1 ; 0 ; 1\}$.

3) Montrer que, pour tout réel x, $B(x) = C(x)$.

Valeur absolue

Activité 41

1) Ecrire sans le symbole de la valeur absolue

a) $|\sqrt{5} - 2|$; b) $|\sqrt{3} - 2|$; c) $|1 + \sqrt{3} - 2\sqrt{2}|$.

2) Déterminer x dans chacun des cas suivants

a) $|x + 2| = 3$; b) $|4x - 1| = 1 - \sqrt{2}$; c) $|2\,x + 1| = |3 - x|$.

Activité 42

1) Soit a un réel de l'intervalle $[2, 3]$.

Simplifier l'écriture de l'expression $|a - 2| + |a - 3|$.

2) Pour chacune des inéquations suivantes écrire l'ensemble des solutions à l'aide d'un intervalle ou d'une réunion d'intervalles.

a) $|x - 1| < 1$; b) $|3 - 2\,x| \geq \dfrac{1}{2}$; c) $|x\sqrt{2} + 1| > 1 + \sqrt{2}$.

Activité 43

1) Sur une droite Δ munie d'un repère (O, I), placer les points A, B, C, D et E d'abscisses respectives 2 ; -3 ; $\sqrt{2}$; $3 + \sqrt{2}$ et $1 - \sqrt{2}$

2) Calculer les distances AB , AC , CD , IC et IE.

3) Déterminer les points M de la droite Δ tels que $AM = 5$.

Ordre de grandeur - Valeurs approchées

Activité 44

En effectuant la division de 75 par 17, une calculatrice affiche 4,411764705.
Qu'affiche votre calculatrice pour $\sqrt{5}$? Pour sin 85° ? Pour π ?
Recopier et compléter le tableau suivant

x	$\frac{75}{17}$	$\sqrt{5}$	**sin 85°**	**π**
Valeur approchée de x à 10^{-2} près par défaut	4,41			
Valeur approchée de x à 10^{-2} près par excès	4,42			
Arrondi de x à 10^{-2}	4,41			
Valeur approchée de x à 10^{-3} près par défaut	4,411			
Valeur approchée de x à 10^{-3} près par excès	4,412			
Arrondi de x à 10^{-3}	4,412			

Définition

Soit n un entier. On dit que le nombre décimal a est une valeur approchée à 10^n près du réel b si $|b - a| \leq 10^n$.
Si a < b , on dit que a est une valeur approchée de b à 10^n près par défaut.
Si a > b , on dit que a est une valeur approchée de b à 10^n près par excès.

Activité 45

a) Pour chacun des nombres suivants, donner une valeur approchée à 10^{-5} près par défaut et une valeur approchée à 10^{-5} près par excès.

$10{,}419484076 \quad ; \quad \sqrt{6} \quad ; \quad \cos 23° \ ; \ \frac{2006}{2005}$.

b) Donner l'arrondi à 10^{-5} près de chacun des nombres précédents.

Activité 46

Montrer que $1 + 2 \times 10^{-3}$ est une valeur approchée à 10^{-6} près de $(1 + 10^{-3})^2$.

Activité 47 Ecriture scientifique et ordre de grandeur

Recopier et compléter le tableau suivant

Nombres	**35215000**	**78,3548**	**0,5423100**	**– 425462,12**	**0,0007845**
Ecriture scientifique	$3{,}5215 \times 10^7$				
Ordre de grandeur	4×10^7				

Remarque

Si a x 10^n est l'écriture scientifique d'un nombre, l'ordre de grandeur de ce nombre est b x 10^n, où b est l'arrondit de a à l'unité.

Activité 48

Le Sahara a une superficie d'environ 8 millions de Km^2, on estime à 2 milliards le nombre de grains de sable de la couche superficielle par mètre carré.
Donner un ordre de grandeur du nombre de grains de sable dans la couche superficielle du Sahara. (D'après *Le secret des nombres*, **Albin Michel**)

Activité 49

La superficie de la terre est d'environ $5,10 \times 10^8$ km^2 et celle de la TUNISIE est d'environ $1,62 \times 10^5$ km^2. Combien faudrait-il de " TUNISIE " pour couvrir la terre ?

Activité 50

La distance terre-soleil est d'environ 150 millions de km et la vitesse de la lumière est d'environ 300 000 km/s.
a) Combien de temps faudrait-il à un rayon solaire pour arriver au sol ?
b) Quelle est la distance parcourue par la lumière pendant une année ?
(Cette distance est appelée " année-lumière " et elle est d'environ $9,5 \times 10^{12}$ km).

Activité 51 Les globules rouges

Les globules rouges du sang humain ont une forme assimilable à un cylindre de diamètre 7 μ et de hauteur 3 μ ($1\mu = 10^{-6}$ m). Un mm^3 de sang humain contient environ 4 500 000 globules rouges et un être humain a en moyenne 6 litres de sang.
1) Calculer le nombre total de globules rouges d'un être humain.
2) Si on empilait l'un au dessus de l'autre toutes ces globules rouges, quelle serait, en Km, la hauteur de la colonne obtenue ?
3) a) En prenant $\frac{22}{7}$ comme valeur approchée de π calculer l'aire d'un globule rouge ?
b) Calculer, en m^2, l'aire totale de tous les globules rouges contenus dans le sang humain.

PROBLÈMES DU PREMIER DEGRÉ ET PROBLÈMES DU SECOND DEGRÉ

S'il n'y a pas de solutions, c'est qu'il n'y a pas de problèmes

SHADOKS

Pour démarrer

1 Choisir la ou les affirmations justes.

	A	B	C
$1 \leq x \leq 3$ équivaut à	$x \in [1\ ;\ 3[$	$x \in [1\ ;\ 3]$	$x \in]1\ ;\ 3[$
$2 < -5x+1 \leq 5$ équivaut à	$x \in]-\frac{4}{5} ; -\frac{1}{5}]$	$x \in]\frac{1}{5}\ ;\ \frac{1}{4}]$	$1 < -5x \leq 4$
$x \in]-\infty\ ;-1[\cup[2\ ;+\infty[$ équivaut à	$x < -1$ et $x \geq 2$	$-1 < x \leq 2$	$x < -1$ ou $x \geq 2$
$x > \frac{1}{7}$ équivaut à	$7x > 1$	$\frac{1}{x} > 7$	$x \in]\frac{1}{7}\ ; +\infty\ [$
$(1-\sqrt{3})\,x > 1$	$x > \frac{1}{1-\sqrt{3}}$	$x < \frac{1}{1-\sqrt{3}}$	$x \in \left]-\infty\ ; \frac{-1-\sqrt{3}}{2}\right[$

2 Parmi les affirmations a) , b), c) proposées, une ou plusieurs sont correctes. Lesquelles ?

1) L'expression $x^2 - y^2$ est
   a) égale à $(x-y)^2$; b) égale à $(x-y)(x+y)$; c) une différence de deux carrés.

2) L'expression $(x+\sqrt{3})^2$ est égale à
   a) x^2+3 ; b) x^2+6x+9 ; c) $x^2+2\sqrt{3}\,x+3$.

3) L'expression $(x+y)^3$ est égale à
   a) x^3+y^3 ; b) $x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$; c) $(x+y)(x+y)^2$.

4) L'expression $(x-2)^3$ est égale à
   a) $x^3-6x^2+12x-8$; b) x^3-8 ; c) $x^3+6x^2+12x+8$.

3 Choisir la (ou les) bonne(s) réponse(s).

1) Le réel (-2) est une solution de l'équation
   a) $2x(x+1)=0$; b) $x^2-4=0$; c) $(x+2)(5x+3)=0$.

2) Pour $x=-1$, l'expression x^2-x+2 vaut
   a) 4 ; b) 2 ; c) 0.

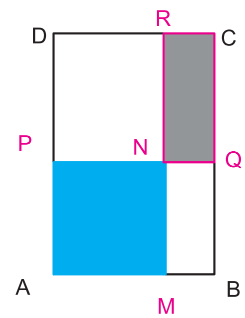
3) Le réel $(-\sqrt{3})$ est une solution de l'inéquation
   a) $x+\frac{9}{5}>0$; b) $4x^2+5x>0$; c) $x^2<3$.

Problèmes du premier degré

Activité 1

Je pense un nombre je lui retranche 5 je multiplie le résultat obtenu par 2 puis j'ajoute 6 et je divise le résultat par 5, j'obtiens 2. Quel nombre j'ai pensé ?

Activité 2

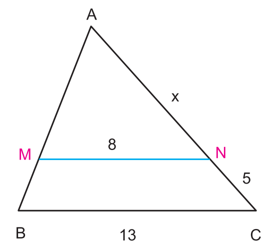


Dans la figure ci-contre, ABCD est un rectangle tel que
$AB = 2$ et $BC = 3$.
M étant un point du segment [AB], on construit le carré MNPA et le rectangle NQCR.
Où placer le point M pour que le carré MNPA et le rectangle NQCR aient la même aire?

Activité 3

Quel entier faut-il ajouter au numérateur et au dénominateur de $\frac{3}{5}$ pour obtenir $\frac{1}{2}$?

Activité 4



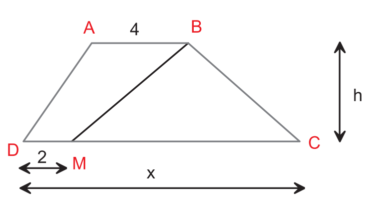
Dans la figure ci-contre, $AN = x$, $NC = 5$, $MN = 8$,
$BC = 13$ et la droite (MN) est parallèle à la droite (BC).
Déterminer x.

Activité 5

Deux agences A et B de location de voitures présentent les tarifs suivants pour des véhicules identiques :
Agence A : Un forfait de 36 dinars par jour, plus $0^{d},450$ par Km parcouru.
Agence B : Un forfait de 20 dinars par jour, plus $0^{d},650$ par Km parcouru.
a) Quelle est l'agence qui propose un tarif plus avantageux, selon que l'on doit effectuer dans une journée un parcours de 50 Km ou 150 Km ?
b) Soit x le nombre de kilomètres à parcourir dans la journée.
Déterminer suivant x, l'agence qui propose un tarif plus avantageux.

Activité 6

On considère un trapèze ABCD, de hauteur h, de bases $AB = 4$ et $CD = x$, avec $x > 2$.
Soit M un point de la base [CD] tel que $DM = 2$.
a) Déterminer les réels x tels que l'aire du triangle BMC soit inférieure ou égale à la moitié de l'aire du trapèze ABCD.



b) Déterminer les réels x tels que l'aire du triangle BMC soit comprise entre le quart et le tiers de l'aire du trapèze ABCD.

Activité 7

Soit Δ une droite munie d'un repère cartésien $(O, \overrightarrow{OI})$.

1) Placer sur Δ les points A, B, C et D d'abscisses respectives -1 ; -2 ; 3 et 5.

2) Soit M un point de Δ, d'abscisse x.

Interpréter chacune des valeurs absolues suivantes en termes de distance.

$|x+1|$; $|x+2|$; $|x-3|$; $|x-5|$.

3) a) Déterminer l'ensemble des points M de Δ dont l'abscisse x vérifie $|x-3| = 2$.

b) Représenter sur la droite Δ l'ensemble des points M d'abscisse x tels que $|x+2| \leq \frac{1}{2}$.

c) Représenter sur la droite Δ l'ensemble des points M d'abscisse x tels que $|x+1| \geq 3$.

Activité 8

Résoudre dans IR.

a) $|2x+3| = 2$; b) $|4x-\sqrt{2}| = 3$; c) $|3-4x| = |x-2\sqrt{5}|$.

d) $|x+2| > 1$; e) $|-x+3| < 2$; f) $|2x+1| \leq \frac{3}{4}$; $|-4x+5| \geq 1{,}8$.

Activité 9

1) Pour chacune des expressions suivantes, déterminer les valeurs de x pour lesquelles elle est définie.

a) $\frac{x-1}{x+3}$; b) $\frac{2x+1}{x}$; c) $\frac{2x}{x+4}$; d) $\frac{2x+3}{x-1}$; e) $\frac{4x}{2x+3}$.

2) Résoudre dans IR les équations suivantes.

a) $\frac{x-1}{x+3} = \frac{5}{4}$; b) $\frac{2x+1}{x} = \frac{2x}{x+4}$; c) $\frac{2x+3}{x-1} = \frac{4x}{2x+3}$.

Activité 10

1) Pour chacune des expressions suivantes, déterminer les valeurs de x pour lesquelles elle est définie.

a) $\sqrt{x+1}$; b) $\sqrt{3-2x}$; c) $\sqrt{x-4}$; d) $\sqrt{22-x}$; e) $\sqrt{|4x+5|}$.

2) Résoudre dans IR les équations suivantes.

a) $\sqrt{x+1} = 2$; b) $\sqrt{3-2x} = 5$; c) $\sqrt{x-4} = \sqrt{22-x}$; d) $\sqrt{|4x+5|} = 6$.

Activité 11

1) Pour chacune des expressions suivantes, déterminer les valeurs de x pour lesquelles elle est définie.

a) $\sqrt{x+2}$; b) $\sqrt{1-3x}$; c) $\sqrt{5x-4}$; d) $\sqrt{x+1}$.

2) Résoudre dans IR les inéquations suivantes.

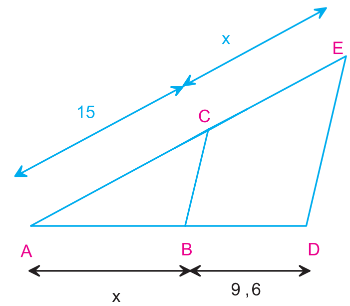
a) $\sqrt{x+2} > 1$; b) $\sqrt{1-3x} \leq \sqrt{2}$; c) $\sqrt{5x-4} \geq \sqrt{x+1}$.

Problèmes du second degré
Equations du second degré

Activité 12

Dans la figure ci-contre, la droite (BC) est parallèle à la droite (DE).

Déterminer x.



Activité 13

Soit ABC un triangle tel que AB = x + 3, AC = 3x + 4 et BC = 2x + 5, où x est un réel positif.
Déterminer x pour que ce triangle soit rectangle en A.

Définition

Soient a, b et c trois réels avec $a \neq 0$.

L'équation $a x^2 + b x + c = 0$ est dite équation du second degré d'inconnue x.

Activité 14 Forme canonique de $ax^2 + bx + c$

1) Vérifier que

a) $x^2 - 6x = (x-3)^2 - 9$; b) $2x^2 + x = 2\left[(x + \frac{1}{4})^2 - \frac{1}{16}\right]$.

2) Ecrire chacune des expressions suivantes sous la forme $a[(x+p)^2 + q]$, où a, p et q sont des réels.

a) $x^2 - 6x + 1$; b) $2x^2 + x + 5$

c) $-3x^2 + 4x + 7$; d) $-5x^2 + 10x - 8$.

3) Soient a, b, c trois réels avec $a \neq 0$.

Montrer que $a x^2 + b x + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right]$.

Vocabulaire

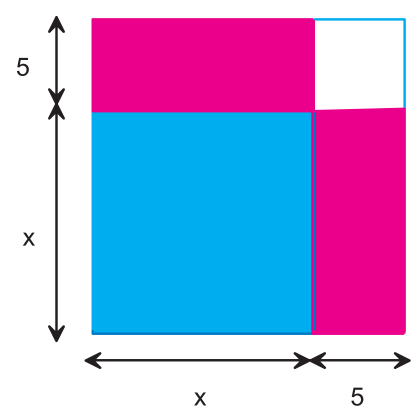
- Le réel $b^2 - 4ac$ est noté Δ et appelé le discriminant de l'équation du second degré $ax^2 + bx + c = 0$.
- $a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right]$ est appelée la forme canonique de $ax^2 + bx + c$.

Assimiler : 1

Activité 15 Méthode géométrique d'Al Khawarizmi

Le mathématicien arabe Al Khawarizmi (780-850), a proposé une méthode géométrique pour résoudre des équations du type $x^2 + bx = c$.

Pour résoudre l'équation $x^2 + 10x = 39$, il procède de la manière suivante :



- Il considère un carré de côté x, bordé de deux rectangles de côtés x et 5 (voir la figure ci-contre).
- Il exprime de deux façons différentes l'aire A(x) de la partie colorée : c'est d'une part la somme des aires du carré de côté x et des deux rectangles de côtés x et 5 et d'autre part c'est l'aire du grand carré de côté x + 5 moins l'aire du petit carré de côté 5.

Il obtient l'égalité $x^2 + 10x = (x + 5)^2 - 25$.

- Il détermine la solution positive de l'équation $(x + 5)^2 - 25 = 39$.

Utiliser la méthode d'Al Khawarizmi, pour déterminer la solution positive de chacune des équations ci-dessous.

a) $x^2 + 4x = 5$; b) $x^2 + 20x - 156 = 0$.

Activité 16

Un rectangle a pour périmètre 20 cm et pour longueur x cm.

1) Exprimer, en fonction de x, l'aire a(x) du rectangle.

2) Déterminer x pour que $a(x) = 16$ cm².

3) Ce rectangle peut-il avoir une aire de 30 cm² ?

Activité 17

Une pierre lancée vers le haut atteint à l'instant t (en secondes) une hauteur h(t) (en mètres) telle que $h(t) = -\frac{1}{2}t^2 + 3t + 2$.

a) Ecrire h(t) sous forme canonique.

b) Déterminer la hauteur maximale que la pierre peut atteindre.

c) Trouver à quel instant la pierre retombe au sol.

Activité 18 Solutions d'une équation du second degré

Soit l'équation du second degré $a x^2 + b x + c = 0$ et soit $\Delta = b^2 - 4ac$ son discriminant.

1) Montrer que $a x^2 + b x + c = 0$ équivaut à $\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 = \dfrac{\Delta}{4a^2}$.

2) Résoudre dans IR l'équation $a x^2 + b x + c = 0$.

Remarque

Toute solution de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ est aussi appelée racine de cette équation.

Activité 19

Résoudre dans IR chacune des équations du second degré suivantes.

a) $x^2 + 2x - 2 = 0$; b) $5y^2 - 3y + 1 = 0$; c) $\dfrac{1}{4} z^2 - \sqrt{3}\, z + 3 = 0$;

d) $3t^2 - 2t = 0$.

Assimiler : 2-3

Activité 20 Le discriminant réduit

On considère l'équation du second degré $a x^2 + b x + c = 0$. Soit Δ son discriminant.

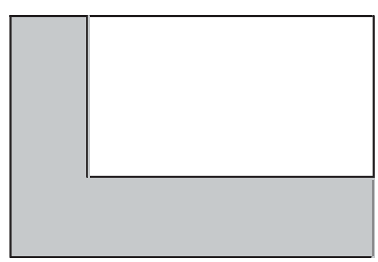
a) En posant $b = 2b'$, vérifier que $\Delta = 4\Delta'$, où $\Delta' = b'^2 - ac$.

b) Déterminer suivant le signe de Δ', le nombre de solutions de l'équation et donner les solutions en fonction de a, b' et Δ'.

c) Utiliser le discriminant réduit Δ' pour résoudre l'équation $5x^2 - 16x + 3 = 0$.

Activité 21

Un peintre dispose d'un tissu rectangulaire de longueur 3 m et de largeur 2 m. Sur ce tissu, il veut dessiner deux bandes de même largeur, comme l'indique la figure, de sorte que l'aire des deux bandes soit égale à l'aire de la partie restante. Déterminer la largeur commune convenable.



Activité 22 Somme et produit des racines d'une équation du second degré

Soit l'équation du second degré $a x^2 + b x + c = 0$. On suppose qu'elle admet deux racines x_1 et x_2. Calculer en fonction de a, b et c la somme $x_1 + x_2$ et le produit $x_1 . x_2$.

Activité 23

Soit $A(x) = x^2 + (\sqrt{3} - 2)\,x - 2\sqrt{3}$.

1) Calculer A(2).

2) En déduire les racines de l'équation A(x) = 0.

Activité 24

Pour chacune des équations ci-dessous, vérifier que x_1 est une racine puis déterminer l'autre racine.

a) $2x^2 - 4x - 6 = 0$ et $x_1 = 3$.

b) $x^2 + 3x + 2 = 0$ et $x_1 = -2$.

c) $-4x^2 + x\sqrt{3} + 9 = 0$ et $x_1 = \sqrt{3}$.

Activité 25

1) Résoudre dans IR l'équation du second degré $ax^2 + bx + c = 0$ dans chacun des cas suivants.

- $a + b + c = 0$. ; • $a - b + c = 0$.

2) Résoudre dans IR les équations ci-dessous.

a) $3x^2 + 5x - 8 = 0$; b) $x^2 + \sqrt{3}\,x + \sqrt{3} - 1 = 0$.

Assimiler : 4

Activité 26

a) Déterminer les dimensions d'un terrain rectangulaire de périmètre 122 m et d'aire 900 m^2.

b) Existe-t-il un rectangle de périmètre 100 m et d'aire 700 m^2 ?

Assimiler : 5-6

Activité 27 Equations se ramenant à une équation du second degré

1) Pour chacune des expressions suivantes, déterminer pour quelles valeurs de x elle est définie.

a) $x + \dfrac{1}{x} + 2$; b) $\dfrac{x+2}{x-3}$; c) $\dfrac{1}{2x+1}$; d) $\sqrt{x-2}$

e) $x + 1$; f) $\dfrac{2x^2 + x}{3x^2 + x - 4}$; g) $3x^4 - 5x^2 + 2$.

2) Résoudre dans IR les équations ci-dessous.

a) $x + \frac{1}{x} + 2 = 0$; b) $\frac{x+2}{x-3} = \frac{1}{2x+1}$; c) $\sqrt{x-2} = x + 1$; d) $\frac{2x^2 + x}{3x^2 + x - 4} = 1$

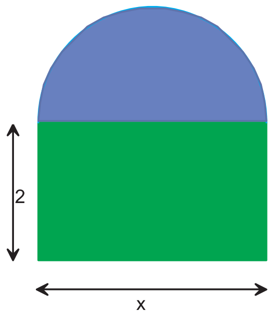
e) $3x^4 - 5x^2 + 2 = 0$.

Assimiler : 7

Inéquations du second degré

Activité 28

Pour quelles valeurs de x l'aire du rectangle est-elle plus grande que l'aire du demi disque ?



Activité 29

1) Montrer que si x_1 et x_2 sont deux racines de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$, alors $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$.

2) Factoriser chacune des expressions suivantes.

a) $x^2 - (1 + \sqrt{2})x + \sqrt{2}$; b) $2x^2 - 14x + 24$; c) $-9x^2 + 12x - 4$; d) $5x^2 + 8x$.

Assimiler : 8-9

Activité 30 Signe de $ax^2 + bx + c$, $(a \neq 0)$

1) Factoriser et déterminer le signe de chacune des expressions suivantes :

$A(x) = 4x^2 - 12x + 9$; $B(x) = x^2 - 5x + 6$; $C(x) = -2x^2 + x + 1$.

2) Donner la forme canonique et déterminer le signe de chacune des expressions suivantes.

$P(x) = -2x^2 + x - 1$; $Q(x) = 3x^2 - 2x + 5$.

3) Soit a, b et c trois réels, avec $a \neq 0$.

Déterminer le signe de $ax^2 + bx + c$.

Activité 31

1) a) Résoudre dans IR l'inéquation $x^2 - 5x + 6 < 0$.

En déduire les valeurs de x pour les quelles $x^2 - 5x + 6 \geq 0$.

b) Résoudre dans IR l'inéquation $-x^2 + 4x - 3 \leq 0$.

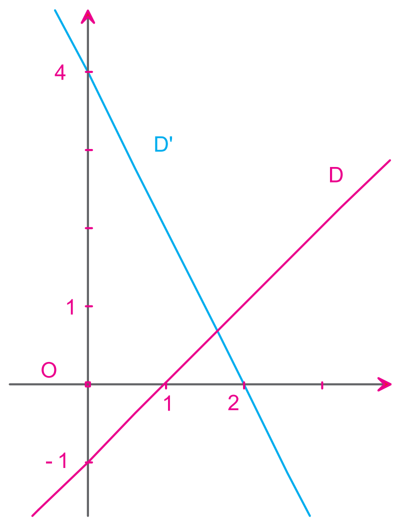
En déduire les valeurs de x pour les quelles $-x^2 + 4x - 3 > 0$.

2) Résoudre dans IR les inéquations suivantes.

a) $-x^2 + x - 1 > 0$; b) $4x^2 - 4x + 1 \leq 0$; c) $5 - x^2 \geq 0$; d) $3x^2 + 8x + 5 < 0$.

Assimiler : 10-11-12

Activité 32



Dans la figure ci-contre, D et D' désignent les représentations graphiques des fonctions affines f et g définies par :

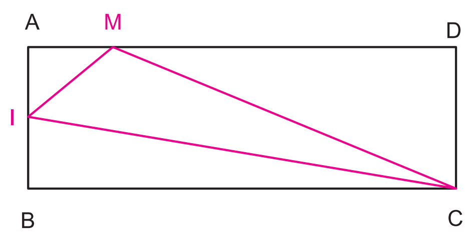
$f(x) = x - 1$ et $g(x) = -2x + 4$.

Par lecture graphique

a) Déterminer le signe de $f(x)$ et celui de $g(x)$.

b) Déterminer le signe de $(x - 1)(-2x + 4)$.

Activité 33



Dans la figure ci-contre, ABCD est un rectangle tel que AB = 2 et AD = 3, I est le milieu du côté [AB] et M est un point du côté [AD]. On pose x = AM et $F(x) = IM^2 + MC^2$.

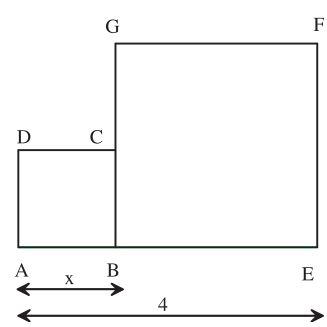
1) a) Exprimer F(x) en fonction de x.

b) Déterminer x pour que le triangle IMC soit rectangle en M.

2) a) Résoudre l'inéquation $F(x) \geq \frac{19}{2}$.

b) En déduire la position du point M pour la quelle F(x) est minimale.

Activité 34



1) Résoudre l'inéquation $x^2 - 4x + 3 > 0$.

2) Dans la figure ci-contre, ABCD et BEFG sont des carrés. Déterminer les réels x pour que la somme des aires de ces deux carrés soit supérieure à 10.

Activité 35 Le poids d'un astronaute

Au fur et à mesure qu'une navette spatiale prend de l'altitude, le poids de l'astronaute diminue jusqu'à atteindre un état d'apesanteur.

Si p est le poids (en kg) d'un astronaute sur la terre, son poids (en kg) à l'altitude x (en km) est $P(x) = p\left(\frac{6400}{6400 + x}\right)^2$.

Un astronaute pèse sur terre 81 kg.

1) Quel est son poids à 1000 km d'altitude ?

2) A quelle altitude pèsera t-il 49 kg ? 25 kg ?

3) A quelle altitude pèsera-t-il moins de 9 kg ?

Activité 36

Résoudre dans IR les inéquations suivantes.

a) $(x-1)(-x^2+2)<0$; b) $(-2x+3)(4x^2+5x+1)\geq 0$;
c) $(3-x^2)(x^2-x-1)<0$; d) $3x^3\leq 5x^2-3x$; e) $(2x^2+3x-5)(x^2-x-1)>0$.

Activité 37

1) Pour chacune des expressions suivantes, déterminer les valeurs de x pour lesquelles elle est définie.

a) $\dfrac{x+3}{x^2+5}$; b) $\dfrac{x^2+3x}{x^2+5x-6}$; c) $\dfrac{-3x^2+2x+1}{x^2-x-2}$.

2) Résoudre dans IR les inéquations suivantes.

a) $\dfrac{x+3}{x^2+5}$ $\dfrac{x^2+3x}{x^2+5x-6}$ $\dfrac{-3x^2+2x+1}{x^2-x-2}$

1 Ecrire sous forme canonique les expressions suivantes.

a) $A(x) = 2x^2 - 6x + 5$. b) $B(x) = -3x^2 + 5x$. c) $C(x) = \frac{1}{2}x^2 + 4$.

2 Résoudre dans IR les équations suivantes.

a) $2x^2 - 3 = 0$; b) $4x^2 + 12x + 9 = 0$; c) $(x + 1)^2 = 2x^2 - 2x\sqrt{2} + 1$.

d) $(x + 1)(5x - 2) = 0$; e) $(x - 2)(2x - 1) + (x^2 - 4) = 0$; f) $3(x + 1)^2 = x^2 - 1$.

3 Résoudre dans IR les équations suivantes :

a) $x^2 + \sqrt{2}x - 4 = 0$; b) $x^2 + (x - 2)^2 = 5$; c) $8x(x - 1) = 6x + 1$.

4 Résoudre chacune des équations suivantes sans calculer son discriminant.

a) $7x^2 + 8x + 1 = 0$

b) $x^2 - 7x + 6 = 0$

c) $x^2 - (5 + \pi)x + 5\pi = 0$

5 Déterminer, s'ils existent, deux réels a et b tels que :

a) $\begin{cases} a + b = 2 \\ ab = -2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} a + b = -2 \\ ab = 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} a + b = 5 \\ ab = 7 \end{cases}$ d) $\begin{cases} ab = 6 \\ a - b = 2\sqrt{2} \end{cases}$

6 Trouver deux nombres dont la somme est11 et dont la somme des inverses est $\frac{11}{30}$

7 Résoudre dans IR les équations suivantes :

a) $x^4 = (x + 2)^2$; b) $\frac{3x^2 - 2x - 1}{x - 1} = 3$.

8 Dans chacun des cas,donner une équation du second degré admettant pour racines les deux réels donnés.

a) -1 et 3 ; b) $\sqrt{2}$ et 5 ; c) 0 et -4 ; d) $\frac{3}{2}$ et 1.

9 Factoriser, quand cela est possible, chacune des expressions suivantes.

a) $A(x) = 5x^2 + 9x - 2$ b) $B(x) = -2x^2 + 3x - 1$

c) $C(x) = 5x^2 - 2x + \frac{1}{5}$ c) $D(x) = x^2 - x + 3$.

10 1) Résoudre dans IR les inéquations suivantes:

a) $x^2 + 5x$; b) $2x^2 - 5x + 3$; c) $3x^2 - 2x + 1$

2) En déduire la résolution dans IR des inéquations suivates.

a) $x^2 + 5x \leq 0$; b) $2x^2 - 5x + 3 > 0$; c) $3x^2 - 2x + 1 < 0$

11 Ci-dessous le tableau de signe d'une expression P(x) de la forme $a x^2 + b x + c$.

x	$-\infty$		-2		3		$+\infty$
Signe de P(x)		$-$	0	$+$	0	$-$	

Par lecture de ce tableau,

a) Déterminer le signe de : P(-5) ; P(- $\sqrt{3}$) et P(8).

b) Indiquer l'ensemble de solutions de l'inéquation $P(x) \leq 0$.

12 Résoudre dans IR les inéquations suivantes.

a) $x^2 - 4x \geq 0$; b) $x^2 - 5x + 6 < 0$; c) $2x^2 - 6x \leq x^2 + x$

d) $\frac{1}{2} x^2 + \frac{3}{4} x - 1 \geq 0$; e) $3x^2 - 6x\sqrt{2} + 2 \geq 0$; f) $-x^2 + \frac{3}{4} x - 1 \geq 0$.

- Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$ ou a, b et c sont trois réels tels que $a \neq 0$
- Soit $\Delta = b^2 - 4ac$ le discriminant de l'équation $f(x) = 0$.

Racines (ou solutions) de l'équation f(x) = 0
Factorisation et signe de f(x)

	Racine de f(x) = 0	Factorisation de f(x)	Signe de f(x)
$\Delta < 0$	L'équation n'a pas de racines	On ne peut pas factoriser f(x)	Pour tout réel x, f(x) est du signe de a.
$\Delta = 0$	L'équation a une seule racine $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$	$f(x) = a(x - x_0)^2$	Pour tout réel $x \neq x_0$, f(x) est du signe de a.
$\Delta > 0$	L'équation a deux racines distinctes $x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$	$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$	f(x) est du signe de a à l'extérieur des racines. f(x) est du signe de (-a) entre les racines

Le discriminant réduit

Il est parfois commode d'utiliser le descriminant réduit $\Delta' = b'^2 - ac$; où $b' = \dfrac{b}{2}$.

On a :

- $\Delta = 4\Delta'$
- $\Delta' < 0$ équivaut à $f(x) = 0$ n'a pas de racines.
- $\Delta' = 0$ équivaut à $f(x) = 0$ a une seule racine $x_0 = -\dfrac{b'}{a}$.
- $\Delta' > 0$ équivaut à $f(x) = 0$ a deux racines distinctes $x_1 = \dfrac{-b' - \sqrt{\Delta'}}{a}$ et $x_2 = \dfrac{-b' + \sqrt{\Delta'}}{a}$

Somme et produit des racines de l'équation f(x) = 0

Lorsque l'équation $f(x) = 0$ admet deux racines x_1 et x_2, on a :

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \text{ et } x_1 x_2 = \frac{c}{a}$$

Remarque

- Si $a + b + c = 0$, alors 1 est une racine de l'équation $f(x) = 0$ et l'autre racine est $\dfrac{c}{a}$.
- Si $a - b + c = 0$, alors -1 est une racine de l'équation $f(x) = 0$ et l'autre racine est $-\dfrac{c}{a}$.

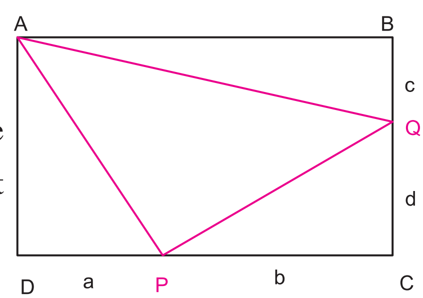
1 Un riche diamantaire, sentant sa fin prochaine, fit venir ses enfants afin de leur distribuer sa fortune, constituée exclusivement de diamants. L'aîné prendra un diamant et le septième de ce qui reste. Le second aura deux diamants et le septième de ce qui reste. Le troisième aura trois diamants et le septième de ce qui reste et ainsi de suite. En bon père de famille le diamantaire a pris soin de ne léser personne : toutes les parts sont égales.
Combien possède-t-il de diamants ? Quel est le nombre de ses enfants ?

Indication
Exprimer la part de chacun des deux premiers enfants, en fonction du nombre x de diamants.

2 Le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$. Soit I le point de coordonnées (2 , 2). Soit x un réel strictement supérieur à 2. A tout point M(x, 0) on associe le point N, intersection de la droite (IM) avec l'axe des ordonnées.
1) Exprimer en fonction de x, l'aire A(x) du triangle OMN.
2) Déterminer x pour que
   a) A(x) = 10 ; b) A(x) = 8.
3) Montrer que l'aire du triangle OMN est supérieure ou égale à 8.

Indication
1) Déterminer les coordonnées du point N en fonction de x et en déduire A(x).

3 **Nombre d'or**



Soit ABCD un rectangle.
On se propose d'inscrire un triangle APQ dans le rectangle ABCD, de telle sorte que les trois triangles ABQ, PCQ et ADP, ainsi formés, soient d'aires égales.
On pose DP = a, PC = b, QC = d et BQ = c.
1) a) Montrer que $d^2 - cd - c^2 = 0$.
   b) En déduire que $\left(\frac{d}{c}\right)^2 - \frac{d}{c} - 1 = 0$
   et que $\frac{d}{c} = \frac{b}{a} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$
($\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ est appelé le nombre d'or et il est souvent noté φ).
2) a) Montrer que le triangle APQ est isocèle en P si et seulement si $a = c\,\varphi$.
   b) Montrer que, dans ce cas, $\frac{L}{l} = \varphi$, où L est la longueur et l la largeur du rectangle ABCD. (Dans ce cas, on dit que ABCD est un rectangle d'or).

Indication

1) a) • Exprimer le fait que les trois triangles sont d'aires égales.
 • Eliminer a.

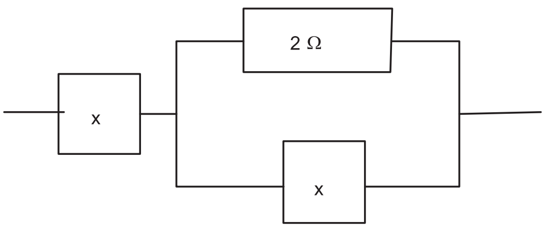
2) a) • Exprimer le fait que APQ est isocèle.
 • Vérifier que $\varphi^2 - 1 = \varphi$ et que $1 + 2\varphi = \varphi^3$.

4 Deux cyclistes A et B partent de deux villes distantes de 132 Km et vont à la rencontre l'un de l'autre.
S'ils partent en même temps, la rencontre aura lieu après 3 heures.
Si le cycliste A part 33 minutes avant B, la rencontre aura lieu à mi–chemin.
Calculer la vitesse moyenne de chaque cycliste.

Indication

Soit V_A la vitesse moyenne du cycliste A et V_B celle du cycliste B.
Déterminer les distances d_A et d_B, parcourues par les cyclistes A et B en 3 heures.

5 En courant continu, à partir de deux résistors de résistances respectives R_1 et R_2 on obtient une résistance équivalente R telle que $R = R_1 + R_2$ dans une association en série, et une résistance équivalente r telle que $\frac{1}{r} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$ dans une association en parallèle.



1) Déterminer R_1 et R_2 sachant que $R = 2{,}5\ \Omega$ et $r = 0{,}4\ \Omega$.
2) On considère le montage de résistances ci-contre. Déterminer la valeur de x pour que la résistance totale du montage soit équivalente à $3\ \Omega$.
3) Un fil cylindrique homogène de longueur 1m a pour résistance $10\ \Omega$, on en coupe une longueur x cm et on monte les deux brins obtenus en parallèle.
Déterminer x pour que la résistance équivalente obtenue soit égale à $2{,}4\ \Omega$.

Indication

3) Le fil est homogène, donc la résistance est proportionnelle à la longueur du fil.

Utiliser un tableur pour résoudre une équation du second degré

On se propose de résoudre des équations du second degré, à l'aide d'un tableur.
Ouvrir une feuille de calcul sur Excel et remplir un tableau comme ci-dessous.

	A	B	C	D	E	F	G
1	a	b	c	Δ			
2				=B2^2 − 4*A2*C2			
3							

• Dans la cellule E2

- Utiliser le menu du logiciel :

Insertion / Fonction, puis sélectionner la fonction test SI et valider.

Remplir les champs de textes comme suit :

D2 > =0

Deux racines

Pas de racines

• Dans la cellule F2

- Utiliser le menu du logiciel :

Insertion / Fonction, puis sélectionner la fonction test SI et valider.

Remplir les champs de textes comme suit :

D2 > = 0

(–B2–RACINE(D2))/(2*A2)

(Laisser vide le troisième champ de texte)

• Dans la cellule G2

• Utiliser le menu du logiciel :

Insertion / Fonction, puis sélectionner la fonction test SI et valider.

Remplir les champs de textes comme suit :

D2 > = 0

(-B2+RACINE(D2))/(2*A2)

(Laisser vide le troisième champ de texte).

• Donner les valeurs a, b, c et sélectionner D2 et tirer vers les cellules E2, F2 et G2.

• Pour entrer d'autres valeurs de a, b et c, passer à la ligne suivante et pour les cellules E2, F2 et G2, tirer vers le bas.

Appliquer

1 Résoudre dans IR les équations ci-dessous.

a) $(7x-1)(0{,}4x-4)=0$.

b) $y^2-2y=(y-2)(y+3)$.

c) $t^2-6t+9=0$.

d) $0{,}09\,m^2=1$.

2 Résoudre dans IR les équations ci-dessous.

a) $\dfrac{6t+8}{1-t}=3$; b) $\dfrac{4}{x}=\dfrac{x}{3}$.

c) $\dfrac{m^2}{6m-9}=1$; d) $\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{y+1}=0$.

3 Résoudre dans IR les équations ci-dessous.

a) $4x^2+3x-1=0$.

b) $5x^2+(x-1)^2=0$.

c) $x^2+(\sqrt{2}-\sqrt{5})x=\sqrt{10}$.

d) $\dfrac{2}{x-1}+\dfrac{3}{x}=6$.

e) $|x^2-2x|=|3x^2-x-10|$.

f) $\sqrt{2x+6}=x-1$.

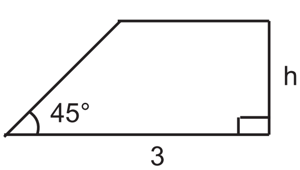
4 Résoudre dans IR.

a) $4x^2-|x|-14=0$; b) $x-2=\sqrt{x}$.

c) $x^2-\dfrac{10}{x^2}=3$.

5 Existe-t-il un carré tel que si l'on diminue de 3 cm la longueur de ses côtés, on diminue alors de 12 cm² l'aire de ce carré ?

6 Déterminer la hauteur h du trapèze ci-contre sachant qu'il a une aire égale à 4.



7 Résoudre dans IR

a) $(1-x^2)(x^2-3x)\leq 0$

b) $x^4>(x-2)^2$

c) $x-\dfrac{1}{x}\leq 1$

d) $|x^2-2x|<|3x^2-x-10|$

e) $\sqrt{2x+6}>x-1$

f) $4x^2-|x|-14\geq 0$

g) $x-2<\sqrt{x}$

Maîtriser

8 ***Quel heure est –il ?***

" Bonjour monsieur l'agent, pouvez vous me dire l'heure ? "

Mais bien sur répondit l'agent qui avait une réputation de mathématicien : ajoutez au quart du temps depuis minuit la moitié du temps jusqu'à minuit et vous aurez l'heure exacte.

Quelle heure était-il ?

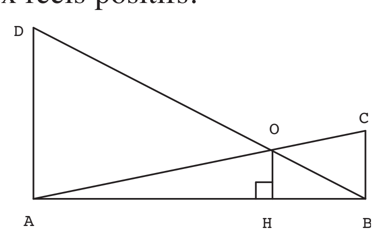
(Les casse-tête mathématiques –Sam loyd)

9 Trouver cinq entiers naturels consécutifs, dont la somme est comprise entre 2004 et 2009.

10 Dans un examen, la moyenne des candidats admis est 13, la moyenne des candidats refusés est 7 et la moyenne de l'ensemble des candidats est 10,60.

Quel est le pourcentage des admis par rapport à l'ensemble des candidats ?

11 Dans la figure ci-dessous, AD = 6, BC = 2, OH = x, AB = a et AH = b, où a et b sont deux réels positifs.



1) En utilisant le théorème de Thalès dans le triangle ABC, donner l'expression de b en fonction de a et x.

2) En utilisant de nouveau le théorème de Thalès dans le triangle ABD, donner l'expression de b en fonction de a et x.

3) En déduire que la distance OH est indépendante de la distance AB et la calculer.

12 Trouver cinq entiers naturels consécutifs tels que la somme des carrés des deux plus grands soit égale à la somme des carrés des trois autres.

13 Soit ABCD un trapèze de bases AB =1 et CD = 7 et K le projeté orthogonal de B sur (DC). On désigne par J le point de [DC] tel que DJ =1 et par M un point du segment [AD].

La parallèle à (DC) passant par M coupe respectivement les segments [BJ], [BK] et [BC] en I, H et N.

1) Montrer que $\dfrac{BH}{BK} = \dfrac{BI}{BJ}$.

2) On pose MN = x.

Montrer que $\dfrac{BI}{BJ} = \dfrac{x-1}{6}$.

3) Montrer que aire (ABMN) = $\dfrac{(x+1)BH}{2}$

et aire (MNCD) = $\dfrac{8BK-(x+1)BH}{2}$

4) Montrer que si MNCD et ABNM ont même aire alors $\dfrac{BH}{BK} = \dfrac{4}{x+1}$.

5) Pour quelle valeur de x le segment [MN] partage-t-il le trapèze ABCD en deux trapèzes de même aire ?

14 Déterminer deux réels u et v tels que :

a) $\begin{cases} \dfrac{1}{u} + \dfrac{1}{v} = \dfrac{7}{6} \\ uv = 3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} u^2 + v^2 = 8 \\ u + v = 2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} |u| + |v| = \dfrac{9}{2} \\ uv = -2 \end{cases}$ d) $\begin{cases} u^2 - v^2 = -6 \\ uv = 4 \end{cases}$

15 Un cycliste effectue un trajet aller et retour entre deux endroits A et B distants de 90 km. Il met au total 5 heures et 15 minutes. Calculer sa vitesse moyenne à l'aller sachant qu'elle est supérieure de 10 km/h à celle du retour.

16 Déterminer la longueur des côtés d'un triangle rectangle sachant que :

a) L'aire est égale à 210, l'hypoténuse est égale à 29.

b) Le périmètre est égal à 56, l'hypoténuse est égale à 25.

17 La pierre dans le puits (d'après le Petit Archimède).

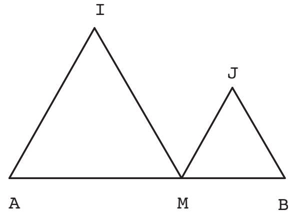
Je laisse tomber une pierre dans un puits et au bout de 3 secondes j'entends le « plouf ». Quelle est la profondeur du puits ?

Information :

Un caillou en chute libre, lâché sans vitesse initiale, parcourt au bout de t secondes une distance $x = 5t^2$ (en mètres). La vitesse du son est de 340 m/s.

18 Dans la figure ci-dessous, M est un point variable du segment [AB], les triangles AMI et BMJ sont équilatéraux.

On pose AB = a et AM = x.



1) Montrer que l'aire du triangle MIJ est $A(x)=\dfrac{\sqrt{3}}{4}x(a-x)$

2) Déterminer x pour que l'aire de MIJ soit égale à la moitié de celle de AMI

3) Déterminer la position du point M pour que l'aire du triangle MIJ soit maximale.

19 Résoudre dans IR :

a) $x^2+3x-4=x^3-1$

b) $x^2+3x-4<x^3-1$

20 Soit $f(x)=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2+2\left(x+\dfrac{1}{x}\right)-3$.

1) Résoudre l'équation $f(x)=0$

2) Factoriser f(x), puis résoudre l'inéquation $f(x)<0$.

21 Soit $A(x)=x^2+7x-\sqrt{3}$.

1) Vérifier que le trinôme A(x) admet deux racines distinctes x_1 et x_2.

2) Sans calculer ces racines, montrer qu'elles sont de signes opposés.

3) Préciser la position du réel 1 par rapport à ces racines.

22 Soit ABCD un carré de côté 7. On place les points M, N, P et Q respectivement sur [AB], [BC], [CD], [DA] tels que AM = BN = CP = DQ = x. On note S(x) l'aire du quadrilatère MNPQ.

1) Montrer que MNPQ est un carré.

2) a) Déterminer x pour que S(x) soit égale à 25.

b) Déterminer les valeurs de x pour lesquelles $S(x)\geq 25$.

23 Le plan est munit d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

Soit D la droite d'équation $y=2x+3$.

Soit M un point de la droite D et a son abscisse.

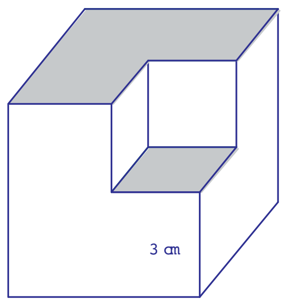
1)a) Montrer que $OM^2=5\left(a+\dfrac{6}{5}\right)^2+\dfrac{9}{5}$.

b) En déduire la valeur de a pour la quelle la distance OM est minimale.

2) Tracer la droite D et construire le point M_0 pour lequel la distance OM est minimale.

24 La figure ci-desous, représente un cube duquel on a découpé un autre cube.

Quelle est l'arête du cube découpé sachant que le volume du solide restant est 279 cm^3?



25 Résoudre dans IR l'équation

$(x^2-x)^2-7(x^2-x)+10=0$.

26 On considère un rectangle de périmètre 36 cm.

Montrer que l'aire de ce rectangle est inférieure ou égale à 81 cm^2.

Dans quel cas l'aire est égale à 81 cm^2 ?

AL - KHAWARIZMI

Mohamed Al – Khawarizmi est né en 780 à Khiva (actuellement ville d'Ouzbékistan) et mort à Bagdad en 850.

Ayant assimilé l'héritage mathématique grec, égyptien et hindou,
Al – Khawarizmi a rédigé plusieurs traîtés qui seront à l'origine de sciences nouvelles telles que l'algèbre ou l'arithmétique.

Dans ses livres d'arithmétique, on trouve le premier exposé connu sur le système de numération décimale. On apprend à utiliser neuf petits dessins, appelés chiffres et un petit cercle (le zéro) pour exprimer tous le nombres.

Le mot Al – Jabr apparaît dans son ouvrage « Al – Kitab Al – Mukhtassar fi hissab Al – Jabr wal Moukabala » et devient par la suite « Algèbre » en Europe. C'est dans ce livre qu'il étudie les équations du premier et du second degré. Son nom, Al – Khawarizmi, se transforme en « algorithme » qui veut dire « technique de calcul ».

Al – Khawarizmi ramène toutes les équations du premier et du second degré à six types d'équations :

- $ax^2 = bx$
- $ax^2 = c$
- $ax = c$
- $x^2 + bx = c$
- $x^2 + c = bx$
- $x^2 = bx + c$

les nombre a, b et c étant toujours positifs car à son époque, on ne connaît pas les nombres négatifs.

Par ailleurs, pour lui, résoudre une équation, c'est chercher ses racines positives seulement. S'il n'y en a pas, le problème est considéré comme impossible.

La théorie des équations est utilisée par Al – Khawarizmi pour résoudre des problèmes d'héritages, de géométrie, de commerce et d'astronomie.
Il démontre tous les résultats qu'il obtient en interprétant algébriquement des techniques géométriques.

D'après la revue « Omar El – Khayam »

NOTIONS DE POLYNÔMES

Tout le monde connait l'utilité de l'utile, mais personne ne connait l'utilité de l'inutile.

Pour démarrer

1 1) Développer, réduire et ordonner les expressions suivantes :

$A(x) = (x-1)(3x^2-5x-1)$; $B(x) = (3+x)^2(x^2-x-3)$;

$C(x) = (3x-2)^3$; $D(x) = (x+2)(2x-1)(x^2-2x+4)$.

2) Calculer $A(1)$; $B(-3)$; $C(-1)$; $D(-2)$ et $D\left(\frac{1}{2}\right)$

2 1) Soit $f(x) = 6x^3 - 7x^2 - 5x + 1$ et $g(x) = (2x-3)(3x^2+x-1) - 2$.

a)Calculer $f(0)$ et $g(0)$; $f(-1)$ et $g(-1)$; $f(3)$ et $g(3)$; $f\left(\frac{3}{2}\right)$ et $g\left(\frac{3}{2}\right)$.

b) A-t-on $f(x) = g(x)$, pour tout réel x ?

2) Répondre aux mêmes questions pour

$f(x) = 3x^3 - 2x + 1$ et $g(x) = (x-3)(3x^2+9x+25) + 76$.

3 Dans chacun des cas suivants, déterminer les valeurs de x pour lesquelles l'expression f(x) est définie, puis simplifier l'écriture de f(x).

a) $f(x) = \dfrac{x}{x+1} - \dfrac{x+1}{x}$ b) $\dfrac{1}{x^2-4} - \dfrac{1}{x+2}$ c) $f(x) = \dfrac{x^2+3x+2}{x+1}$.

4 soit $g(x) = \dfrac{x+\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}} + \dfrac{x-\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}}$.

a) Pour quelles valeurs de x l'expression g(x) est-elle définie ?

b) Calculer g(2) , g(3) et g (9).

c) Simplifier l'écriture de g(x).

Notion de fonction

Activité 1 *Distance de freinage*

Dans certaines conditions, la distance de freinage d (en mètres) d'une voiture qui roule à une vitesse v km/h est modélisée par la formule $d = 0{,}2\,v + \dfrac{v^2}{150}$.

1) Une voiture roule à 90 km/h.

Combien de mètres continue-t-elle de parcourir après le freinage ?

2) Quelles sont les vitesses qui permettent de s'arrêter

a) En moins de 12 mètres ?

b) A une distance comprise entre 40 et 50 mètres ?

Activité 2

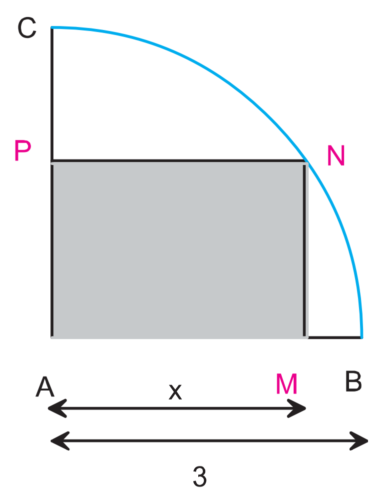
Dans la figure ci-contre, $[\overset{\frown}{BC}]$ est un quart de cercle de centre A et de rayon 3, M est un point qui décrit le segment [AB], privé de A et B, les points N et P sont respectivement sur l'arc $[\overset{\frown}{BC}]$ et le segment [AC], de sorte que AMNP soit un rectangle.

On désigne par x la longueur AM et par S(x) l'aire du rectangle AMNP

a) A quel intervalle appartient x ?

b) Exprimer S(x) en fonction de x.

c) Calculer $S\left(\frac{1}{2}\right)$, S(1) et $S\left(\sqrt{2}\right)$.



Définition

Soit E une partie non vide de IR. Lorsque à tout réel x de E, on associe au plus un réel y , on dit qu'on a définit une fonction de E vers IR.

Si on désigne par f cette fonction, on note y = f(x) et on écrit $f : E \longrightarrow IR$.

$$x \mapsto f(x)$$

L'ensemble D des réels x de E tel que f(x) existe est appelé l'ensemble de définition de la fonction f. On dira alors que f est définie sur D.

Vocabulaire

Soit D l'ensemble de définition de f, x un réel appartenant à D et y = f (x)

On dit que

- Le réel y est l'image de x par la fonction f.
- x est un antécédent du réel y par f.

Activité 3

Déterminer l'ensemble de définition de chacune des fonctions ci-dessous.

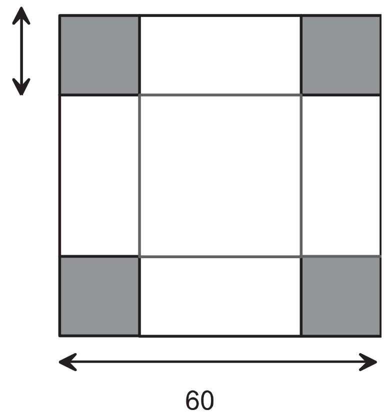
a) $f: IR \longrightarrow IR$; b) $g: IR \longrightarrow IR$; c) $h: IR \longrightarrow IR$; d) $k: IR \longrightarrow IR$

$x \mapsto 3x - 9$; $z \mapsto \sqrt{z-2}$; $t \mapsto -4t^2 + 2t$; $x \mapsto \dfrac{6x-1}{2x+3}$.

Fonction polynôme

Activité 4

Pour fabriquer une boite parallélépipédique, on dispose d'une plaque de carton carrée de 60 cm de côté dans laquelle on découpe à chaque coin un carré de x cm de côté. On obtient ainsi le patron d'une boite sans couvercle.



1) a) A quel intervalle appartient x ?

b) Déterminer, en fonction de x, le volume V(x) de la boite.

2) a) Calculer V(10) et vérifier que

$V(x) - V(10) = 4(x - 10)(x^2 - 50x + 400)$.

b) Déterminer le signe de $V(x) - V(10)$ et en déduire la valeur de x pour laquelle le volume de la boite est maximal.

Définition

Soient $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ et a_n des réels.

La fonction f définie sur IR par $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ est appelée fonction polynôme.

Les réels $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1$ et a_0 sont appelés les coefficients de la fonction polynôme.

Remarque

- Au lieu de dire « la fonction polynôme f définie sur IR par : $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ », on dit souvent « le polynôme f défini par : $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ ».
- Si $a_0 = a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$, le polynôme f est appelé polynôme nul.

Activité 5

Déterminer parmi les fonctions ci-dessous celles qui sont des polynômes.

a) $F: IR \longrightarrow IR$

$x \mapsto -2x^3 - 5x^2 - 1$.

b) $G: IR \longrightarrow IR$

$t \mapsto 1 + 3t + \dfrac{2}{3}t^2 - 6t^3$.

c) $H : IR \longrightarrow IR$

$x \mapsto |x|.$

d) $G : IR \longrightarrow IR$

$x \mapsto -2(x+1)^3 + 5x^2 - 4x.$

Assimiler : 1

Egalité de deux fonctions polynômes

Activité 6

1) On considère le polynôme f définie par $f(x) = x^2 - 5x + 6$.

a) Calculer f(2) et f(3).

b) f est-elle la fonction nulle ?

2) Soit g le polynôme définie par $g(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$.

a) Calculer $g(-1)$, $g(0)$ et $g(1)$ en fonction des réels a_2, a_1 et a_0.

b) Montrer que ($g(x) = 0$, pour tout réel x) équivaut à ($a_2 = a_1 = a_0 = 0$).

3) Soit h le polynôme définie par $h(x) = a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$.

Montrer que ($h(x) = 0$, pour tout réel x) équivaut à ($a_3 = a_2 = a_1 = a_0 = 0$).

4) Soit $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ un polynôme tel que $P(x) = 0$, pour tout réel x.
Quelle conjecture peut-on émettre sur les coefficients de ce polynôme ?

Activité 7

1) Soient f et g les polynômes définies par $f(x) = 3x^2 - x + 3$ et $g(x) = 2x^2 + 4x - 1$.

a) Vérifier que $f(1) = g(1)$ et que $f(4) = g(4)$.

b) La phrase « $f(x) = g(x)$, pour tout réel x » est-elle vraie ?

c) Déterminer les réels a_2, a_1 et a_0 tels que :

Pour tout réel x, $a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = -10x + 2x^2 + 11$.

2) Déterminer les réels a_3, a_2, a_1 et a_0 tels que :
Pour tout réel x, $a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 5x^3 - 3x^2 + 2x - 1$.

3) Soit $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ et $Q(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \ldots + b_1 x + b_0$ deux polynômes tels que $P(x) = Q(x)$, pour tout réel x.
que peut on dire de a_n et b_n, a_{n-1} et b_{n-1}, ..., a_0 et b_0 ?

Assimiler : 2

Définition *Degré d'un polynôme*

On admet que tout polynôme non nul P a une écriture unique de la forme
$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, avec $a_n \neq 0$.
L'entier n est appelé le degré du polynôme P, on écrit d°(P) = n.
On convient que le polynôme nul n'a pas de degré.
Le degré d'un polynôme constant est égal à zéro.

Vocabulaire

- a_0 s'appelle le terme constant.
- a_1x s'appelle le terme du premier degré ou le terme en x.
- $a_n x^n$ s'appelle le terme de degré n ou le terme en x^n.

Il est aussi appelé le terme du plus haut degré.

- Chacun des termes $a_0, a_1x, \ldots, a_{n-1}x^{n-1}$ et a_nx^n est appelé monôme.
- Tout polynôme de premier degré est appelé binôme ou binôme de premier degré.
- Tout polynôme du second degré est appelé trinôme ou trinôme du second degré.

Activité 8

Déterminer le degré de chacun des polynômes ci-dessous.

$P(x) = 3x^4 - 7x^2 + x$; $Q(x) = 2 - x + x^3 + x^5 + x^7$; $R(x) = (x+1)(x-1)$

$S(x) = -3x^3 + 2\sqrt{5}x^2 + 1$; $T(x) = \dfrac{3}{4}x^2 - x + x^6 + 1$

$V(x) = (2x+1)(2x^3 + 8x - 1)$; $K(x) = (x-1)^3 - x^3$.

Assimiler : 3

Opérations sur les fonctions polynômes

Activité 9

Soient f , g , p et q les polynômes définis pour tout réel x par :
$f(x) = 2x^3 - 5x^2 + x - 1$, $g(x) = -3x^2 + 7x - \sqrt{5}$, $p(x) = 3x^2 - x - 1$ et $q(x) = x - 2$.

1)a)Réduire et ordonner $f(x) + g(x)$, $g(x) + p(x)$, $g(x) - p(x)$, $f(x) - q(x)$, $2p(x)$ et $3f(x)$.

b) Déterminer le degré de chaque polynôme obtenu.

2) a)Réduire et ordonner $f(x)\,q(x)$, $g(x)\,p(x)$ et $g(x)\,q(x)$.

b) Déterminer le degré de chaque polynôme obtenu.

3) Soit $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ avec $a_n \neq 0$.
et $Q(x) = b_p x^p + b_{p-1} x^{p-1} + \ldots + b_1 x + b_0$ avec $b_p \neq 0$.
Quel est le degré du polynôme R telque $R(x) = P(x) \times Q(x)$

Définition

Soit f et g deux polynômes et α un réel.

- On appelle somme de f et g le polynôme noté $f + g$ et défini pour tout réel x par $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$.
- On appelle produit du polynôme f par le réel α le polynôme noté αf et définie pour tout réel x par $(\alpha f)(x) = \alpha f(x)$.
- On appelle produit des polynômes f et g le polynôme noté f g et définie pour tout réel x par $(f g)(x) = f(x) \times g(x)$.

Remarque

Le degré du polynôme f g est la somme des degrés de f et de g.

Activité 10

Réduire et ordonner les polynômes $P + Q$, $3P - 2Q$ et $P Q$ dans chacun des cas suivants et préciser le degré de chaque polynôme obtenu.

a) $P(x) = 2x^3 - x^2 + 2x - 1$; $Q(x) = 3x^3 - x$.

b) $P(x) = (2x + 1)^2$; $Q(x) = (x - 2)(x^3 + 1)$.

c) $P(x) = 3x^{10} - x^4 + 5x + 4$; $Q(x) = 3x^7 - 2x$.

Assimiler : 4-5

Racines d'un polynôme – Factorisation d'un polynôme

Activité 11

Soit $f(x) = x^2 + 2x - 3$, $g(x) = x^3 + 2x^2 - 1$ et $h(x) = 3x^3 - x^2 - 6x + 2$.

a) Calculer $f(-1)$, $f(1)$ et $f(-3)$.

b) Calculer $g(-1)$, $g(0)$ et $g\left(\sqrt{2}\right)$.

c) Calculer $h(0)$, $h\left(\frac{1}{3}\right)$ et $h(2)$.

Définition

On dit qu'un réel α est une racine ou un zéro d'un polynôme f si $f(\alpha) = 0$.

Activité 12

Montrer que le réel α est une racine du polynôme donné.

a) $f(x) = 5x^2 + x - 6$; $\alpha = 1$.

b) $g(x) = 4x^4 + 5x^3 - 14x^2 - 9x + 14$; $\alpha = -2$.

d) $h(x) = 8x^5 + 3x^2 - 1$; $\alpha = \frac{1}{2}$.

Activité 13

Soit P le polynôme défini par $P(x) = ax^4 + (a+1)x^3 - (b+9)x^2 - (2b-1)x + 14$, où a et b sont des réels.

a) Déterminer a et b sachant que 1 et -2 sont deux racines du polynôme P.

b) a et b étant les valeurs trouvées, déterminer le polynôme Q tel que :

$P(x) = (x^2 + x - 2)Q(x)$, pour tout réel x.

Assimiler : 6

Activité 14

Factoriser chacun des polynômes A , B , C et D définies par

$A(x) = x^4 - 3x^3 + 2x^2$; $B(x) = (x^2 + 5x) + 2(x+5)^3$

$C(x) = 2x^3 + 4x^2 + 3x + 6$; $D(x) = x^4 + 3x^3 - x - 3$

Assimiler : 7

Activité 15

Soit P et Q les polynômes définis par $P(x) = 3x^3 + x^2 + 2x - 6$ et $Q(x) = x^3 + 3x^2 - 4x - 12$.

1) a) Vérifier que 1 est une racine de P.

b) Déterminer trois réels a, b et c tels que, pour tout réel x, on a $P(x) = (x-1)(ax^2 + bx + c)$.

2) a) Calculer $Q(2)$ et $Q(-3)$.

b) Déterminer le polynôme R tel que, pour tout réel x, on a $Q(x) = (x-2)(x+3)R(x)$.

Définition

Soit P et Q deux polynômes.

On dit que le polynôme P est factorisable par le polynôme Q s'il existe un polynôme R tel que pour tout réel x, $P(x) = Q(x) \times R(x)$.

Activité 16

1) Soit α un réel.

Prouver que si un polynôme est factorisable par $(x - \alpha)$ alors α est une racine de ce polynôme.

2) Soit α un réel et P le polynôme défini par $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ où a, b, c et d sont des réels avec $a \neq 0$.

a) Factoriser $P(x) - P(\alpha)$.

b) En déduire que si α est une racine du polynôme P alors il existe un polynôme Q, dont on précisera le degré, tel que pour tout réel x, $P(x) = (x - \alpha)Q(x)$.

c) Prouver que le polynôme P admet au plus trois racines.

3) a) Soit F le polynôme défini par $F(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$, où a, b, c, d et e sont des réels avec $a \neq 0$. soient α, β deux racines distinctes de F.
Montrer qu'il existe un polynôme G tel que $F(x) = (x - \alpha)(x - \beta) G(x)$.
b) Prouver que le polynôme F admet au plus quatre racines.

4) Soit f un polynôme de degré n $(n > 2)$ et soient α, β et γ trois racines distinctes de f.
a) Quelle conjecture peut-on émettre sur la factorisation de f ?
b) Quelle conjecture peut-on émettre sur le nombre maximum de racines de f ?

Activité 17

1) Dans chacun des cas suivants, vérifier que α est une racine de P et écrire P (x) sous la forme $(x - \alpha) Q(x)$, où Q est un polynôme qu'on déterminera.

a) $P(x) = 2x^3 - 7x^2 - 17x + 10$; $\alpha = -2$.

b) $P(x) = 2x^2 - (1 + 2\sqrt{3})x - 1 - \sqrt{3}$; $\alpha = -\frac{1}{2}$.

c) $P(x) = x^4 - 3x^3 + x^2 - 4x + 3$; $\alpha = 3$.

2) Dans chacun des cas suivants, trouver une racine apparente du polynôme P et factoriser P(x).

a) $P(x) = x^3 - 11x^2 + 30x$

b) $P(x) = x^4 + x^3 - 3x^2 - 4x - 4$.

c) $P(x) = 3x^3 + 4x^2 - 6x - 7$

d) $P(x) = 2x^2 - (4 + \sqrt{2})x + 2\sqrt{2}$

Activité 18

Pour chacun des polynômes P ci-dessous

a) Vérifier que α et β sont des racines du polynôme P.

b) Ecrire P (x) sous la forme $P(x) = (x - \alpha)(x - \beta) Q(x)$.

- $P(x) = 3x^3 - 13x^2 - 11x + 5$ $\alpha = -1$; $\beta = 5$.
- $P(x) = x^4 + 2x^3 - 4x^2 - 5x - 6$ $\alpha = 2$; $\beta = -3$.

Assimiler : 8-9

Activité 19

Soit $P(x) = 4x^3 + x^2 - 11x + 6$ et $Q(x) = x^4 + 2x^3 - x - 2$.

a) Vérifier que 1 et -2 sont solutions de l'équation $P(x) = 0$ et de l'équation $Q(x) = 0$.

b) Déterminer les autres solutions de chacune de ces deux équations.

c) Déterminer le signe de l'expression $x^4 + 6x^3 + x^2 - 12x + 4$.

Assimiler : 10-11

Activité 20

Soit $f(x) = x^3 - 5x^2 + x + 6$, $g(x) = x^2 - 2x - 4$ et $h(x) = f(x) - g(x)$.

1) a) Calculer $f(2)$ et $g(2)$.

   b) En déduire une racine de h.

2) a) Factoriser $h(x)$.

   b) Résoudre l'équation $f(x) = g(x)$.

3) Résoudre l'inéquation $f(x) > g(x)$.

Activité 21

1) Soit $P(x) = x^3 + 2x^2 - 5x - 6$. On suppose que P admet trois racines distinctes α, β et γ. Sans calculer ces racines, calculer $\alpha + \beta + \gamma$, $\alpha\beta\gamma$, $\alpha\beta + \gamma\alpha + \beta\gamma$ et $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma}$

2) On suppose que le polynôme P défini par $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ avec $a \neq 0$ admet trois racines distinctes α, β et γ et qu'aucune n'est nulle.

Calculer $\alpha + \beta + \gamma$, $\alpha\beta\gamma$, $\alpha\beta + \gamma\alpha + \beta\gamma$, $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$ et $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma}$

3) Existe-t-il trois réels α, β et γ tels que $\alpha + \beta + \gamma = 5$, $\alpha\beta\gamma = -1$ et $\alpha\beta + \gamma\alpha + \beta\gamma = 3$?

Activité 22 Polynômes symétriques de degré 3

Soit $f(x) = ax^3 + bx^2 + bx + a$, avec $a \neq 0$.

1) a) Trouver une racine apparente de f et en déduire une factorisation de $f(x)$.

   b) Discuter alors suivant les valeurs de a et b le nombre de solutions de $f(x) = 0$.

2) Dans chacun des cas suivants résoudre l'équation $f(x) = 0$ et préciser le signe de $f(x)$.

   a) $f(x) = 2x^3 + 5x^2 + 5x + 2$; b) $f(x) = 7x^3 - 43x^2 - 43x + 7$.

Activité 23 Fonctions rationnelles

Dans la figure ci-contre, le triangle ABC est rectangle en B, le demi-cercle de centre O a pour rayon 1 , la droite (AC) est tangente au demi-cercle en H.

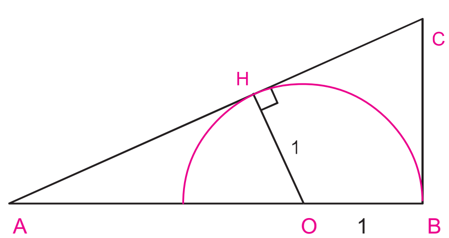
On pose $AB = h$ et $BC = x$.

1) Exprimer CH, AH et $\tan(\widehat{BAC})$ en fonction de x et h.

2) Montrer que $h = \frac{2x^2}{x^2 - 1}$.

3) a) Peut-on avoir $h = 2$?

   b) Peut-on avoir $h = 3$? $h = \frac{9}{4}$?



Activité 24

On considère les deux polynômes f et g définis par

$f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$ et $g(x) = x^2 + x - 6$.

1) Vérifier que 2 est une racine de f et en déduire une factorisation de f(x).

2) Résoudre l'équation $g(x) = 0$.

3) Soit $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \frac{f(x)}{g(x)}$$

a) Déterminer l'ensemble de définition D de la fonction h.

b) Pour x appartenant à D, simplifier h (x) puis déterminer son signe.

Définition

Soit f et g deux fonctions polynômes.

La fonction $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \frac{f(x)}{g(x)}$$

est appelée fonction rationnelle.

Activité 25

1) a) Déterminer deux réels a et b tels que, pour tout réel x différent de 0 et de –1, on a

$$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1}.$$

b) Calculer alors, la somme $S_1 = \frac{1}{1\times 2} + \frac{1}{2\times 3} + \frac{1}{3\times 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}$.

2) a) Déterminer trois réels a ; b et c tels que, pour tout réel x non nul et différent de –1 et de –2, on a $\frac{1}{x(x+1)(x+2)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x+2}$.

b) Calculer alors la somme $S_2 = \frac{1}{1\times 2\times 3} + \frac{1}{2\times 3\times 4} + \frac{1}{3\times 4\times 5} + \dots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$.

3) Calculer la somme

$$S_3 = \frac{1}{1\times 2\times 3\times 4} + \frac{1}{2\times 3\times 4\times 5} + \frac{1}{3\times 4\times 5\times 6} + \dots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)}.$$

Assimiler : 12-13

1 Déterminer parmi les fonctions ci-dessous celles qui sont des polynômes et préciser pour chaque polynôme ses coefficients.

a) $P : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \mapsto 5x^2 - \frac{1}{6}x$.

b) $Q : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \mapsto 3\sqrt{2}$.

c) $R : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \mapsto x^2 + 5|x|$.

d) $S : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \mapsto 3x^5 - 2\sqrt{3}x + \frac{1}{x^2+1}$.

2 1) Déterminer trois réels a, b et c tels que, pour tout réel x,

$$(a-1)x^3 + (2-b)x^2 + (c+3) = 0.$$

2) Existe-t-il deux réels a et b tels que, pour tout réel x, $ax^2 + bx + 4 = 0$?

3) Existe-t-il un réel a tel que, pour tout réel x, $a^2x^2 + (a^2 + a)x + a = 9x^2 + 6x - 3$?

3 Dans chacun des cas suivants, déterminer le degré du polynôme P et le coefficient du terme du plus haut degré du polynôme P.

a) $P(x) = (2x + 5)(-4x + 1)$

b) $P(x) = x\sqrt{3} - 8$

c) $P(x) = 6x^3 - 5x^2 + (2x^2 + x - 1)(2 - 3x)$.

d) $P(x) = -3 + \sqrt{2}$

e) $P(x) = (\sqrt{3}x^4 + 1)^2 - 6(x + 1)^3$.

f) $P(x) = (x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)(x^2 - 1)$.

4 Soit $P(x) = 3x^4 - 2x^3 + x - 2$, $Q(x) = -5x^3 + 2x - 3$ et $R(x) = x^3 - x + 5$.

Réduire et ordonner.

a) $P(x) + Q(x)$; b) $Q(x) \,.\, R(x)$; c) $5R(x) + Q(x)$

d) $P(x) \,.\, R(x)$; e) $Q(x) \,.\, R(x)$.

5 Déterminer, sans développer, le degré de chacun des polynômes A, B et C définis par

$A(x) = (x^2 + x - 5)(2x^5 - 2x^3 + 1)$; $B(x) = (x^2 + 3)^5$;

$C(x) = (x^4 - 2x^3 + x^2 + 5x - 7)(x - 1) - (x^5 + 1)$.

6 Dans chacun des cas suivants, vérifier que le réel α est une racine du polynôme f.

a) $f(x) = x^2 - 15x + 50$; $\alpha = 10$

b) $f(x) = 4x^4 + 5x^3 - 14x^2 - 9x + 14$; $\alpha = 1$

c) $f(x) = x^3 - x^2 - x - 2$; $\alpha = 2$

d) $f(x) = 2x^6 - 5x^4 - 6x^2 + 9$; $\alpha = \sqrt{3}$.

7 Factoriser.

$F(x) = (x^2 - 4x + 4) + 2(x - 2)$; $G(x) = x^4 - 64$ et $H(x) = 9(x + 1)^2 - 4(2x - 1)^2$.

8 Soit $P(x) = x^3 - 4x^2 - 2x + 8$.

a) Vérifier que 4 est une racine du polynôme P.

b) Factoriser P et préciser le signe de $P(x)$.

9 Soit $Q(x) = x^4 - x^3 - 8x^2 + 2x + 12$.

a) Vérifier que –2 et 3 sont des racines du polynôme Q.

b) Factoriser $Q(x)$ et résoudre l'équation $Q(x) = 0$.

10 Résoudre dans IR les équations suivantes.

a) $x^3 + x^2 - 2 = 0$; b) $3x^3 - 5x^2 + 3x - 1 = 0$.

(On cherchera une racine apparente).

11 Résoudre dans IR les inéquations suivantes

a) $2x^3 - 3x < 2 - 3x^2$; b) $x^3 + 4x^2 > 2x^2 - 4x - 3$.

12 Soit f la fonction rationnelle définie par $f(x) = \dfrac{x^3 - 8}{x^2 + 2x - 8}$.

a) Déterminer l'ensemble de définition D de la fonction f.

b) Résoudre l'inéquation $\dfrac{x^3 - 8}{x^2 + 2x - 8} > 0$.

13 Soit f la fonction rationnelle définie par $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + x - 2} - \dfrac{3}{x^2 + 2x - 3}$.

a) Déterminer l'ensemble de définition D de la fonction f.

b) Dresser le tableau de signe de f(x).

Egalité de deux polynômes

- Un polynôme est nul si et seulement si tous ses coefficients sont nuls.
- Deux polynômes sont égaux si et seulement s'ils ont même degré et les coefficients des termes de même degré sont égaux.

Opérations sur les fonctions polynômes

Si f et g sont deux polynômes non nuls et α un réel non nul alors :

- $f + g$ est un polynôme.
- fg est un polynôme et le degré de fg est égal à la somme des degrés de f et g
- αf est un polynômes et le degré de αf est égal à celui de f .

Racines d'un polynôme

- Un polynôme de degré 3 admet au plus trois racines.
- Un polynôme de degré 4 admet au plus quatre racines.
- On admet qu'un polynôme de degré n $(n \geq 2)$, admet au plus n racines.

Factorisation d'un polynôme

Soit f un polynôme de degré n

- Pour $n \geq 1$, si α est une racine de f alors
  - f est factorisable par $x - \alpha$
  - Il existe un polynôme g de degré $(n - 1)$ tel que $f(x) = (x - \alpha)\, g(x)$.
- Pour $n \geq 2$, si α et β sont des racines de f alors
  - f est factorisable par $(x - \alpha)(x - \beta)$.
  - Il existe un polynôme g de degré $(n - 2)$ tel que $f(x) = (x - \alpha)(x - \beta)\, g(x)$.
- Plus généralement : Soit f un polynôme de degré n $(n \geq 3)$.

  On admet que si $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ et α_k (avec $k \leq n$) sont des racines de f alors
  - f est factorisable par $(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)(x - \alpha_3)\ldots(x - \alpha_k)$.
  - Il existe un polynôme g de degré $(n - k)$ tel que

    $f(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)(x - \alpha_3)\ldots(x - \alpha_k)\, g(x)$.

1 Polynômes symétriques de degré 4

On se propose de résoudre l'équation (E) : $2x^4 - 9x^3 + 14x^2 - 9x + 2$.
1) Vérifier que 0 n'est pas une solution de (E) et établir que l'équation (E) est équivalente à l'équation (E_1) : $2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 9\left(x + \frac{1}{x}\right) + 14 = 0$.
2) Résoudre l'équation (E).
3) Résoudre les équations.
a) $x^4 + 4x^3 - 6x^2 + 4x + 1 = 0$; b) $x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 3x + 1 = 0$.

Indication

2) Poser $X = x + \frac{1}{x}$ et montrer que la résolution de l'équation (E) se ramène à la résolution de deux équations du second degré.

2 *Calcul des sommes $S_p = 1^p + 2^p + 3^p + \dots + n^p$*

Soit n un entier naturel non nul.
1) On pose $S_1 = 1 + 2 + 3 + \dots + n$.
a) Déterminer un polynôme P de degré 2 tel que , pour tout réel x, $P(x) - P(x - 1) = x$ et $P(0) = 0$.
b) En déduire que $S_1 = \dfrac{n(n+1)}{2}$.
2) On pose $S_2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$.
a) Déterminer un polynome Q de degré 3 tel que, pour tout réel x,
$Q(x) - Q(x - 1) = x^2$ et $Q(0) = 0$.
b) En déduire que $S_2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Indications

1) b) Remplacer x successivement par 1, 2, … , n.
2) Procéder comme à la première question avec un polynôme P de degré 3.

3 1) Soit P le polynôme défini par $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$, avec $a_n \neq 0$.
Montrer que si P admet (n+1) racines distinctes, alors P est le polynôme nul.
2) Soient a, b et c trois réels distincts et soit f le polynôme défini par :

$$f(x) = \frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} + \frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + \frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)}$$

a) Calculer f(a) , f(b) et f(c)
b) Montrer que f(x) = 1, pour tout réel x.

Indication

1) Supposer que P est non nul et considérer son degré.
2) Utiliser la première question.

Factorisation d'un polynôme

On considère un polynôme P défini par $P(x) = a\,x^3 + b\,x^2 + c\,x + d$, où a, b, c et d sont quatre réels donnés.
Soit α un réel. On se propose de calculer $P(\alpha)$ puis de déterminer le polynôme Q tel que $P(x) - P(\alpha) = (x - \alpha)\,Q(x)$. Il est clair que le polynôme Q est du type $Q(x) = a\,x^2 + b'\,x + c'$.

A l'aide d'un tableur

On se propose de déterminer les coefficients b' et c' en fonction de a, b, c et d.

- Ouvrir une feuille de calcul Excel.
- Remplir un tableau comme ci-dessous.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	**a**	**b**	**c**	**d**	**α**	**P(α)**	**b'**	**c'**
2								
3								
4								

- Dans les cellules A2, B2, C2 et D2 taper respectivement les coefficients a, b, c et d du polynôme P.
- Dans la cellule E2, taper la valeur de **α** .
- Dans la cellule F2, taper = A2*E2^3+B2*E2^2+C2*E2+D2.
- Dans la cellule G2, taper = A2*E2+B2.
- Dans la cellule H2, taper = A2*E2^2+B2*E2+C2.

Ainsi on obtient les coefficients b' et c'.
Pour entrer d'autres valeurs de a, b, c et d, il suffit de les taper dans la ligne suivante et tirer à chaque fois vers le bas le petit curseur qui apparaît en bas à gauche des cellules F2, G2 et H2.

Exemple

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	**a**	**b**	**c**	**d**	**α**	**P(α)**	**b'**	**c'**
2	**4**	**5**	**-2**	**1**	**1**	**8**	**9**	**7**
3	**-3**	**0**	**1**	**1**	**5**	**-369**	**-15**	**-74**

Appliquer

1 Soient $f(x) = x^4 + x^2 - 5x + 1$,
$g(x) = 5x^3 + x + 1$ et $h(x) = 2x^2 - 7x - 2$.
Réduire et ordonner
a) $f(x) - h(x)$; b) $2g(x) - 5h(x)$
c) $f(x) + g(x) + h(x)$; d) $f(x)\,h(x)$
e) $f(x)\,g(x)$

2 Soit $f(x) = x^3 + x^2 - 8x - 6$.
Vérifier que $1 - \sqrt{3}$ est une racine de f.

3 Soit $P(x) = nx^{n+1} - (n+1)x + 1,\ n \in \mathbb{N}$
Vérifier que 1 est un zéro de P.

4 Soit $f(x) = (x+1)^{2n} - x^{2n} - 2x - 1,\ n \in \mathbb{N}^*$
Vérifier que -1 ; $-\dfrac{1}{2}$ et 0 sont des racines de f .

5 Soit $A(x) = x^3 - 4x^2 - 2x + 8$
et $B(x) = x^4 - x^3 - 8x^2 + 2x + 12$.
Vérifier que 4 est une racine de A et que
-2 et 3 sont des racines de B.

6 Soit f la fonction rationnelle définie par
$$f(x) = \frac{x^2 - 4x + 4}{6x^3 - 11x^2 + 6x - 1}$$
a) Vérifier que 2 est un zéro du polynôme P défini par $P(x) = 6x^3 - 11x^2 + 6x - 1$.
b) Factoriser P et déterminer l'ensemble de définition de f.
c) Simplifier f(x) et résoudre l'inéquation $f(x) < 0$.

7 Soient f et g les fonctions rationnelles définies par $f(x) = \dfrac{x^2 + 5x + 6}{x^2 + x - 2}$
et $g(x) = \dfrac{x^3 + 1}{x^2 + 2x - 3}$.

a) Déterminer l'ensemble de définition de chacune de ces fonctions.
b) Simplifier f(x) et g(x).
c) Résoudre l'inéquation $\dfrac{x^3 + 1}{x^2 + 2x - 3} > 0$.

8 Soit g la fonction rationnelle définie par
$$g(x) = \frac{1}{x-1} + \frac{2}{x+1} + \frac{1}{x^3 + x^2 - x - 1}.$$
a) Déterminer un polynôme P tel que pour tout réel x on a $x^3 + x^2 - x - 1 = (x^2 - 1)P(x)$.
b) Déterminer l'ensemble de définition de g.
c) Simplifier g(x).
d) Résoudre l'inéquation
$$\frac{1}{x^3 + x^2 - x - 1} < \frac{1}{1-x} - \frac{2}{x+1}.$$

9 Résoudre les inéquations suivantes
a) $\dfrac{x^3 - 7x - 6}{x^2 - 5x - 6} > 0$; b) $\dfrac{x^4 + 2x^3 - 1}{x+1} \leq 1$.

Maîtriser

10 Soit a un réel et soit f le polynôme défini par $f(x) = (x - a + 2)^3 - (x^3 - a^3 + 8)$.
Vérifier que a et -2 sont des racines de f.

11 Soit $P(x) = x^3 + 6x^2 + 12x - 56$.
a) Chercher une racine entière de P.
b) Résoudre l'équation $P(x) = 0$.

12 Soit $f(x) = x^3 + 16x^2 + 86x + 156$

a) Déterminer trois réels a, b et c tels que

$f(x) = (x + 5)^3 + a(x + 5)^2 + b(x + 5) + c$

b) Factoriser $f(x)$.

13 Soient $f(x) = x^2 + x - 12$ et

$g(x) = -x^3 + 4x^2 - 4x + 3$.

a) Vérifier que f et g ont une racine commune.

b) Factoriser $g(x)$.

c) Résoudre les inéquations $g(x) < 0$ et $g(x) > f(x)$.

14 Soient $P(x) = 2x^3 - 5x^2 - 11x - 4$ et $Q(x) = 2x^4 - 15x^3 + 36x^2 - 28x$.

a) Résoudre les équations $P(x) = 0$ et $Q(x) = 0$.

b) Déterminer suivant les valeurs de x le signe de $P(x)$ et celui de $Q(x)$.

15 Soient $f(x) = -x^3 - 3x^2 + 2x + 9$ et $g(x) = x^3 + 3x^2 - x$ et soit $h(x) = f(x) - g(x)$

1)a) Calculer $f(-3)$ et $g(-3)$.

b) En déduire une racine de h.

2)a) Factoriser $h(x)$.

b) Résoudre l'équation $f(x) = g(x)$.

3) Résoudre l'inéquation $f(x) \leq g(x)$.

16 **Problème de Bhaskara**

« Quel est, homme savant, le nombre qui multiplié par 12 et ajouté au cube du nombre, est égal à 6 fois le carré, augmenté de 35 » ?

17 Soit a, b et c trois réels distincts et soit f le polynôme défini par :

$$f(x) = (b - c)(x - a)[(x + a)^2 + (b + c)^2] + (c - a)(x - b)[(x + b)^2 + (c + a)^2] + (a - b)(x - c)[(x + c)^2 + (a + b)^2]$$

1) Calculer $f(a)$, $f(b)$ et $f(c)$.

2) En déduire une expression simple de $f(x)$.

18 Soit P le polynôme défini par

$P(x) = x^4 - x^3 - 3x^2 + 2x + 2$

1) a) Montrer que $\sqrt{2}$ et $-\sqrt{2}$ sont deux zéros du polynôme P.

b) Déterminer un polynôme Q tel que, pour tout réel x, on a $P(x) = (x^2 - 2)Q(x)$.

2) Soit f la fonction rationnelle définie par

$$f(x) = \frac{3x}{x^4 - 4} + \frac{1}{P(x)}$$

a) Déterminer l'ensemble de définition de f puis simplifier $f(x)$.

b) Résoudre l'équation $f(x) = 0$.

19 Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \frac{3}{x^2 + x - 2} - \frac{2x^2}{x^2 - 1}$$

a) Déterminer l'ensemble de définition de f puis simplifier $f(x)$.

b) Résoudre l'inéquation

$$\frac{3}{x^2 + x - 2} \geq \frac{2x^2}{x^2 - 1}.$$

Factorisation d'un polynôme – méthode de la division

On a proposé dans la rubrique « Explorer » une méthode de factorisation d'un polynôme connaissant une ou plusieurs racines. Cette méthode est appelée méthode d'identification.

On va exposer, sur un exemple, une deuxième méthode de factorisation appelée méthode de la division suivant les puissances décroissantes.

Exemple

Soit le polynôme P défini par $P(x) = 6x^3 + x^2 + 8x - 5$.

Déterminer le polynôme Q tel que pour tout réel x, $P(x) = (2x - 1)\,Q(x)$.

Solution

Le principe est le suivant : on ne s'occupe que du terme de plus haut degré et comme le terme de plus haut degré de P(x) est $6x^3$ donc le terme de plus haut degré de Q(x) est $3x^2$.

Ainsi $Q(x) = 3x^2 + R(x)$, où R est un polynôme de degré inférieur ou égal à 1.

On obtient donc $6x^3 + x^2 + 8x - 5 = (2x - 1)(3x^2 + R(x))$

d'où $6x^3 + x^2 + 8x - 5 - (2x - 1)3x^2 = (2x - 1)R(x)$.

En développant on obtient $4x^2 + 8x - 5 = (2x - 1)R(x)$.

Pour déterminer R on va encore s'intéresser aux termes de plus haut degré.

On aura $R(x) = 2x + c$ où c est une constante .

On aura alors $4x^2 + 8x - 5 = (2x - 1)(2x + c)$

soit encore $4x^2 + 8x - 5 - (2x - 1)2x = (2x - 1)c$

ce qui donne $10x - 5 = (2x - 1)c$ d'où $c = 5$

et par suite $6x^3 + x^2 + 8x - 5 = (2x - 1)(3x^2 + 2x + 5)$.

Disposition pratique

En pratique on adopte une disposition semblable à celle utilisée dans la division des nombres.

$6x^3 + x^2 + 8x - 5$	$2x-1$
$6x^3 - 3x^2$	$3x^2 + 2x + 5$
$0 + 4x^2 + 8x - 5$	
$+ 4x^2 - 2x$	
$0 + 10x - 5$	
$+ 10x - 5$	
$0 + 0$	

Le bonheur est quelque chose qui se multiplie quand il se divise..

Paulo COELHO

Pour démarrer

1 Indiquer parmi les égalités suivantes celles qui traduisent une division euclidienne, préciser dans ces cas le dividende, le diviseur, le quotient et le reste.
a) $73 = 20 \times 3 + 13$.
b) $155 = 17 \times 8 + 19$.
c) $189 = 12 \times 15 + 9$.
d) $252 = 14 \times 18$.

2 Un élève a effectué sur sa calculatrice la division de 327 par 54, il a obtenu 6,055555556. En utilisant la calculatrice, déterminer le reste de la division euclidienne de 327 par 54.

3 a) Décomposer en produit de facteurs premiers les entiers naturels 245, 252 et 600.
b) Calculer PPCM(245, 252), PPCM(252, 600) et PPCM(245, 600).
c) Calculer PGCD(245, 252), PGCD(252, 600) et PGCD(245, 600).

4 Soient a un entier naturel et n un diviseur de a.
Indiquer parmi les énoncés suivants ceux qui sont vrais.
a) a est un multiple de n
b) a et n sont premiers entre eux.
c) PGCD (a, n) = n
d) a = k n, où k est un entier naturel.
e) PPCM (a, n) = na.
f) Le reste de la division euclidienne de a par n est zéro.

5 Recopier et compléter le tableau suivant :

	divisible par 2	divisible par 3	divisible par 5	divisible par 9
72531	non	oui	non	oui
923864				
1231105				
7843621				
813543210				

Division euclidienne - divisibilité

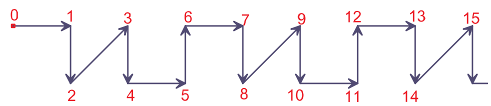
Activité 1

Quel jour de la semaine serons-nous ;

- après 77 jours ?
- après 155 jours ?
- après 234 jours ?

Activité 2

Les entiers naturels de 0 à 1000 ont été reliés par des flèches comme l'indique la figure ci-dessous.



Quelle est parmi les successions de flèches suivantes celle qui relie le nombre 527 au nombre 530 ?

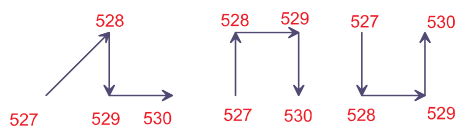


Fig 1 Fig 2 Fig 3

(D'après *le Kongourou des Mathématiques*)

Activité 3

Soient n, x et y trois entiers naturels tels que n divise x et n divise y.

a) Montrer que n divise px et n divise py, où p est un entier naturel.

b) Montrer que n divise x + y.

c) Montrer que n divise x – y ; (x ≥ y).

Assimiler : 1-2-3-4

Critères de divisibilité par 2, 5, 4, 25 et 8

Activité 4

1) a) Déterminer pour chacun des nombres 8 ; 37 ; 175 ; 18159 ; 350600 ; 8587325 ; le reste de sa division euclidienne par 10.
   Que remarque t-on ?
   b) Soit n un entier naturel. On désigne par u le chiffre des unités de n.
   Justifier l'écriture de n sous la forme n = 10 q + u, où q est un entier naturel.
2) a) Soit r le reste de la division euclidienne de u par 5.
   Donner les valeurs possibles de r et montrer que , dans chaque cas, r est aussi le reste de la division euclidienne de n par 5.

b) Montrer que n et u ont le même reste dans la division euclidienne par 5.

c) Montrer que n et u ont le même reste dans la division euclidienne par 2.

3) Enoncer un critère de divisibilité par 2 et par 5.

Activité 5

1) a) Déterminer pour chacun des nombres 12 ; 50 ; 133 ; 984 ; 4500 ; 79375 le reste de sa division euclidienne par 100.

Que remarque t-on ?

b) Pour chacun des nombres précédents, déterminer le reste de sa division euclidienne par 4 et par 25.

2) Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 10 et soit b le nombre formé par ses deux derniers chiffres.

a) Justifier l'écriture de n sous la forme n = 100 a + b, où a est un entier naturel.

b) Montrer que n et b ont le même reste dans la division euclidienne par 4.

c) Montrer que n et b ont le même reste dans la division euclidienne par 25.

3) Enoncer un critère de divisibilité par 4 et par 25.

Activité 6

1) a) Déterminer pour chacun des nombres 23 ; 96 ; 249 ; 1672 ; 3502 ; 19456 le reste de sa division euclidienne par 1000.

Que remarque t-on ?

b) Pour chacun des nombres précédents, déterminer le reste de sa division euclidienne par 8.

2) Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 100 et soit b le nombre formé par ses trois derniers chiffres.

a) Justifier l'écriture de n sous la forme n = 1000 a + b, où a est un entier naturel.

b) Montrer que n et b ont le même reste dans la division euclidienne par 8.

c) Enoncer un critère de divisibilité par 8.

Assimiler : 5-6-7

Critères de divisibilité par 3 et par 9

Activité 7

n étant un entier naturel et S la somme de ses chiffres, on sait que :

• n est divisible par 3 (respectivement par 9) si et seulement si S est divisible par 3 (respectivement par 9).

• n et S ont le même reste dans la division euclidienne par 3 (respectivement par 9).

Dans cette activité on se propose de démontrer ces résultats pour un entier n à quatre chiffres.

1) Soit n un entier naturel à quatre chiffres. On désigne par a, b, c et d respectivement, les chiffres des milliers, des centaines, des dizaines et des unités de n.

Soit S = a + b + c + d la somme des chiffres de n.

a) Justifier l'écriture n = 999 a + 99 b + 9 c + S.

b) Montrer que n – S est divisible par 3 et par 9.

2) a) Montrer que n et S ont le même reste dans la division euclidienne par 3.

b) Montrer que n et S ont le même reste dans la division euclidienne par 9.

Assimiler : 8-9

Activité 8 Du lait de l'huile et du pétrole

Un paysan part avec sa camionnette vers le marché pour acheter du lait, de l'huile et du pétrole. Il dispose de neuf récipients de contenances respectives (en litres)

3 ; 6 ; 10 ; 11 ; 15 ; 17 ; 23 ; 25 et 30.

Il revient avec deux fois plus de lait que d'huile et 3 fois plus de pétrole que de lait. Tous ses récipients sont complètement remplis, sauf un qui est vide. Lequel ?
Indiquer le contenu de chaque récipient.

(D'après *Oh les maths*, **P. YAKOV**)

Critères de divisibilité par 11

Activité 9

Soit n un entier naturel non nul.

1) a) Vérifier que 11 divise $10^2 - 1$.

b) Montrer que si 11 divise n – 1 alors 11 divise $10^2 n - 1$

c) En déduire que $10^4 - 1$, $10^6 - 1$, $10^8 - 1$ et $10^{10} - 1$ sont divisibles par 11.

2) a) Vérifier que 11 divise $10^3 + 1$.

b) Montrer que si 11 divise n + 1 alors 11 divise $10^2 n + 1$

c) En déduire que $10^5 + 1$, $10^7 + 1$ et $10^9 + 1$ sont divisibles par 11.

Activité 10

1) a) Vérifier que

$75429 =$

$7\times(10^4 - 1) + 5 \times (10^3 + 1) + 4 \times (10^2 - 1) + 2 \times (10^1 + 1) + 9 \times (10^0 - 1) + (9 - 2 + 4 - 5 + 7)$.

b) Recopier puis compléter

$2765 = 2 \times (10^{\cdots} + 1) + 7 \times (10^{\cdots} - 1) + 6 \times (10^1 + 1) + 5 \times (10^0 - 1) + (5 - 6 + 7 - 2)$.

$185042 = 1 \times (10^5 - 1) + \ldots + \ldots + \ldots + \ldots + 2 \times (10^0 - 1) + (2 - \ldots + 0 - \ldots + \ldots - 1)$.

2) a) Reproduire et compléter le tableau suivant :

n	d	n est divisible par 11	d est divisible par 11
2765	5 – 6 + 7 – 2 = 4	Faux	
473	3 – 7 + 4 = 0		
1738			Vrai
80916			
91827	7 – 2 + 8 – 1 + 9 = 21		
9081919			

b) Que remarque t-on ?

c) Déterminer parmi les entiers suivants ceux qui sont divisibles par 11

187 ; 463 ; 825 ; 2731 ; 26103 et 123454321.

Activité 11

Déterminer dans chacun des cas suivants la valeur du chiffre a pour que le nombre n soit divisible par 11.

n = 4a68 n = 8291a.

Activité 12

a) Reproduire et compléter le tableau suivant :

n	d	le reste de la division de n par 11	le reste de la division de d par 11
743	3 – 4 + 7 = 6	6	6
1728			
60918			
72819			
180726	6 – 2 + 7 – 0 + 8 – 1 = 18		

b) Que remarque t-on ?

c) Déterminer les restes de la division euclidienne par 11 des entiers 204 ; 833 ; 2731 ; 26103; 135822468.

Activité 13

1) a) Déterminer les multiples de 11 inférieurs à 100.

b) Pour chacun des entiers d suivants, déterminer le plus petit multiple m de 11, tel que d + m soit positif ou nul :

–5 ; –13 ; – 22 ; – 27 ; – 93.

2) a) Vérifier que

$8291 = 9 \times (10^3 + 1) + 2 \times (10^2 - 1) + 9 \times (10^1 + 1) + 1 \times (10^0 - 1) + (1 - 9 + 2 - 8)$.

Soit d = (1 – 9 + 2 – 8) = – 14.

Quel est le plus petit multiple m de 11, tel que d + m soit positif ou nul ?

b) Reproduire et compléter le tableau suivant :

n	Le reste de la division de n par 11	d	m	d + m
8291	8	1– 9 + 2 – 8 = – 14	22	
190				3
581				
5071		1 – 7 + 0 – 5 = – 11	11	
8370				
709180				

c) Que remarque t-on ?

3) Déterminer les restes de la division euclidienne par 11 des entiers 391 ; 2381 ; 9391 ; 30162; 657498324106.

Assimiler : 10-11

Divisibilité

1 Montrer que si un entier naturel divise 328 et divise 299, alors il divise 29.
En déduire que 328 et 299 sont premiers entre eux.

2 Décomposer 343 en produit de facteurs premiers et montrer que 118 et 225 sont premiers entre eux.

3 Soient a, b et n trois entiers naturels. Montrer que :
Si n divise 2 a + 3 b et n divise 3 a + 2 b, alors n divise 5 a et n divise 5 b.

4 Déterminer tous les entiers naturels n tels que n divise n + 15.

Critères de divisibilité par 2, 4, 5, 8 et 25

5 Les nombres suivants sont-ils divisibles par 2 ? par 4 ? par 5 ? par 8 ? par 25 ?

49 ; 316 ; 1050 ; 27960 ; 131675.

6 Déterminer le reste de la division euclidienne de chacun des nombres suivants respectivement par 2 ; 4 ; 5 ; 8 et 25 :

619 ; 1032 ; 69137 ; 234105

7 Montrer que $2^{721} + 2^{723}$ est divisible par 5.

Critères de divisibilité par 3 et par 9

8 Parmi les nombres suivants déterminer ceux qui sont divisibles par 3 et ceux qui sont divisibles par 9 :

315 ; 745 ; 2325 ; 11111 ; 100035 ; 2734106.

9 Déterminer le reste de la division euclidienne par 3 puis par 9 de chacun des nombres suivants : 86 ; 195 ; 206 ; 1359 ; 7695 ; 11111 ; 2851961.

Critères de divisibilité par 11

10 Pour chacun des entiers suivants vérifier s'il est divisible par 11 et déterminer son reste dans la division euclidienne par 11 : 96 ; 704 ;1111 ; 8190 ; 195674 ; 541145.

11 Montrer que tout entier naturel de la forme abcabc, où a, b et c sont des chiffres, est divisible par 11.
En est il de même pour les entiers naturels de la forme abceabce ?

Division euclidienne

◆ a et b désignent deux entiers naturels tels que b est différent de zéro.
On admet l'existence d'un couple unique (q, r) d'entiers naturels tels que :

$a = b\,q + r$ avec $0 \leq r < b$.

◆ Effectuer la division euclidienne de a par b, c'est trouver le couple (q, r) d'entiers naturels tels que : $a = b\,q + r$ avec $0 \leq r < b$.
a est le dividende, b est le diviseur, q est le quotient et r est le reste.

divisibilité par 2 et 5

◆ Un entier est divisible par 2 (respectivement par 5) si et seulement si son chiffre des unités est divisible par 2 (respectivement par 5).
Le reste de la division euclidienne d'un entier par 2 (respectivement par 5) est égal au reste de la division euclidienne de son chiffre des unités par 2 (respectivement par 5).

divisibilité par 4 et 25

◆ Un entier est divisible par 4 (respectivement par 25), si et seulement si le nombre formé par ses deux derniers chiffres est divisible par 4 (respectivement par 25).
Le reste de la division euclidienne d'un entier par 4 (respectivement par 25) est égal au reste de la division euclidienne par 4 (respectivement par 25) du nombre formé par ses deux derniers chiffres.

divisibilité par 3 et 9

◆ Un entier est divisible par 3 (respectivement par 9) si et seulement si la somme de ses chiffres est divisible par 3 (respectivement par 9).
Le reste de la division euclidienne d'un entier par 3 (respectivement par 9) est égal au reste de la division euclidienne de la somme de ses chiffres par 3 (respectivement par 9).

divisibilité par 8

◆ Un entier, supérieur ou égal à 100, est divisible par 8 si et seulement si le nombre formé par ses trois derniers chiffres est divisible par 8.
Le reste de la division euclidienne d'un entier par 8 est égal au reste de la division euclidienne par 8 du nombre formé par ses trois derniers chiffres.

divisibilité par 11

Soit n un entier naturel, on désigne par S_1 la somme de ses chiffres de rang impairs (de droite à gauche) et par S_2 la somme de ses chiffres de rang pairs. Soit $d = S_1 - S_2$.

1er cas : $d \geq 0$

◆ n est divisible par 11 si et seulement si d est divisible par 11.
Le reste de la division euclidienne de n par 11 est égal au reste de la division euclidienne de d par 11.

2ème cas : $d < 0$

Soit p le plus petit entier naturel tel que $d + 11p$ soit positif ou nul.

◆ n est divisible par 11 si et seulement si $d + 11p$ est divisible par 11.

◆ Le reste de la division euclidienne de n par 11 est $d + 11p$.

Développer ses compétences

1 On dispose de 8 boites contenant respectivement 7 ; 10 ; 13 ; 18 ; 28 ; 31 ; 46 et 62 boules. Chaque boite contient à la fois des boules rouges et des boules noires. On a enlevé une boite et on a alors constaté que le nombre total des boules rouges contenues dans les 7 boites restantes est le double du nombre de boules noires contenues dans ces 7 boites. Quelle est la boite enlevée ?

Indication
Le nombre total des boules contenues dans les 7 boîtes restantes est un multiple de 3.

2 Soient a et b deux entiers naturels tels que $a > b$
Montrer que $a^2 b^2 (a^2 - b^2)$ est divisible par 3 et par 4.

Indication
Faire un arbre de choix selon les restes de la division euclidienne de a et de b par 3.

3 Soit $x = 7n + 4$ et $y = 3n - 2$, où n est un entier naturel non nul, et soit d un diviseur commun à x et y.
a) Montrer que d divise 26.
b) Quelles sont les valeurs possibles de d ?

Indication
Exprimer 26 en fonction de x et y.

4 **Question d'âge**
Quel âge as-tu ? demande Ali à Mohamed.
Mohamed répond :
• L'an prochain, mon âge sera divisible par 2 ;
• Dans deux ans, mon âge sera divisible par 3 ;
• Dans 3 ans, mon âge sera divisible par 4 ;
• Dans 4 ans, mon âge sera divisible par 5.
Pourras-tu trouver mon âge ?

Indication
Si on désigne par a l'âge de Mohamed, déterminer les conditions que doit vérifier $a - 1$.

5 On découpe une feuille de papiers en 5 morceaux, puis l'un des morceaux est choisi et est découpé en 5 morceaux… et ainsi de suite.
Au bout de combien d'étapes obtient-on 61 morceaux ?

Indication
• Au bout de la première étape on obtient 5 morceaux.
• Au bout de la deuxième étape on obtient 4 + 5 morceaux.
• Au bout de la troisième étape on obtient 4 + 4 + 5 morceaux.

Conjecturer avec un tableur

Le but de l'exercice est de déterminer le chiffre des unités de l'entier 3^n, où n est un entier naturel.

a) Ouvrir une feuille sur le tableur Excel et remplir un tableau comme ci-dessous :

	A	B	C	D
1	n	3^n	Le chiffre des unités	
2	= 0	= 1	= MOD(B2 ; 10)	
3	= A2 + 1	= B2 * 3		
4				

Dans Excel, la formule = MOD (B2 ; 10) donne le reste de la division euclidienne de B2 par 10, qui est aussi le chiffre des unités de B2.

La colonne A affiche les valeurs prises par l'entier n : 0, 1, 2, 3, …

La colonne B affiche les puissances de 3.

Cliquer sur la cellule A3, une croix noire s'affiche au coin inférieur droit de cette cellule. Positionner le curseur sur cette croix et tirer vers le bas, jusqu'à atteindre la valeur désirée de n. Procéder de la même façon avec B3 et C2 .

b) Conjecturer

c) Quel est le chiffre des unités de chacun des nombres suivants: 3^{41}, 3^{175}, 3^{1000} et 3^{2006} ?

Appliquer

1 Déterminer le reste de la division euclidienne par 8 de chacun des entiers suivants : 104, 2613, 93765, 127645264.

2 Déterminer le reste de la division euclidienne par 25 de chacun des entiers suivants : 392, 1006, 1963, 6150, 2548175

3 Déterminer le chiffre x pour que le reste de la division euclidienne de l'entier 7x62 par 9 soit égal à 2.

4 Déterminer le chiffre u pour que l'entier 513u ait 4 comme reste de la division euclidienne par 11.

5 Déterminer le chiffre a pour que l'entier 73a2 soit divisible par 9.

6 Déterminer les chiffres a et b pour que l'entier 2a3b soit divisible par 4 et 3.

7 Déterminer les chiffres a et b pour que le nombre 513ab soit divisible par 3 et 5.

8 a) Déterminer les chiffres a et b pour que le nombre b421a soit divisible par 2 et 3.
b) Déterminer les chiffres a et b pour que le nombre a1215b soit divisible par 2 et 9.

9 Pour chacun des entiers suivants, vérifier s'il est divisible par 11 et déterminer son reste dans la division euclidienne par 11 :
175, 249, 517, 8291, 20042005, 1234321.

10 Trouver le chiffre x pour que l'entier 4x73 soit divisible par 11.

11 Trouver les chiffres x et y pour que l'entier 13x45y soit divisible par 8 et 9.

12 Trouver les chiffres x et y pour que l'entier 28xy5 soit divisible par 11 et 25.

13 Trouver les chiffres x et y pour que l'entier 9x23y soit divisible par 9 et 11.

Maîtriser

14 a) Quels sont les nombres dont la division euclidienne par 5 donne un reste égal au quotient ?
b) Quels sont les nombres dont le quotient de la division euclidienne par 4 est égal au triple du reste ?

15 On divise 2005 et 5002 par un même entier naturel non nul n, on obtient respectivement 10 et 32 pour restes. Trouver l'entier n.

16 Trouver tous les entiers naturels dont la division euclidienne par 29 donne un reste égal au carré du quotient.

17 Déterminer les entiers naturels a et b dont la différence est 709 et tels que le quotient et le reste de la division euclidienne de a par b sont respectivement 16 et 19.

18 Soit N = 12345679
A l'aide de votre calculatrice, calculer 9 N, 18 N, 27 N et 36 N.
Conjecturer et justifier votre conjecture.

19 Trouver les entiers naturels n tels que $\dfrac{n+25}{n+4}$ soit un entier.

20 Déterminer les valeurs de l'entier naturel p telles que $p - 1$ divise $p + 11$.

21 Le dividende d'une division euclidienne est inférieur à 5000. Le quotient de cette même division est égal à 93 et le reste à 51.
Déterminer les valeurs possibles du dividende et du diviseur.

22 On donne deux entiers naturels a et b tels que $a > b$. On effectue, d'une part, la division euclidienne de a par $a - b$ et d'autre part la division euclidienne de b par $a - b$.
Comparer les quotients respectifs et les restes respectifs de ces deux divisions.

23 La combinaison secrète d'un coffre comporte cinq chiffres différents.
Sachant que :
- Le premier chiffre est pair ;
- La somme des deux premiers chiffres est 15 ;
- Le troisième chiffre est la différence des deux premiers ;
- Le premier chiffre est le produit du troisième par le quatrième ;
- Le nombre est divisible par 9.

Sauriez- vous ouvrir le coffre ?

24 Soit n un entier naturel.
Montrer que l'entier $A = n(n^2 + 5)$ est divisible par 3.

25 Soit n un entier naturel.
Quels sont les restes possibles de la division euclidienne de n^2 par 3 ?
En déduire, sans calcul, que le nombre $59873120^2 - 1$ est divisible par 3.

26 Un musée organise des visites guidées à l'intention des élèves d'une même école.
On répartit les élèves en groupes, éventuellement inégaux, dont aucun ne comporte plus de vingt-quatre élèves ni moins de vingt.
a) L'école Farhat Hached comporte 158 élèves. Combien fera-t-on de groupes ?
Donner deux exemples de formation de ces groupes.
b) L'école Abou El kacem Chebbi comporte 212 élèves. Combien peut-on faire de groupes?
Donner, pour chacune des solutions possibles un exemple de formation des groupes.

27 1) Quel jour de la semaine serons nous après 123 jours ?
2) Quel jour de la semaine sera le 1er Janvier 2020 ?
3) Quel était le jour de la semaine de votre anniversaire en 1998 ?

28 Quel est le plus petit entier naturel qui donne pour reste 3 quand on le divise par 20, par 21 et par 35 ?

29 Quel est le plus petit entier naturel qui donne pour reste :
19 quand on le divise par 20
20 quand on le divise par 21
34 quand on le divise par 35 ?

30 Les dimensions d'une caisse parallélépipédique sont 120 cm, 200 cm et 180 cm. On veut réaliser des boites cubiques de même arête a (a un entier) qui permettent de remplir entièrement la caisse.
Quelle doit être l'arête a pour utiliser le minimum de boites ?

31 n étant un entier naturel de 4 chiffres tel que :
- n est divisible par 9
- les chiffres de l'entier n sont consécutifs et classés par ordre croissant de gauche à droite.

Trouver n.

Math et culture

Le code barre

La plupart des produits de commerce comportent un code barre : c'est un code universel dit code UPC (Universal Product Code), formé de 13 chiffres situés au-dessous d'une succession de barres parallèles lues à l'aide d'un appareil spécial. Dans ce code, les douze premiers chiffres désignent le pays, le fabriquant et le produit vendu, alors que le dernier représente la clé de contrôle.
Si on ajoute les sept chiffres de rang impair du code et le triple de la somme des chiffres de rang pair du code, le résultat doit être divisible par 10.
Ci-contre le code barre du livre de mathématique de deuxième année sciences.
Les douze premiers chiffres d'un code barre sont 619220260141. Déterminer la clé de contrôle de ce code.

Les nombres amiables

220 ♥ **284**

Deux entiers sont amiables si la somme des diviseurs propres de chacun est égale à l'autre.
Les entiers 220 et 284 sont amiables, en effet :

- Les diviseurs propres de 220 (autres que lui même) sont :
  1, 2, 4, 5, 10, 11, 20,22, 44, 55 et 110 dont la somme est 284.
- Les diviseurs de 284 autres que lui même sont :
  1, 2, 4, 71 et 142 dont la somme n'est autre que 220.

Le couple (220, 284) est cité par Pythagore et c'est le plus petit couple.
Les grecs ne connaissaient que ce couple de nombres amiables.
Les mathématiciens arabes vont en détecter d'autres : Al Farissi découvrit le couple (17296, 18416) et Al Yazdi découvrit le couple (9363584, 9437056).
Ces deux derniers couples sont connus respectivement comme couple de Fermat et Descartes, parce que ces derniers ils les ont rédécouvert plusieurs siècles après !
Dès le 9ème siècle le mathématicien arabe Thabit Ibn Qurra énonce le théorème fondamental sur les nombres amiables :
Si $p = 3 \times 2^{n-1} - 1$, $q = 3 \times 2^{n} - 1$ et $r = 9 \times 2^{2n-1} - 1$ sont tous trois premiers, alors les deux nombres $a = 2^{n}pq$ et $b = 2^{n}r$ sont amiables.
Les trois couples de nombres amiables, cités précédemment, sont obtenus pour $n = 2$, $n = 4$ et $n = 7$.

Thabit Ibn Qurra *(836 – 901 Baghdad)*
Mathématicien et astronome, il a apporté de nombreuses contributions dans tous les domaines mathématiques. Il est l'auteur d'un livre sur les nombres amiables.

Quand on commence à prendre ses virages en ligne droite, c'est que ça tourne pas rond dans le carré de l'hypothénuse.

Pour démarrer

1 Soient A, B et C trois points alignés.

Construire les points D et E tels que $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BA}$.
Montrer que [AD] et [EC] ont le même milieu.

2 Soit ABCD un quadrilatère.

Construire les points E et F tel que $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB}$ et $\overrightarrow{DF} = \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC}$
Montrer que AEFC est un parallélogramme.

3

Parmi les égalités suivantes, indiquer celles qui caractérisent le milieu I du segment [AB].

a) $\overrightarrow{IA} = \overrightarrow{IB}$.
b) $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$.
c) $AB = 2AI$.
d) $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AI}$.
e) $\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB} = \overrightarrow{AB}$.

4

Soit ABC un triangle, G son centre de gravité et I le milieu de [BC].
Parmi les énoncés suivants, indiquer ceux qui caractérisent le point G.

a) $G \in [AI]$ et $GA = 2GI$.
b) $GA = GB = GC$.
c) $\overrightarrow{GA} = -2\overrightarrow{GI}$.
d) $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AI}$.

Addition des vecteurs

Activité 1

Soit A un point du plan et soient $\vec{u}$ et deux vecteurs.

1) Combien existe-t-il de points M tels que $\overrightarrow{AM} = \vec{u}$?

2) a) Construire les points B et C tel que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$

b) Construire le point D tel que [BC] et [AD] aient le même milieu.

3) a) Montrer que $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$.

b) En déduire que $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$.

Définition

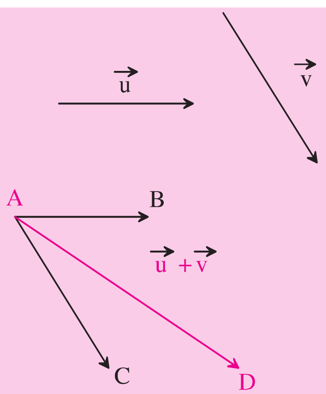
Soit A un point du plan et soient $\vec{u}$ et deux vecteurs.

On désigne par B et C les points tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$.

Soit D le point tel que [BC] et [AD] aient le même milieu.

On appelle vecteur somme de $\vec{u}$ et , le vecteur $\vec{w}$ tel que $\vec{w} = \overrightarrow{AD}$.

Le vecteur $\vec{w}$ est noté $\vec{u} + \vec{v}$.



Propriétés de l'addition des vecteurs

Activité 2

Soit A un point du plan et soient $\vec{u}$ et deux vecteurs.

Soient B et C les points tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$

1) Construire le point D tel que $\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AD}$

2) Montrer que $\vec{v} + \vec{u} = \vec{u} + \vec{v}$.

Activité 3

Soient A un point du plan et $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs.

Soient B, C et D les points tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ et $\vec{w} = \overrightarrow{AD}$.

1) Construire le point E tel que $\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AE}$.

2) Construire le point F tel que $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \overrightarrow{AF}$.

3) Montrer que $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BE}$ et $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{EF}$.

4) En déduire que $\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = \overrightarrow{AF}$.

Activité 4

Soient A un point du plan, $\vec{u}$ un vecteur et B le point tel que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$.

1) Montrer que $\vec{0} + \vec{u} = \vec{u}$.

2) a) Déterminer le point C tel que $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \vec{0}$.

b) En déduire qu'il existe un seul vecteur $\vec{v}$ tel que $\vec{u} + \vec{v} = \vec{0}$.

Définition

Soit $\vec{u}$ un vecteur du plan, l'unique vecteur $\vec{v}$ tel que $\vec{u} + \vec{v} = \vec{0}$, s'appelle l'opposé de $\vec{u}$.
Il est noté $-\vec{u}$. Ainsi on a $\vec{u} + (-\vec{u}) = (-\vec{u}) + \vec{u} = \vec{0}$.

Notation

La somme $\vec{u} + (-\vec{v})$ est noté $\vec{u} - \vec{v}$.

Remarque

Soient A et B deux points du plan. On a $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}$.
Ainsi l'opposé du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est le vecteur $\overrightarrow{BA}$, on écrit $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$.

Activité 5

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs.

1)Calculer la somme $(\vec{u} + \vec{v}) + [(-\vec{u}) - \vec{v}]$.

2) Quel est l'opposé du vecteur $\vec{u} + \vec{v}$?

Activité 6

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs du plan.

1) a) Déterminer le vecteur $-(-\vec{u})$.

b) Vérifier que l'opposé du vecteur $\vec{u} - \vec{v}$ est le vecteur $\vec{v} - \vec{u}$

2) Ecrire chacune des sommes suivantes sans parenthèses

a) $\vec{u} - (\vec{v} + \vec{w})$; b) $\vec{u} - (\vec{v} - \vec{w})$.

Multiplication d'un vecteur par un réel

Activité 7

Soient A un point du plan, $\vec{u}$ un vecteur non nul et B le point tel que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$. On munit la droite (AB) du repère (A, B).

1) Placer les points M, N et P d'abscisses respectives -2 , 3 et $\frac{1}{2}$.

2) a) Construire le point C tel que $\vec{u} + \vec{u} = \overrightarrow{AC}$

b) Quelle est l'abscisse du point C ?

c) En déduire l'abscisse du point D tel que $-\vec{u} - \vec{u} = \overrightarrow{AD}$.

Définition

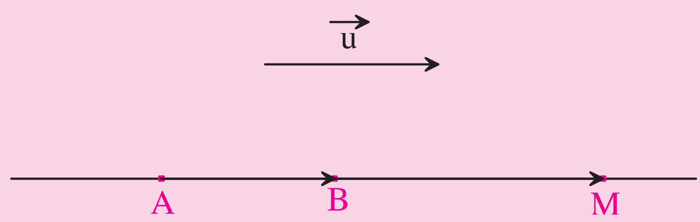
- Soient A un point du plan, $\vec{u}$ un vecteur non nul et B le point tel que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$.

Soit α un réel et M le point de (AB) d'abscisse α dans le repère (A, B).

On appelle vecteur produit de $\vec{u}$ par α , le vecteur $\vec{v}$ tel que $\vec{v} = \overrightarrow{AM}$.

Le vecteur $\vec{v}$ est noté $\alpha\,.\vec{u}$ ou $\alpha\vec{u}$.

- Le produit du vecteur nul par le réel α est le vecteur nul : $\alpha.\vec{0} = \vec{0}$.



Remarque

Pour tout vecteur $\vec{u}$, on a $1.\vec{u} = \vec{u}$.

Propriétés de la multiplication d'un vecteur par un réel

Activité 8

Soient A un point du plan, $\vec{u}$ un vecteur non nul et B le point tel que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$.

1) Placer le point C tel que $\overrightarrow{AC} = (-1)\vec{u}$.

2) Déterminer le milieu de [BC].

3) En déduire que $(-1)\vec{u} = -\vec{u}$.

Activité 9

Soient A un point du plan, $\vec{u}$ un vecteur non nul et B le point tel que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$.

1) Placer les points C, D et E tels que $\overrightarrow{AC} = 2\vec{u}$, $\overrightarrow{AD} = 3\vec{u}$ et $\overrightarrow{AE} = 5\vec{u}$.

2) Montrer que [AE] et [CD] ont le même milieu.

3) En déduire que $2\vec{u} + 3\vec{u} = 5\vec{u}$.

4) Soient α et β deux réels.

On désigne par M, N et P les points tels que $\overrightarrow{AM} = \alpha\,\vec{u}$, $\overrightarrow{AN} = \beta\,\vec{u}$ et $\overrightarrow{AP} = (\alpha + \beta)\,\vec{u}$.

a) Montrer que [MN] et [AP] ont le même milieu.

b) En déduire que $\alpha\,\vec{u} + \beta\,\vec{u} = (\alpha + \beta)\,\vec{u}$.

Activité 10

Soit $\vec{u}$ un vecteur. Ecrire plus simplement chacun des vecteurs suivants.

$2\vec{u} + 7\vec{u}$, $\frac{5}{4}\vec{u} + 3\vec{u}$, $\frac{2}{3}\vec{u} - 2\vec{u}$, $-8\vec{u} + 6\vec{u}$.

Assimiler : 1

Activité 11

Soient A un point du plan et $\vec{u}$ un vecteur non nul et B le point tel que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$.

1) Construire le point C tel que $\overrightarrow{AC} = 3\vec{u}$.

2) On considère le point D tel que $\overrightarrow{AD} = (-2)\overrightarrow{AC}$.

a) Construire D et déterminer graphiquement son abscisse dans le repère (A , B).

b) En déduire que $(-2)(3\vec{u}) = [(-2) \times 3]\vec{u}$.

Activité 12

Soit $\vec{u}$ un vecteur. Ecrire plus simplement chacun des vecteurs suivants.

$3(4\vec{u})$, $5(-2\vec{u})$, $\frac{3}{2}(6\vec{u})$, $\sqrt{6}(\sqrt{6}\,\vec{u})$, $4\left(\frac{1}{4}\vec{u}\right)$, $7(-\vec{u})$.

Assimiler : 2

Activité 13

Soient A un point du plan, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan.

Soient B, C et D les points tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$, $\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AD}$.

1) Construire les points B', C' et D' tels que $\overrightarrow{AB'} = 2\vec{u}$, $\overrightarrow{AC'} = 2\vec{v}$ et $\overrightarrow{AD'} = 2(\vec{u} + \vec{v})$.

2) En déduire que $2(\vec{u} + \vec{v}) = 2\vec{u} + 2\vec{v}$.

Activité 14

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs. Ecrire sans utiliser de parenthèses.

$\frac{3}{4}(\vec{u}+\vec{v})$; $-2(\vec{u}+\vec{v})$; $7(\vec{u}-\vec{v})$; $-\frac{2}{5}(\vec{u}-\vec{v})$

Activité 15

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs. Simplifier les écritures suivantes.

a) $3\vec{u}+2(5\vec{u})$; b) $9\left(-\frac{2}{3}\vec{u}\right)+6\vec{u}$; c) $\frac{1}{2}(\vec{u}+\vec{v})-\vec{u}$;

d) $3(\vec{u}+2\vec{v})-5\vec{v}$; e) $-\frac{3}{5}(\vec{u}+\vec{v})+\frac{2}{5}(\vec{u}-\vec{v})$; f) $3(\vec{u}-\vec{v})-(3\vec{u}-4\vec{v})$.

Assimiler : 3

Activité 16

Soient a un réel et $\vec{u}$ un vecteur.

1) Montrer que si $a.\vec{u}=\vec{0}$ et $a \neq 0$, alors $\vec{u}=\vec{0}$

2) Montrer que $(a.\vec{u}=\vec{0})$ équivaut à $(a=0$ ou $\vec{u}=\vec{0})$

Bases de l'ensemble des vecteurs du plan

Activité 17 Vecteurs colinéaires

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs et $\vec{a}$, $\vec{b}$ les vecteurs tels que

$\vec{a}=2(\vec{u}+\vec{v})-3\vec{v}$ et $\vec{b}=3(\vec{v}-4\vec{u})+6\vec{u}$

a) Simplifier l'écriture de chacun des vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$.

b) Exprimer $\vec{a}$ en fonction de $\vec{b}$.

Définition

Deux vecteurs sont dits colinéaires lorsque l'un est le produit de l'autre par un réel.

Activité 18

Soit A un point du plan et soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan.

Soient B et C les points tels que $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{AC}$.

Montrer que

(Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires) équivaut à (Les points A, B et C sont alignés).

Activité 19

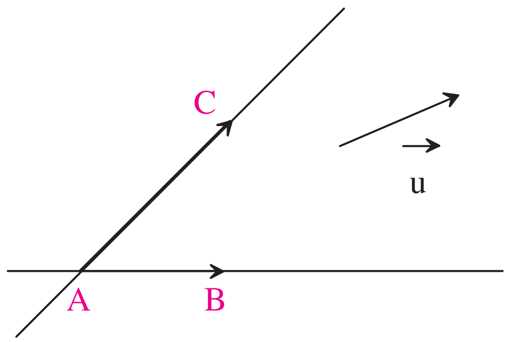
Soient $\vec{i}$ et $\vec{j}$ deux vecteurs non colinéaires.

Soit A un point du plan. On désigne par B et C les points tels que $\vec{i} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{j} = \overrightarrow{AC}$.

Soit $\vec{u}$ un vecteur du plan.

1) Placer le point M tel que $\overrightarrow{AM} = \vec{u}$.

2) Montrer qu'il existe un unique couple de réels (x ,y) tel que $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$.



Définition

- On appelle base de l'ensemble des vecteurs du plan, tout couple $(\vec{i}, \vec{j})$ de vecteurs non colinéaires.
- Soit $(\vec{i}, \vec{j})$ une base de l'ensemble des vecteurs du plan et $\vec{u}$ un vecteur.

Le couple (x , y) de réels tels que $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$ est appelé couple de composantes du vecteur $\vec{u}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$.

Notation

Si x et y sont les composantes d'un vecteur $\vec{u}$ dans la base B $= (\vec{i}, \vec{j})$, on note $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Activité 20

Soit B $= (\vec{i}, \vec{j})$ une base de l'ensemble des vecteurs du plan.

1) a) Déterminer les composantes du vecteur nul dans la base B.

b) Déterminer les composantes de chacun des vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ dans la base B.

2) Soit $u = x\vec{i} + y\vec{j}$ et $\vec{v} = x'\vec{i} + y'\vec{j}$.

Montrer que $(\vec{u} = \vec{v})$ équivaut à (x = x' et y = y').

Assimiler : 4

Activité 21

Soit $(\vec{i}, \vec{j})$ une base de l'ensemble des vecteurs du plan.

a) Soient $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$.

Déterminer les composantes des vecteurs $\vec{u} + \vec{v}$ et $\alpha\vec{u}$, où α est un réel.

b) On considère les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Déterminer les composantes du vecteur $\vec{w} = 2\vec{u} - 5\vec{v}$.

Assimiler : 5

Condition analytique de colinéarité de deux vecteurs

Activité 22

Soit $(\vec{i}\,,\ \vec{j})$ une base de l'ensemble des vecteurs du plan.

1) On considère les vecteurs $\vec{u} = -3\vec{i} + 6\vec{j}$ et $\vec{v} = \vec{i} - 2\vec{j}$.

Les vecteurs $\vec{u}$ et sont-ils colinéaires ?

Donner les composantes de chacun des deux vecteurs $\vec{u}$ et .

2) Dans chacun des cas suivants préciser si les vecteurs $\vec{u}$ et sont colinéaires ou non.

a) $\vec{u}\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; b) $\vec{u}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} -6 \\ -4 \end{pmatrix}$; c) $\vec{u}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Activité 23

Soit $(\vec{i}\,,\ \vec{j})$ une base de l'ensemble des vecteurs du plan.

1) Soient $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ dans cette base.

a) Montrer que si les vecteurs $\vec{u}$ et sont colinéaires, alors $xy' - x'y = 0$.

b) Montrer que si $xy' - x'y = 0$, alors les vecteurs $\vec{u}$ et sont colinéaires.

c) Conclure.

2) Les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 - \sqrt{5} \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} \sqrt{5} + 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ sont –ils colinéaires ?

Vocabulaire et notation

Le réel $xy' - x'y$ est appelé le déterminent des vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ dans la base $(\vec{i}\,,\ \vec{j})$

et on le note $\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix}$.

Assimiler : 6

Repère cartésien du plan

Activité 24

Soit O un point du plan et B = $(\vec{i}\,,\ \vec{j})$ une base de l'ensemble des vecteurs du plan.

On désigne par I et J les points tels que $\overrightarrow{OI} = \vec{i}$ et $\overrightarrow{OJ} = \vec{j}$.

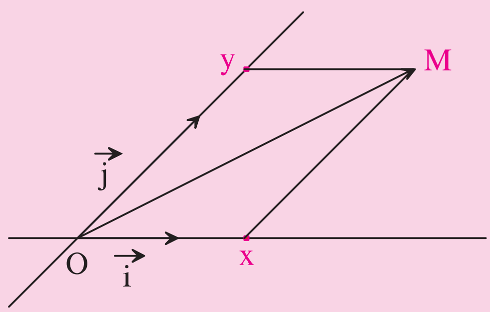
Soit M un point du plan. Justifier l'existence d'un unique couple de réels (x , y) tel que $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$.

Définition

Soit O un point du plan et B = $(\vec{i}\,,\ \vec{j})$ une base de l'ensemble des vecteurs du plan.

- $(O,\ \vec{i}\,,\ \vec{j})$ est appelé repère cartésien du plan.
- Soit M un point du plan.

Le couple de coordonnées du point M dans le repère cartésien $(O,\ \vec{i}\,,\ \vec{j})$ est l'unique couple (x , y) de réels tel que $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$.



Le réel x est l'abscisse du point M et le réel y est l'ordonnée du point M, dans le repère cartésien $(O,\ \vec{i}\,,\ \vec{j})$. On note M(x , y).

Vocabulaire

- Le point O est appelé l'origine du repère.
- $(O,\ \vec{i})$ est appelé l'axe des abscisses.
- $(O,\ \vec{j})$ est appelé l'axe des ordonnées.

Activité 25

Le plan est muni d'un repère cartésien $(O,\ \vec{i}\,,\ \vec{j})$.

1) Soient A et B deux points de coordonnées respectives $(x_A\ ,\ y_A)$ et $(x_B\ ,\ y_B)$.

a) Exprimer le vecteur $\overrightarrow{AB}$ en fonction des vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$.

b) Déterminer les composantes du vecteur $\overrightarrow{AB}$ dans la base $(\vec{i}\,,\ \vec{j})$.

2) Dans chacun des cas suivants déterminer les composantes du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

a) A(–1, 2) ; B(3 , 4) b) $A(2\,,\ \sqrt{3})$; $B\left(\frac{1}{2}\,,\ 0\right)$ c) A(–5 , 3) ; B(–2 , 3).

Assimiler : 7-8

Activité 26

Le plan est muni d'un repère cartésien $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Soit les points $A(5, 4)$; $B(-6, 1)$; $C(2, 2)$.

Calculer les coordonnées du point D pour que ABCD soit un parallélogramme.

Activité 27

Soit ABCD un trapèze tel que $\overrightarrow{DC} = 3\overrightarrow{AB}$. On désigne par I et J les milieux respectifs des côtés [AB] et [CD]. Soit O le point défini par $\overrightarrow{DO} = \frac{3}{2}\overrightarrow{DA}$.

On considère le repère $(D, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DA})$.

a) Déterminer les coordonnées des points D, C, A, B, O, J et I.

b) Montrer que les points O, B et C d'une part et les points O, I et J d'autre part, sont alignés.

Norme d'un vecteur - Vecteurs orthogonaux

Définition

Soient A un point du plan, $\vec{u}$ un vecteur et soit B le point tel que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$.

On appelle norme du vecteur $\vec{u}$ le réel noté $\|\vec{u}\|$ et qui est égal à AB.

Lorsque $\|\vec{u}\| = 1$, on dit que $\vec{u}$ est un vecteur unitaire ou normé.

Activité 28

1) Soit $\vec{u}$ un vecteur.

Montrer que $\|\vec{u}\| = 0$ équivaut à $\vec{u} = \vec{0}$.

2) Soit $\vec{u}$ un vecteur tel que $\|\vec{u}\| = 3$.

a) Calculer la norme de chacun des vecteurs $-\vec{u}$, $2\vec{u}$, $-3\vec{u}$.

b) Exprimer, en fonction du réel α, la norme du vecteur $\alpha\vec{u}$.

Activité 29

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs. Comparer $\|\vec{u}+\vec{v}\|$ et $\|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$

Assimiler : 9

Définition

Soit A un point du plan et soient $\vec{u}$ et deux vecteurs non nuls du plan.

Soient B et C les points tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$.

- On dit que les vecteurs $\vec{u}$ et sont orthogonaux si les droites (AB) et (AC) sont perpendiculaires.
- Par convention le vecteur nul est orthogonal à tout vecteur du plan.

Notation et vocabulaire

Si les vecteurs $\vec{u}$ et sont orthogonaux, on écrit $\vec{u} \perp \vec{v}$ et on lit le vecteur $\vec{u}$ est orthogonal au vecteur $\vec{v}$.

Activité 30

1) Soient $\vec{u}$ et deux vecteurs non nuls et de même norme.

Montrer que les vecteurs $\vec{u} + \vec{v}$ et $\vec{u} - \vec{v}$ sont orthogonaux.

2) Soient $\vec{u}$ et deux vecteurs orthogonaux et soient a et b deux réels.

Montrer que le vecteur $a\vec{u}$ est orthogonal au vecteur $b\vec{v}$.

Définition

- On dit qu'une base $B = (\vec{i}, \vec{j})$ est une base orthonormée, si les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont orthogonaux et sont normés.

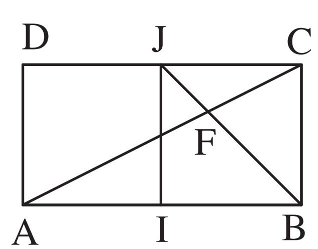
Ainsi ($B = (\vec{i}, \vec{j})$ est une base orthonormée) si et seulement si $\left(\vec{i} \perp \vec{j} \text{ et } \|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1\right)$.

- On dit que le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est un repère orthonormé du plan si la base $B = (\vec{i}, \vec{j})$ est une base orthonormée de l'ensemble des vecteurs du plan.

Activité 31

Dans la figure ci-contre, ABCD est un rectangle tel que AB = 2 AD, I et J sont les milieux respectifs de [AB] et [CD], F est le point d'intersection des segments [JB] et [AC].

On considère le repère $(A, \overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AD})$.



1) Déterminer les coordonnées des points A, B, C, D, I et J.

2) a) Calculer les coordonnées du point E défini par $\overrightarrow{DE} = \frac{2}{3}\overrightarrow{DI}$.

b) Montrer que les points A, E et C sont alignés.

Construire alors, le point E.

3) a) Montrer que $\overrightarrow{CF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CE}$.

b) Déterminer les coordonnées de F.

Activité 32 Distance de deux points - Expression de la norme d'un vecteur

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) a) Soit M(x , y) un point du plan et H son projeté orthogonal sur l'axe des abscisses.

Calculer $OH^2 + HM^2$ et en déduire la distance OM.

b) Soient $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ deux points du plan et N le point tel que $\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{AB}$.

Déterminer les coordonnées du point N en fonction de celles de A et B.

En déduire la distance AB.

2) Soit $\vec{u}$ un vecteur de composantes $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$.

Déterminer la norme du vecteur $\vec{u}$ en fonction de a et b.

Activité 33

Calculer dans chacun des cas la norme du vecteur $\vec{u}$.

a) $\vec{u}\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$; b) $\vec{u}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 \end{pmatrix}$; c) $\vec{u}\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

Assimiler : 10-11

Condition analytique d'orthogonalité de deux vecteurs

Activité 34

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Soient $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$.

1) Vérifier que si $\vec{u} = 0$ ou $\vec{v} = 0$ alors x x' + y y' = 0.

2) a) On désigne par A et B les points tels que $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{OB} = \vec{v}$.

Calculer OA, OB et AB.

b) Montrer que $(\vec{u} \perp \vec{v})$ équivaut à (x x' + y y' = 0).

Activité 35

Soit $B = (\vec{i}, \vec{j})$ une base orthonormée de l'ensemble des vecteurs du plan.

1) Vérifier dans chaque cas, si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux ou non.

$\vec{u}\begin{pmatrix}3\\-4\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}\frac{5}{6}\\\frac{5}{8}\end{pmatrix}$; b) $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\\sqrt{3}\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}8\\0\end{pmatrix}$; c) $\vec{u}\begin{pmatrix}4\\-2\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$.

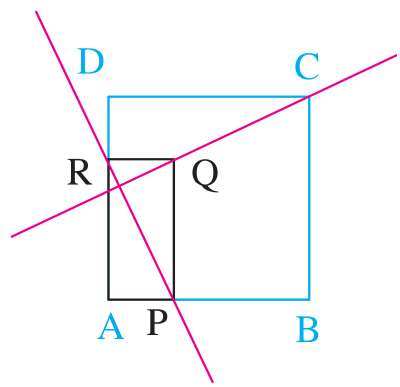
2) Déterminer le réel m pour que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient orthogonaux.

a) $\vec{u}\begin{pmatrix}m\\9\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-6\\m+1\end{pmatrix}$; b) $\vec{u}\begin{pmatrix}m+2\\m-2\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}m\\3\end{pmatrix}$.

Assimiler : 12

Activité 36

Dans la figure ci-contre, ABCD est un carré de côté 1, APQR est un rectangle tel que P et R sont sur les côtés [AB] et [AD] du carré et AP = DR.



On se propose de montrer que les droites (PR) et (CQ) sont perpendiculaires.

On choisit le repère $(A, \vec{AB}, \vec{AD})$ et on pose x = AP.

a) Déterminer les coordonnées des points A, B, C, D, P, Q et R.

b) Calculer les composantes des vecteurs $\vec{PR}$ et $\vec{CQ}$.

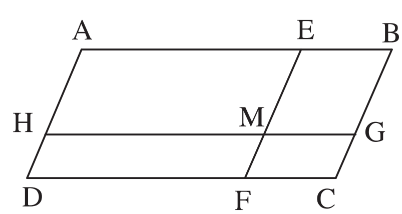
c) Montrer que les vecteurs $\vec{PR}$ et $\vec{CQ}$ sont orthogonaux. Conclure.

Vecteurs et configurations géométriques

Activité 37

Dans la figure ci-contre, ABCD est un parallélogramme, (EF) est parallèle à (AD) et (HG) est parallèle à (AB).

Montrer que $\vec{EG} + \vec{HF} = \vec{AC}$.



Assimiler : 13-14-15

Activité 38

Soit ABC un triangle.

a) Construire les points M et N tels que $\vec{AM} = \vec{AB} - 2\vec{AC}$ et $\vec{AN} = \vec{AC} - 2\vec{AB}$.

b) Exprimer $\overrightarrow{MN}$ en fonction de $\overrightarrow{BC}$.

c) Que peut-on en déduire pour les droites (MN) et (BC) ?

Activité 39

Soit OAB un triangle et I le milieu de [AB].

1) Montrer que pour tout point M du plan on a $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$.

2) Construire les points C et D tels que $\overrightarrow{OC} = -3\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OD} = 3\overrightarrow{OB}$.

3) Montrer que les droites (CD) et (OI) sont parallèles.

Remarque

Soit A, B, C et D quatre points alignés du plan.

On a les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ colinéaires, il existe donc, un réel α tel que $\overrightarrow{AB} = \alpha\overrightarrow{CD}$.

- Si $\alpha > 0$, on dit que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires et de même sens.
- Si $\alpha < 0$, on dit que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires et de sens contraires.

Assimiler : 16

Activité 40 Centre de gravité d'un triangle

Soit ABC un triangle, G son centre de gravité et I le milieu de [BC].

1) a) Exprimer $\overrightarrow{GA}$ en fonction de $\overrightarrow{GI}$

b) En déduire que $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

2) Soit M un point du plan tel que $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$.

Montrer que M est confondu avec G.

Activité 41

Soit OABC un quadrilatère.

Construire les points I, J et K tel que OABI, OBCJ et OCAK soient des parallélogrammes.

Montrer que O est le centre de gravité du triangle IJK.

Assimiler : 17

On pose $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB}$.

1) Soit P le point tel que $\overrightarrow{AP} = x\overrightarrow{AC}$.

Montrer que (MP) est parallèle à (BC). En déduire que $\overrightarrow{AN} = x\overrightarrow{AC}$.

2) On suppose, dans cette question, que M est le milieu de [AB].

Exprimer $\overrightarrow{AN}$ en fonction de $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{MN}$ en fonction de $\overrightarrow{BC}$.

Activité 43 Théorème de la projection

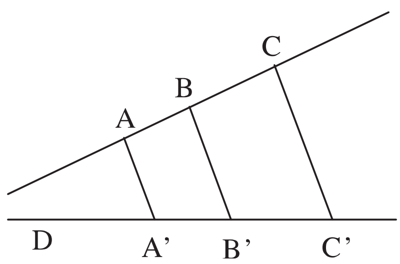
Dans la figure ci-contre, les droites (AA') , (BB') et (CC') sont parallèles.

La parallèle à D passant par A coupe (BB') en M et (CC') en N.

On pose $\overrightarrow{AB} = x\overrightarrow{AC}$.

Exprimer AM en fonction de AN puis montrer que

$\overrightarrow{A'B'} = x\overrightarrow{A'C'}$.



Activité 44

Soit ABCD un parallélogramme.

1) Placer le point E tel que $\overrightarrow{BE} = \frac{5}{4}\overrightarrow{BC}$.

2) Les droites (AE) et (DC) se coupent en F.

Exprimer $\overrightarrow{AE}$ en fonction de $\overrightarrow{AF}$ puis $\overrightarrow{DC}$ en fonction de $\overrightarrow{DF}$.

Activité 45

Soit ABC un triangle inscrit dans un cercle C de centre I.

1) Construire les points D, E tels que $\overrightarrow{ID} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}$ et $\overrightarrow{IE} = \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC}$.

2) Montrer que les quadrilatères IADB et IBEC sont des losanges.

3) a) Construire le point F défini par $\overrightarrow{IF} = \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID}$.

b) Montrer que (CF) est perpendiculaire à (AB).

c) Montrer que F est l'orthocentre du triangle ABC.

1 Soit $\vec{u}$ un vecteur. Simplifier les écritures suivantes.

$\frac{1}{2}\vec{u} + 5\vec{u}$; $-2\vec{u} + 4\vec{u}$; $(1-\sqrt{2})\vec{u} + \vec{u}$; $6\vec{u} - \frac{2}{5}\vec{u}$; $\vec{u} + \sqrt{3}\,\vec{u}$.

2 Soit $\vec{u}$ un vecteur non nul. Simplifier les écritures suivantes.

$\sqrt{5}\,(2\vec{u})$; $-4\left(\frac{3}{2}\vec{u}\right)$; $-7(-6\vec{u})$; $3\left(\frac{5}{6}\vec{u}\right)$.

3 Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs. Simplifier l'écriture de chacun des vecteurs a et b.

$\vec{a} = 2(\vec{u} - 3\vec{v}) - (5\vec{u} - 6\vec{v})$; $\vec{b} = 3\vec{u} + \vec{v} - \left[7\vec{u} - \frac{1}{2}(8\vec{u} + 2\vec{v})\right]$.

4 Soit $B = (\vec{i}\,,\ \vec{j})$ une base de l'ensemble des vecteurs du plan.
Donner les composantes des vecteurs suivants.

$2\vec{i} + 3\vec{j}$; $-\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j}$; $-4\vec{i}$; $\vec{i} - 3\sqrt{2}\,\vec{j}$; $-\frac{3}{5}\vec{j}$; $\frac{1}{2}\vec{j} + \vec{i}$.

5 Soit $B = (\vec{i}\,,\ \vec{j})$ une base de l'ensemble des vecteurs du plan.
On considère les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}\sqrt{3}\\0\end{pmatrix}$; $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$.
Déterminer les composantes des vecteurs suivants, dans la base B.

$2\vec{u}$; $-3\vec{v}$; $4\vec{w}$; $\vec{u} - 5\vec{v}$; $-\sqrt{3}\,\vec{u} + 2\vec{v}$; $5\vec{v} + \frac{3}{4}\vec{w}$; $2\vec{u} - 3\vec{v} + 4\vec{w}$.

6 Soit $B = (\vec{i}\,,\ \vec{j})$ une base de l'ensemble des vecteurs du plan.

1) Dans chacun des cas suivants, préciser, si les deux vecteurs sont colinéaires ou non.

a) $\vec{u}\begin{pmatrix}2\sqrt{3}\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}6\\3\sqrt{3}\end{pmatrix}$; b) $\vec{u}\begin{pmatrix}14\\-8\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$; c) $\vec{u}\begin{pmatrix}-9\\12\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}15\\-20\end{pmatrix}$.

2) Dans chacun des cas suivants, déterminer le réel m pour que les deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient colinéaires.

a) $\vec{u}\begin{pmatrix}m\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}5\\-3\end{pmatrix}$; b) $\vec{u}\begin{pmatrix}m\\m-1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}6\\1\end{pmatrix}$.

7 Le plan est muni d'un repère cartésien $(O\,,\ \vec{i}\,,\ \vec{j})$.
Dans chacun des cas suivants, déterminer les composantes des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ et préciser si les deux vecteurs sont colinéaires ou non.

a) A(1 , 2) ; B(-3 , 4) ; C(0 , 1) et D(2 , -2).

b) A(0 , -2) ; B($\sqrt{2}$, 4) ; C(, -5) et D(-1 , 0).

c) A(8 , -5) ; B(2 , -1) ; C(-19 , 8) et D(-1 , -4).

8 Le plan est muni d'un repère cartésien $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
Dans chacun des cas suivants, déterminer si les points A, B et C sont alignés ou non.
a) A(-4 , 2) ; B(-3 , 5) et C(-2 , 8).
b) A(0 , 1) ; B(-1 , 3) et C($\sqrt{2}$, 0).
c) $A\left(\frac{3}{4}, -2\right)$; B(2 , 0) et $C\left(1, -\frac{8}{5}\right)$.

9 Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs tels que $\|\vec{u}\| = 2$, $\|\vec{v}\| = 3$ et $\|\vec{u} + \vec{v}\| = 5$.
Montrer que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

10 Dans chacun des cas suivants, calculer la distance AB.
a) A(-2 , -4) ; B(3 , 5) ; b) $A\left(2, \frac{3}{4}\right)$; B(1 , 0) ; c) $A(-\sqrt{3}, 2)$; B(0 , 6).

11 Dans chacun des cas suivants, calculer la norme du vecteur $\vec{u}$.
a) $\vec{u}\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$; b) $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; c) $\vec{u}\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$; d) $\vec{u}\begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix}$.

12 Dans chacun des cas suivants, déterminer si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux ou non.
a) $\vec{u}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$; b) $\vec{u}\begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$; c) $\vec{u}\begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} -3 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

13 Soit ABC un triangle. Construire les points M, N et E tels que $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$;
$\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AB}$. Quelle est la nature du quadrilatère AMEN ?

14 Soient ABC un triangle, I le milieu de [AB] et M le point tel que
$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} = \vec{0}$. Montrer que M est le milieu de [IC].

15 Soit ABC un triangle, I, J et K les milieux respectifs de côtés [BC], [AC] et [AB].
a) Montrer que $\overrightarrow{AK} + \overrightarrow{BI} + \overrightarrow{CJ} = \vec{0}$.
b) Montrer que $\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{BJ} + \overrightarrow{CK} = \vec{0}$.

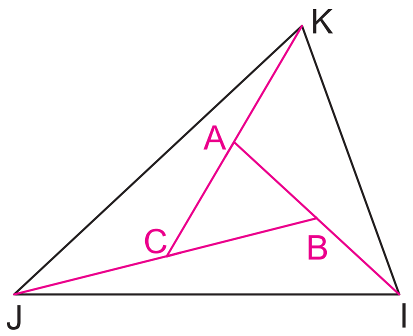
16 Soient O un point du plan, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs.

On pose $\overrightarrow{OA} = \vec{u} + \vec{v}$, $\overrightarrow{OB} = 2\vec{u} - \vec{v}$ et $\overrightarrow{OC} = 4\vec{u} - 5\vec{v}$.

Montrer que les points A, B et C sont alignés.

17 Dans la figure ci-contre, ABC est un triangle, I est le symétrique de A par rapport à B, J est le symétrique de B par rapport à C et K est le symétrique de C par rapport à A.

Montrer que les triangles ABC et IJK ont le même centre de gravité.



Addition des vecteurs

- Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$, on a :

  $\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}$

  $\vec{u}\,(\vec{v}+\vec{w})=(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}=\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}$

  $\vec{u}+\vec{0}=\vec{u}$.

- Pour tout vecteur $\vec{u}$, il existe un seul vecteur $\vec{x}$ tel que $\vec{u}+\vec{x}=\vec{0}$

Ce vecteur est appelé l'opposé de $\vec{u}$, il est noté $-\vec{u}$.

Multiplication d'un vecteur par un réel

- Pour tout vecteur $\vec{u}$ et pour tout réels a et b, on a :

  $1.\vec{u}=\vec{u}$

  $a.(b.\vec{u})=ab.\vec{u}$

  $a.\vec{u}+b.\vec{u}=(a+b).\vec{u}$.

- Pour tout réel a et pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on a :

  $a.(\vec{u}+\vec{v})=a.\vec{u}+a.\vec{v}$

- Pour tout vecteur $\vec{u}$ et pour tout réel α, on a :

  $\alpha\,\vec{u}=\vec{0}$ équivaut à $(\alpha=0$ ou $\vec{u}=\vec{0})$

Composantes d'un vecteur

- Soit $(\vec{i},\ \vec{j})$ une base de l'ensemble des vecteurs du plan.

  Soients $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ dans la base $(\vec{i},\ \vec{j})$. et soit α un réel.

On a $\vec{u}+\vec{v}\begin{pmatrix}x+x'\\y+y'\end{pmatrix}$; $\alpha.\vec{u}\begin{pmatrix}\alpha.x\\\alpha.y\end{pmatrix}$

- Soit $(O,\ \vec{i},\ \vec{j})$ un repère cartésien du plan.

Soient $A(x_A , y_A)$ et $B(x_B , y_B)$ deux points du plan. Les composantes du vecteur $\overrightarrow{AB}$, dans la base $(\vec{i} , \vec{j})$ sont $\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$.

Condition analytique de colinéarité de deux vecteurs

- Soient $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ dans une base $(\vec{i} , \vec{j})$ de l'ensemble des vecteurs du plan.

• Le déterminant des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le réel noté $\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = x y' - x' y$.

• Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires équivaut à $\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = 0$

équivaut à $x y' - x' y = 0$.

Vecteurs orthogonaux

- Soit A un point du plan et $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls du plan.

Soient B et C les points tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$.

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si les droites (AB) et (AC) sont perpendiculaires.

Par convention le vecteur nul est orthogonal à tout vecteur du plan.

Norme d'un vecteur

- Etant donné un vecteur $\vec{u}$ et un réel α , on a : $\| \alpha \vec{u} \| = | a | . \| \vec{u} \|$
- $\| \vec{u} \| = 0$ équivaut à $\vec{u} = \vec{0}$.
- Si $\| \vec{u} \| = 1$, on dit que le vecteur est unitaire ou normé.
- Soit $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ dans une base orthonormée $(\vec{i} , \vec{j})$.

  $\| \vec{u} \| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Condition analytique d'orthogonalité de deux vecteurs

♦ Soient $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ dans une base orthonormée $(\vec{i}\,,\ \vec{j})$ de l'ensemble des vecteurs du plan.

$\vec{u} \perp \vec{v}$ équivaut à $\quad x\,x' + y\,y' = 0.$

Distance de deux points

♦ Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O\,,\ \vec{i}\,,\ \vec{j})$.
Soient $A(x_A\ ,\, y_A)$, $B(x_B\ ,\, y_B)$ deux points du plan.

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

Vecteurs et configurations géométriques

♦ Soient A, B, C et D quatre points du plan.

Si $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$, alors $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$.

♦ Deux droites (AB) et (CD) sont parallèles si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

♦ Deux droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont orthogonaux.

♦ Un point M appartient à une droite (AB) si et seulement si, il existe un réel x tel que $\overrightarrow{AM} = x\,\overrightarrow{AB}$.

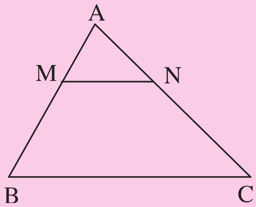
♦ Si I est le milieu de [AB], alors pour tout point M du plan $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$

♦ G est le centre de gravité du triangle ABC si et seulement si $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

♦ (Les points A, B et C sont alignés) équivaut à (Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires).

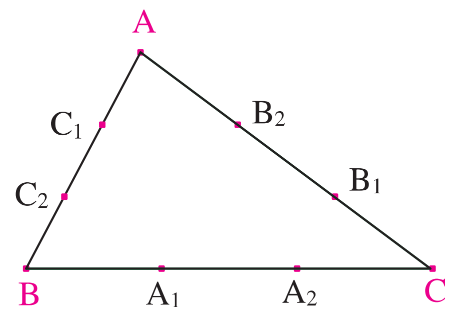
♦ Forme vectorielle du théorème de Thalès

Soit ABC un triangle et M un point de (AB), distinct de A.
La parallèle à (BC) passant par M coupe (AC) en N.
Si $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB}$ alors $\overrightarrow{AN} = x\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{MN} = x\overrightarrow{BC}$.



1 ***Problème de concours***

Dans la figure ci-contre, les points A_1, A_2, B_1, B_2, C_1 et C_2 partagent, en trois segments isométriques, chacun des côtés du triangle ABC.
Montrer que les droites (A_1B_2), (B_1C_2) et (C_1A_2) se coupent en G centre de gravité du triangle ABC.



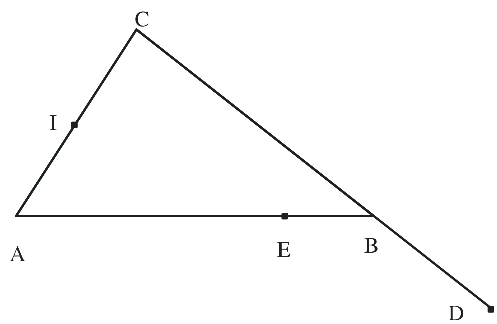
Stratégie de résolution

- Montrer, tout d'abord que
(A_1B_2) // (AB), (B_1C_2) // (BC) et (C_1A_2) // (AC).

- On pourra soit calculer $\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{CG}$, soit exprimer $\overrightarrow{AG}$ en fonction de $\overrightarrow{AI}$, où I est le milieu de [BC].

2 ***Problème d'alignement***

Dans la figure ci-contre, ABC est un triangle, I est le milieu du segment [AC], D et E sont les points tels que $3\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{EA} + 3\overrightarrow{EB} = \vec{0}$.
Montrer que les points I, D et E sont alignés.



Stratégie de résolution

1) Première méthode

- Etablir une relation vectorielle faisant intervenir, seulement, les points I, D et E.

2) Deuxième méthode

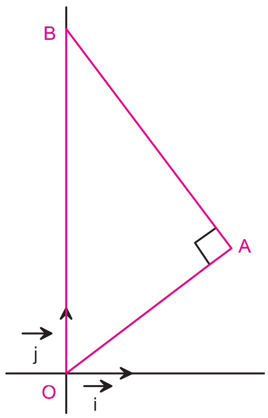
- On pourra considérer le repère cartésien $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$.

3 Le plan est rapporté à un repère orthonormé $\left(O, \vec{I}, \vec{J}\right)$.
Dans la figure ci-contre, OAB est un triangle rectangle en A et tel que OA = 3 et AB = 4.
Déterminer les coordonnées du point A.

Stratégie de résolution

_ Déterminer les coordonnées de B.

_ Exprimer les composantes des vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{AB}$ en fonction des coordonnées (x , y) du point A.

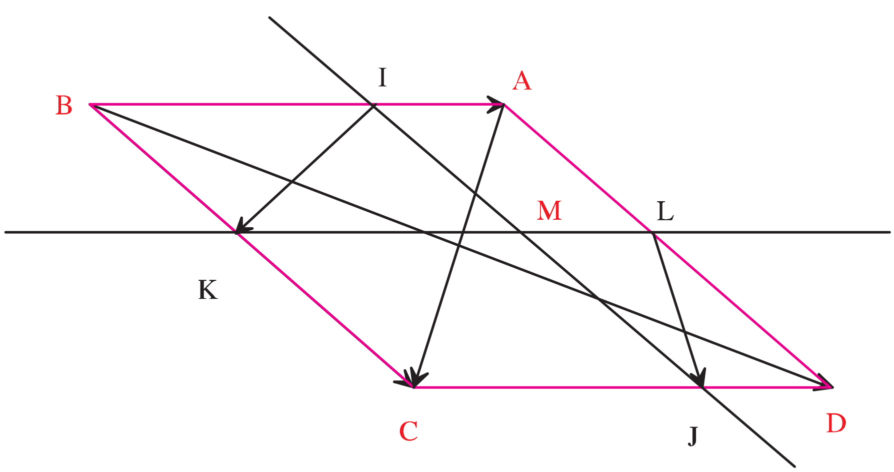


1) A l'aide d'un logiciel de géométrie.

- Construire deux vecteurs $\overrightarrow{BA}$ ET $\overrightarrow{BC}$ (**vecteur**).
- Construire le point D tel que $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BD}$ (**somme de deux vecteurs**).
- Tracer le parallélogramme ABCD.
- Marquer un point M à l'intérieur du parallélogramme.
- Construire la droite passant par M et parallèle à (AD). Nommer respectivement I et J les points d'intersection de cette droite avec les droites (AB) et (CD).
- Construire la droite passant par M et parallèle à (AB). Nommer respectivement K et L les points d'intersection de cette droite avec les droites (BC) et (AD).
- Construire les vecteurs $\overrightarrow{IK}$ et $\overrightarrow{LJ}$, puis leur somme $\overrightarrow{IK} + \overrightarrow{LJ}$ en prenant le point A comme origine.
- Déplacer le point M à l'intérieur du parallélogramme ABCD et observer ce qui se passe pour les vecteurs $\overrightarrow{IK}, \overrightarrow{LJ}$ et $\overrightarrow{IK} + \overrightarrow{LJ}$.

Quelle conjecture peut-on émettre ?

2) Montrer que quelle que soit la position du point M à l'intérieur du parallélogramme, le vecteur $\overrightarrow{\mathbf{IK}} + \overrightarrow{\mathbf{LJ}} = \overrightarrow{AC}$.



Appliquer

1 Soient $\vec{a} = \vec{a} - 2\vec{v}$ et $\vec{b} = \frac{4}{5}\vec{u} + \vec{v}$.

Exprimer en fonction de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ chacun des vecteurs $\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{a} - \vec{b}$ et $2\vec{a} + 5\vec{b}$.

2 Trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont tels que

$$\begin{cases} 2\vec{u} + \vec{v} - \vec{w} = \vec{0} \\ \vec{u} - \vec{v} + 3\vec{w} = \vec{0} \end{cases}$$

Montrer que $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont deux à deux colinéaires.

3 Soient A et B deux points.
Soient M et N les points tels que

$\overrightarrow{AM} = \frac{5}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AN} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$

Montrer que [AB] et [MN] ont le même milieu.

4 Soit ABC un triangle et E le point défini par $3\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{EB} = \vec{0}$

a) Montrer que $\overrightarrow{EA} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$, puis construire E.

b) Construire F tel que $\overrightarrow{EF} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$

c) Montrer que A, C, et F sont alignés.

5 Quatre points A, B, C et D sont tels que

$5\overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}$

Montrer que B, C et D sont alignés.

6 Soit ABC un triangle.

1) Placer les points E et F tels que

$\overrightarrow{AE} = 3\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC}$.

2) Montrer que (BC) et (EF) sont parallèles.

7 Soient ABCD un quadrilatère, I le milieu de [AD] et J celui de [BC].

Montrer que $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} = 2\overrightarrow{IJ}$.

8 Soit $B = (\vec{i}, \vec{j})$ une base de l'ensemble des vecteurs du plan.

Dans chacun des cas ci-dessous, déterminer, quand cela est possible, un réel m pour que les deux vecteurs et soient colinéaires.

a) $\vec{u}\begin{pmatrix} 2m \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 6 \\ 10 \end{pmatrix}$.

b) $\vec{u}\begin{pmatrix} m+1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix}$.

c) $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ m+2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} m-2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

9 Le plan est muni d'un repère cartésien $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On considère les points $A\left(-2, \frac{3}{4}\right)$; B(0 , -1) et C(3, 4).

Déterminer les coordonnées du point D tel que ABCD soit un parallélogramme.

10 Le plan est muni d'un repère cartésien $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Dans chacun des cas ci-dessous, déterminer un réel a, pour que les points A, B et C soient alignés.

a) A(–4 , 2) ; B(–3 , 5) et C(0 , a).

b) A(2a + 1 , 1) ; B(1 , 6) et C(–1, 2).

Maîtriser

11 Soit ABCD un parallélogramme.

1) Placer les points E et F tels que

$\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{CF} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CA}$

2) Montrer que (DE) et (BF) sont parallèles.

Déterminer le sens de variations de h.

12 Soit ABC un triangle.

a) Construire les points M, N et I définis

par : $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$;

$\overrightarrow{AN} = 2\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{NI} = 3\overrightarrow{AC}$.

b) Quelle est la nature du quadrilatère AMIN?

13 Soient ABCD un parallélogramme et M un point du plan qui n'appartient ni à (AC) ni à (AD).

Montrer que les triangles ACM et BDM ont le même centre de gravité.

14 Soient ABC un triangle et α un réel. Soient I, J et K les points tels que :

$\overrightarrow{AI} = \alpha\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BJ} = \alpha\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CK} = \alpha\overrightarrow{CA}$.

Montrer que les triangles ABC et IJK ont le même centre de gravité.

15 Soit ABC un triangle, à tout réel x on associe les points M et N tels que

$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + x\overrightarrow{AC}$

et $\overrightarrow{AN} = x\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

1) Faire une figure lorsque $x = -1$.

2) Montrer que pour tout réel x, les vecteurs MN et BC sont colinéaires

3) Déterminer la valeur de x pour laquelle

a) M = N.

b) BCMN est un parallélogramme.

16 Soit ABC un triangle inscrit dans un cercle de centre O. On désigne par I et J les milieux respectifs de [AB] et [AC].

1) Soit H le point tel que

$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$.

a) Montrer que $\overrightarrow{CH} = 2\overrightarrow{OI}$ et que

$\overrightarrow{BH} = 2\overrightarrow{OJ}$.

b) Montrer alors que H est l'orthocentre du triangle ABC.

2) Soit G le centre de gravité du triangle ABC.

a) Montrer que $3\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$.

b) Déduire que O, G et H sont alignés.

17 Soient ABC un triangle, I le milieu de [AB] et J celui de [AC].

Déterminer l'ensemble des points M du plan dans chacun des cas suivants :

a) $\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\| = \|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC}\|$.

b) $\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC}\| = BC$

18 Soit ABC un triangle. On considère les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ définis par $2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$

et $v = -\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC}$

Montrer que (u , v) est une base de l'ensemble des vecteurs du plan.

Les poètes chantent la beauté mathématique

Nombre d'écrivains ont écrit sur les mathématiques, de la loi sur la gravitation d'Edgar Poe au calcul des probabilités chez Dostoïevski. Certains se sont servis d'outils mathématiques pour étayer des résolutions d'énigmes comme Conan Doyle ou Ellery Queen, se fixer des contraintes poétiques comme Raymond Queneau (Cent mille milliards de poèmes) ou même faire reposer entièrement la composition d'un livre dessus, comme Georges Perec qui utilise un carré gréco latin d'ordre 10 pour construire sa Vie mode d'emploi (Prix Médicis 1978).

D'autres enfin ont véritablement chanté, de diverses façons, la gloire des mathématiques.

Eugène Guillevic (1907-1997) dans ses Euclidiennes (Gallimard, 1967) joue avec un langage poétique lié aux nombres, à la forme ou à l'humain, à tel point que l'on a pu parler à propos du poète de géométrie obsessionnelle tel ce monologue de triangle

Je suis ce qu'il y a
De plus élémentaire
Et malgré ce côté
De hasard qui m'affecte,
De plus indispensable
À l'organisation.

Ou encore ce parallélogramme qui révèle l'anxiété latente du poète

On pourrait m'aplatir,
Aussi me redresser.
Je n'ai pas d'idées fixes.
Que de viennent aigus
Mes deux angles obtus
Je ne tremblerai pas
Mais s' il faut me passer,
Un instant de raison,
En forme de rectangle,
Alors, j'ai peur,
Car un rectangle c'est autre chose...

D'après le magazine « Tangente n° 92 »

chapitre 6

BARYCENTRE

Ce n'est pas assez d'avoir l'esprit bon, mais le principal est de l'appliquer bien.

DESCARTES

Pour démarrer

1 Sur une droite munie d'un repère $\left(A, \overrightarrow{AB}\right)$, on donne les points A, B, C, D et E dans la disposition suivante

Dans chacun des cas suivants, trouver deux réels α et β vérifiant la relation vectorielle donnée.

a) $\alpha\overrightarrow{BA} + \beta\overrightarrow{BC} = \vec{0}$

b) $\alpha\overrightarrow{AD} + \beta\overrightarrow{AB} = \vec{0}$

c) $\alpha\overrightarrow{BC} + \beta\overrightarrow{BA} = \vec{0}$

d) $\alpha\overrightarrow{CB} + \beta\overrightarrow{CE} = \vec{0}$

2 Un élève a obtenu 13 dans le devoir de contrôle de Maths et 10 dans le devoir de synthèse.

1) Sachant que le coefficient du devoir de contrôle est 1 et que celui du devoir de synthèse est 2, calculer la moyenne trimestrielle en Maths de cet élève.

2) Sur une droite D munie d'un repère $\left(O, \vec{I}\right)$, placer les points A, B et G d'abscisses respec tives la note du devoir de contrôle, la note du devoir de synthèse et la moyenne trimestrielle. Vérifier que $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB}\right)$.

3 Soit ABC un triangle et soient I le milieu du segment [BC] et J le milieu du segment [AI].

a) Montrer que $2\overrightarrow{JA} + \overrightarrow{JB} + \overrightarrow{JC} = \vec{0}$.

b) Montrer que pour tout point M du plan on a $2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 4\overrightarrow{MJ}$.

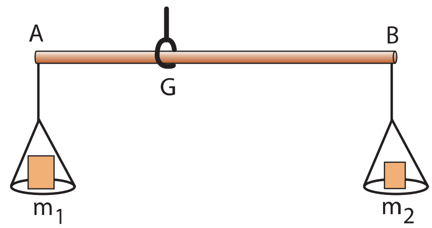
4 Soit ABC un triangle.

a) Construire le point I tel que $\overrightarrow{IB} + 3\overrightarrow{IC} = \vec{0}$.

b) Construire le point J tel que $4\overrightarrow{JA} + \overrightarrow{JB} + 3\overrightarrow{JC} = \vec{0}$.

Barycentre de deux points

Activité 1



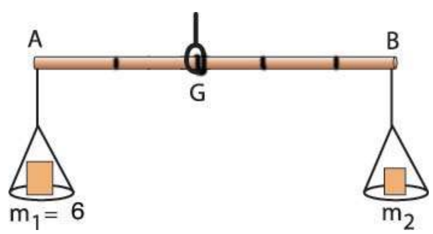
Une tige AB rigide et homogène est suspendue en un point G par un anneau, dans lequel elle peut coulisser. Aux extrémités A et B de cette tige on a accroché deux masses m_1 et m_2.
En physique et d'après le principe d'Archimède le système S est en équilibre (la tige est horizontale) lorsque m_1 GA = m_2 GB. On dit que le point G est le point d'équilibre des points A et B affectés respectivement des masses m_1 et m_2.
Dans toute la suite, le système S est en équilibre et les masses sont exprimées en Kg.
1) On prend $m_1 = 1$ et $m_2 = 2$

Préciser la position du point G sur le segment [AB] et justifier l'égalité $\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GB} = \vec{0}$.

2) Dans chacun des cas ci-dessous, placer le point G puis traduire l'équilibre du système S par une relation vectorielle.

a) $m_1 = 3$ et $m_2 = 1$; b) $m_1 = 10$ et $m_2 = 20$; c) $m_1 = m_2 = 5$

3) Déterminer m_2 pour le système S suivant



Activité 2

Soient A et B deux points distincts du plan et α et β deux réels tels que $\alpha + \beta \neq 0$.

On désigne par G le point défini par $\overrightarrow{AG} = \dfrac{\beta}{\alpha + \beta}\overrightarrow{AB}$.

a) Montrer que $\alpha\,\overrightarrow{GA} + \beta\,\overrightarrow{GB} = \vec{0}$

b) Soit G' un point du plan tel que $\alpha\,\overrightarrow{G'A} + \beta\,\overrightarrow{G'B} = \vec{0}$. Montrer que G' = G.

c) Conclure.

Définition

Soient A et B deux points distincts du plan et soient α et β deux réels tels que $\alpha + \beta \neq 0$.

Le point G qui vérifie la relation $\alpha\,\overrightarrow{GA} + \beta\,\overrightarrow{GB} = \vec{0}$ est appelé le barycentre des points pondérés (A, α) et (B, β).
On dit aussi que G est le barycentre des points A et B affectés des coefficients α et β.

Remarques

• Le barycentre G des points pondérés (A , α) et (B , β) est le point défini par l'une des relations suivantes $\alpha\,\overrightarrow{GA} + \beta\,\overrightarrow{GB} = 0$; $\overrightarrow{AG} = \dfrac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{BG} = \dfrac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{BA}$.

• Le barycentre G des points pondérés (A,α) et (B,β) appartient à la droite (AB).

Activité 3

Soient A et B deux points distincts.

1) Construire
   a) le point M barycentre de (A , 2) et (B , 1).
   b) le point N barycentre de (A , 3) et (B , –1).
   c) le point P barycentre de (A , –1) et (B , 2).
2) Soient α et β deux réels tels que $\alpha + \beta \neq 0$ et soit G le barycentre de (A, α) et (B, β).
   Montrer que (G $\in$ [AB]) si et seulement si (α et β sont de même signe).

Activité 4

Soit ABC un triangle.

On considère les points M et N tels $\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} = \vec{0}$ et $\overrightarrow{NA} + 3\overrightarrow{NC} = \vec{0}$. .

a) Faire une figure.

b) Montrer que les droites (MN) et (BC) sont parallèles.

Activité 5

1) Soient A, B et C trois points du plan.

Montrer que le vecteur $\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC}$ ne dépend pas du point M.

2) Dans cette question on suppose que les points A, B et C ne sont pas alignés.

On désigne par A' le barycentre de (B , 2) et (C , –3) ;
B' le barycentre de (A , 1) et (C , –3) ;
C' le barycentre de (A , 1) et (B , 2).

Déduire de la première question que les droites (AA'), (BB') et (CC') sont parallèles.

Activité 6 Construction du barycentre : Méthode des parallèles

Soient (A , 3) et (B , 4) deux points pondérés et soit G leur barycentre.

On considère une droite D_A passant par A et ne contenant pas B.

Soit D_B la droite passant par B et parallèle à D_A.

Soit $(A, \vec{i})$ un repère de D_A et soit $(B, \vec{i})$ un repère de D_B.

a) Faire une figure.

b) Construire les points A' et B' tels que $\overrightarrow{AA'} = 4\vec{i}$ et $\overrightarrow{BB'} = -3\vec{i}$.
c) Montrer que G est aussi le barycentre des points (A', 3) et (B', 4).
d) Construire alors G.

Assimiler : 1-2

Activité 7

Soient α et β deux réels tels que $\alpha + \beta \neq 0$ et soit G le barycentre de (A , α) et (B , β).
Montrer que, pour tout réel non nul k, G est le barycentre de $(A , k\alpha)$ et $(B , k\beta)$.

Activité 8

1) Soit G le barycentre de (A , 2) et (B , 1) et G' le barycentre de (C , 5) et (D , –2)

a) Montrer que pour tout point M du plan on a
$2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 3\overrightarrow{MG}$ et $5\overrightarrow{MC} - 2\overrightarrow{MD} = 3\overrightarrow{MG'}$

b) Soit I le milieu de [GG'].
Montrer que pour tout point M du plan on a $2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 5\overrightarrow{MC} - 2\overrightarrow{MD} = 6\overrightarrow{MI}$.

2) Soient α et β deux réels tels que $\alpha + \beta \neq 0$ et soit G le barycentre de (A , α) et (B , β).
Montrer que pour tout point M du plan on a $\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} = (\alpha + \beta)\overrightarrow{MG}$.

Activité 9 Construction du barycentre : Méthode du parallélogramme

Soit G le barycentre des points pondérés (A , 2) et (B , 3), et soit M un point du plan n'appartenant pas à (AB).

1) a) Construire le point A' tel que $\overrightarrow{MA'} = 2\overrightarrow{MA}$.

b) Construire le point B' tel que $\overrightarrow{MB'} = 3\overrightarrow{MB}$.

2) Soit M' le point tel que MA'M'B' soit un parallélogramme.
Montrer que $G \in (MM')$.
Construire alors G.

Activité 10

Soient A, B, C et D quatre points distincts du plan.
Soit I le barycentre de (A , 1) et (B , 2) et soit J le barycentre de (C , 1) et (D , –2).
1) Construire les points I et J.
2) On considère le point K tel que $3\overrightarrow{KA} + 6\overrightarrow{KB} - \overrightarrow{KC} + 2\overrightarrow{KD} = \vec{0}$.
Montrer que les points I, J et K sont alignés.

Activité 11 Recherche d'un ensemble de points

Soit ABCD un rectangle tel que AB = 6 et BC = 2.
1) a) Construire le point G barycentre de (A , 2) et (B , 1).

b) Construire le point G' barycentre de (C , 5) et (D , –2).

2) a) Déterminer et construire l'ensemble des points M tels que

$\|2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\| = \|5\overrightarrow{MC} - 2\overrightarrow{MD}\|$

b) Déterminer et construire l'ensemble des points M tels que $\|5\overrightarrow{MC} - 2\overrightarrow{MD}\| = 9$.

Assimiler : 3

Barycentre de 3 points

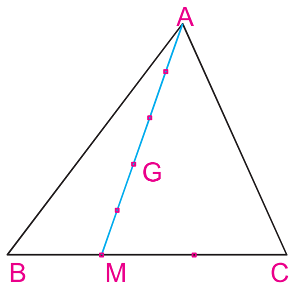
Activité 12

Les moyennes trimestrielles d'un élève sont : au 1er trimestre 12,75 (coefficient 1) ; au 2ème trimestre 12,25 (coefficient 2) et au 3ème trimestre 11,50 (coefficient 2).

1) Quelle est sa moyenne annuelle m ?

2) A, B, C et G désignent les points d'une droite graduée $(O, \vec{i})$ d'abscisses respectives 12,75 ; 12,25 ; 11,50 et m. Vérifier que $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{5}(\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB} + 2\overrightarrow{OC})$.

Activité 13



1) Observer la figure ci-contre et

a) Déterminer deux réels b et c de sorte que M soit le barycentre des points (B , b) et (C , c).

b) Déterminer deux réels m et a de sorte que G soit le barycentre des points (M , m) et (A , a).

2) Montrer que $2\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

Activité 14

Soient A, B et C trois points du plan et α, β, γ trois réels tels que $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$

Soit G le point du plan défini par $\overrightarrow{AG} = \frac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{AB} + \frac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{AC}$

a) Montrer que $\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} + \gamma\overrightarrow{GC} = \vec{0}$

b) Soit G' un point du plan tel que $\alpha\overrightarrow{G'A} + \beta\overrightarrow{G'B} + \gamma\overrightarrow{G'C} = \vec{0}$.

Définition

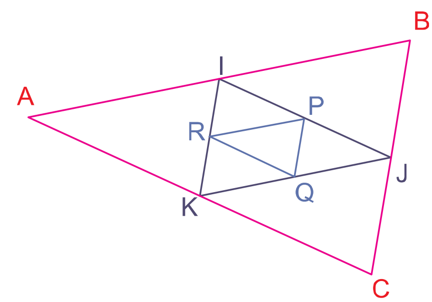
Soient A, B et C trois points du plan et α, β, γ trois réels tels que $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$.

Le point G du plan qui vérifie $\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} + \gamma\overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}$ est appelé le barycentre des points pondérés (A , α), (B , β) et (C , γ).
On dit aussi que G est le barycentre des points A, B et C affectés respectivement des coefficients α, β et γ.
Si $\alpha = \beta = \gamma$, G est appelé l'isobarycentre des points A , B et C.

Activité 15

Soit G le barycentre des points pondérés (A , α), (B , β) et (C , γ),
Montrer que pour tout point M du plan on a $\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} + \gamma\overrightarrow{MC} = (\alpha + \beta + \gamma)\overrightarrow{MG}$

Activité 16



Soit ABC un triangle.
On désigne par I, J et K les milieux respectifs des côtés [AB], [BC] et [AC].
a) Montrer que pour tout point M du plan on a

$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{MJ} + \overrightarrow{MK}$.

b) En déduire que les triangles ABC et IJK ont le même centre de gravité.
c) Soient P, Q et R les milieux respectifs des côtés [IJ], [JK] et [KI].
Montrer que les triangles ABC et PQR ont le même centre de gravité.

Activité 17

1)Soient ABC et A'B'C' deux triangles de centres de gravités respectifs G et G' .
Montrer que $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = 3\overrightarrow{GG'}$.
En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que deux triangles aient même centre de gravité.
2) Soit ABC un triangle et soient A', B', C' les points tels que :
$\overrightarrow{BA'} = k\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CB'} = k\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{AC'} = k\overrightarrow{AB}$; où k et un réel.
Les triangles ABC et A'B'C' ont-ils le même centre de gravité ?

Activité 18

Les données étant celles de l'activité 12.
a) Pour calculer sa moyenne annuelle, l'élève a calculé, tout d'abord, la moyenne m_1 des deux premières moyennes trimestrielles (affectées respectivement des coefficients 1 et 2).
Comment peut-il calculer sa moyenne annuelle à partir de m_1 et de la moyenne du 3ème trimestre ?

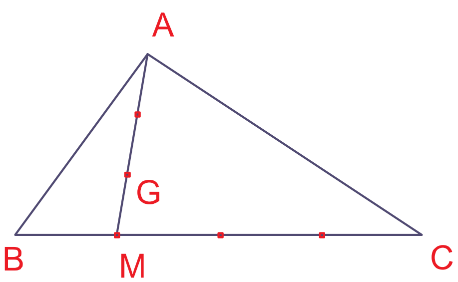
b) Calculer la moyenne m_2 des moyennes du $2^{ème}$ et du $3^{ème}$ trimestre et dire comment peut-il obtenir sa moyenne annuelle m à partir de m_2 et de la moyenne du 1^{er} trimestre ?

Activité 19 Barycentre partiel

1) Soit G le barycentre de (A , 2), (B , 1) et (C , –1), et soit I le barycentre de (A , 2) et (B , 1).
   a) Montrer que G est le barycentre de (I , 3) et (C , –1).
   b) Construire I puis G.
2) Soient α, β, γ trois réels tels que $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$ et G le barycentre de (A,α), (B,β) et (C,γ).
   a) Montrer que l'un au moins des trois réels $\alpha + \beta$, $\beta + \gamma$ et $\alpha + \gamma$ est non nul.
   b) On suppose, par exemple, que $\alpha + \beta \neq 0$.
   On désigne par I le barycentre de (A , α) et (B , β).
   Montrer que G est le barycentre de $(I , \alpha + \beta)$ et (C , γ).

Activité 20

Observer la figure ci-contre et exprimer G comme barycentre des points (A , a) , (B , b) et (C , c), où a, b et c sont des réels que l'on déterminera.



Activité 21 Problème de concours

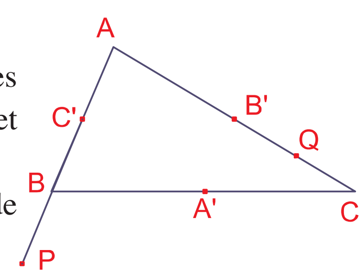
Soit ABC un triangle. On désigne par A', B' et C' les milieux respectifs de [BC] , [CA] et [AB].

Soit D le point tel que $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$.

1) a) Soit E le barycentre des points (A , 2) , (B , 1) et (C , 1).
   Montrer que le point E est le milieu du segment [AA'].
   b) Montrer que le point E appartient au segment [CD].
2) Montrer que les droites (AA'), (B'C') et (CD) sont concourantes.

Activité 22 Problème d'alignement

Dans la figure ci-contre ABC est un triangle, A', B' et C' sont les milieux des côtés opposés à A , B et C , Q est le milieu de [B'C] et P est le symétrique de C' par rapport à B.



a) Ecrire P comme barycentre de A et B , et Q comme barycentre de A et C.

b) Calculer $\overrightarrow{A'P} + 2\overrightarrow{A'Q}$ et en déduire que A' , P et Q sont alignés.

Activité 23 Recherche d'un ensemble de points

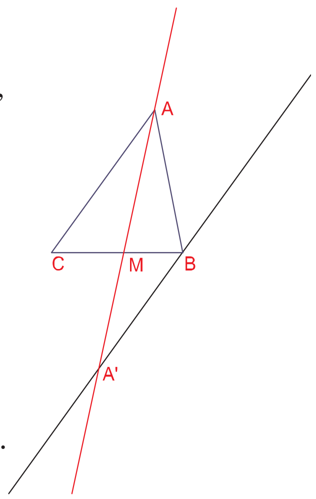
Soit ABC un triangle équilatéral de côté a.

a) Déterminer l'ensemble des points M du plan qui vérifient $\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\| = a\sqrt{3}$.
Que représente cet ensemble pour le triangle ABC ?

b) Déterminer l'ensemble des points M du plan qui vérifient $\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\| = a\frac{\sqrt{3}}{2}$.
Que représente cet ensemble pour le triangle ABC ?

Activité 24 Cercle inscrit

Soit ABC un triangle. On pose a = BC, b = AC et c = AB.
La bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$ coupe le côté [BC] en M.
La parallèle à la droite (AC) menée par B coupe la droite (AM) en A' (voir figure).



1) a) Montrer que le triangle ABA' est isocèle en B.

b) En déduire que $\frac{MB}{MC} = \frac{c}{b}$, puis que le point M est barycentre des points (B , b) et (C , c).

2) Soit G le barycentre des points (A , a) , (B , b) et (C , c).
Montrer que G appartient à la droite (AM).

3) Montrer que G est le centre du cercle inscrit dans le triangle ABC.

Assimiler : 4

1 Ecrire, dans chacun des cas suivants, une relation vectorielle qui définie le barycentre, puis construire ce point.

a) G est le barycentre de (A , 2) et (B , –1)

b) I le barycentre de (J , 1) et (K , 3).

2 Soient A et B deux points distincts.

Construire par la méthode des parallèles

a) Le barycentre G des points (A , 3) et (B , –2)

b) Le barycentre G des points (A , 4) et (B , 3).

3 Construire par la méthode du parallélogramme

a) Le barycentre G des points (A , 2) et (B , 1).

b) Le barycentre H des points (I , -2) et (J , 3).

c) Le barycentre O des points $\left(M, \frac{2}{3}\right)$ et $\left(N, \frac{1}{2}\right)$.

4 Soient A, B et C trois points non alignés.

Construire le barycentre de (A , α), (B , β) et (C , γ) dans chacun des cas suivants :

a) $\alpha = 4$, $\beta = 1$ et $\gamma = -3$.

b) $\alpha = \frac{1}{2}, = \beta - \frac{1}{3}$ et $\gamma = \frac{2}{3}$.

Barycentre de deux points

Soient A et B deux points du plan et α , β deux réels tels que $\alpha + \beta \neq 0$

- G est le barycentre de (A , α) et (B , β) signifie $\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} = \vec{0}$
- G est le barycentre de (A , α) et (B , β) signifie $\overrightarrow{AG} = \dfrac{\beta}{\alpha + \beta}\overrightarrow{AB}$.
- Si G est le barycentre de (A , α) et (B , β) alors, pour tout point M du plan,
- Soit G le barycentre de (A , α) et (B , β). On a :
  - $G \in (AB)$;
  - $G \in [AB]$ signifie α et β sont de même signe.
- Le barycentre de deux points (A , 1) et (B , 1) est le milieu du segment [AB].
- Le barycentre de (A , $k\alpha$) et (B , $k\beta$) est le barycentre de (A , α) et (B , β), où k est un réel non nul.

Barycentre de trois points

Soient A, B et C trois points du plan et α , β , γ trois réels tels que $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$.

- G est le barycentre de (A , α) , (B , β) et (C , γ) signifie $a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} + \gamma\overrightarrow{GA} = \vec{0}$
- Si G est le barycentre de (A , α) , (B , β) et (C , γ) , alors pour tout point M du plan,

$$\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} + \gamma\overrightarrow{MC} = (\alpha + \beta + \gamma)\overrightarrow{MG}$$

- Le barycentre de (A , $k\alpha$) , (B , $k\beta$) et (C , $k\gamma$) est le barycentre de (A , α) , (B , β) et (C , γ), où k est un réel non nul.
- L'isobarycentre de 3 points non alignés est le centre de gravité du triangle ABC.

Barycentre partiel

Si G est le barycentre de (A , α) , (B , β) et (C , γ) et si $\beta + \gamma \neq 0$, alors G est aussi le barycentre de (A , α) et (G' , $\beta + \gamma$) où G' est le barycentre de (B , β) et (C , γ).

1 Problème d'alignement

Soit ABC un triangle et soit G son centre de gravité. On désigne par A_1 , B_1 et C_1 les milieux respectifs des côtés [BC], [AC] et [AB].
Soit M un point quelconque du plan distinct de A, B et C, et soient P, Q et R les symétriques de M par rapport à A_1, B_1 et C_1. On désigne par G' le centre du gravité du triangle PQR.
a) Montrer que [AP], [BQ] et [CR] ont le même milieu I.
b) Montrer que I est aussi le milieu de [GG'].
c) Montrer que les points M, G, G' et I sont alignés.

Indications

a) $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{PQ}$ donc [AP] et [BQ] ont même milieu.
Trouver d'autres vecteurs égaux et conclure.
b) Montrer que $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = 3\overrightarrow{IG}$ et que $\overrightarrow{IP} + \overrightarrow{IQ} + \overrightarrow{IR} = 3\overrightarrow{IG'}$.
Conclure (on pourra ajouter les égalités membre à membre).
c) Montrer que :
• G est aussi le centre de gravité de $A_1B_1C_1$.
• Montrer que $3\overrightarrow{MG'} = 6\overrightarrow{MG}$ (on pourra utiliser $\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{MQ} + \overrightarrow{MR} = 3\,\overrightarrow{MG'}$).
Conclure.

2 Problème de concours

Soit ABCD un parallélogramme et soient K et L les milieux respectifs de [AD] et [BC].
On désigne par I et J les points de [AB] tels que AI = IJ = JB.
Montrer que les droites (AL), (BK), (CI) et (DJ) sont concourantes.

Indications

• Montrer que [AL] et [BK] se coupent en leur milieu qu'on note G.
• Il suffit de montrer que G ∈ (CI) et G ∈ (DJ) :
– Vérifier que G est le barycentre de (A , 2) et (L , 2) et que L est barycentre de (B,1) et (C ,1).
– En déduire que G est le barycentre de (A , 2) , (B , 1) et (C , 1).
– Quel est le barycentre de (A , 2) et (B , 1) ? Conclure que G ∈ (CI),
– Montrer de la même façon que G ∈ (DJ).

3 Problème d'optimisation

Soit ABC un triangle et soit M un point intérieur à ce triangle. Les droites (MA), (MB) et (MC) coupent respectivement [BC], [CA] et [AB] en A' , B' et C'.
On désigne par : a l'aire du triangle MBC
b l'aire du triangle MAC
c l'aire du triangle MAB

1) Montrer que : A' est le barycentre de (B , b) et (C , c)
B' est le barycentre de (A , a) et (C , c)
C' est le barycentre de (A , a) et (B , b)

2) Montrer que M est le barycentre de (A , a) , (B , b) et (C , c).

3) Soit $S = \frac{MA}{MA'} + \frac{MB}{MB'} + \frac{MC}{MC'}$.

On se propose de déterminer la position du point M pour laquelle la somme S est minimale.

a) Montrer que $\frac{MA}{MA'} = \frac{b+c}{a}$, $\frac{MB}{MB'} = \frac{a+c}{b}$, $\frac{MC}{MC'} = \frac{a+b}{c}$.

b) Montrer que pour tout réel x strictement positif, on a $x + \frac{1}{x} \geq 2$
Pour quelle valeur de x a-t-on l'égalité ?

c) Déterminer la position du point M pour laquelle la somme S est minimale.

Indications

1) Dans le triangle MAB, on désigne par H le pied de la hauteur issue de B.
Dans le triangle MAC, on désigne par H' le pied de la hauteur issue de C.
Montrer que $\frac{\text{Aire}(MAB)}{\text{Aire}(MAC)} = \frac{BH}{CH'} = \frac{A'B}{A'C}$.
(Pour la deuxième égalité, penser au théorème de Thalès).
Conclure.

2) Soit G le barycentre de (A , a) , (B , b) et (C , c).
Montrer que $G \in (AA')$, $G \in (BB')$, $G \in (CC')$.
En déduire que $G = M$.

3) a) Utiliser la propriété : M étant le barycentre de (A , a) , (B , b) et (C , c), il est aussi le barycentre de (A , a) et (A', b + c).

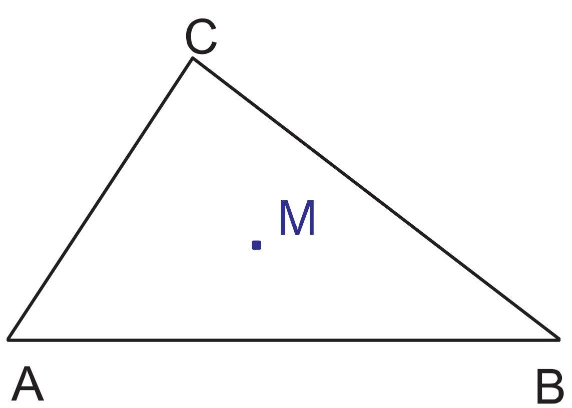
En déduire que $\frac{MA}{MA'} = \frac{b+c}{a}$.

b) Faire apparaître dans la somme S des expressions du type $x + \frac{1}{x}$.
Conclure.

Centre de gravité d'un triangle

Soient [AB] un segment et M un point en dehors de ce segment. Construire un point C tel que M soit le centre de gravité du triangle ABC.

A l'aide d'un logiciel de géométrie
- Construire un segment [AB] et un point M, en dehors de ce segment.
- Déterminer le milieu I du segment [AM].
- Déterminer le symétrique de I par rapport à M.
- Que représente ce point ?
- Construire le point C.
- Déplacer le point M et observer.
- Est-ce que toutes les positions de M correspondent à des triangles ?



Appliquer

1 A et B étant deux points distincts du plan et G le barycentre de (A, x) et (B, y).
Construire G dans chacun des cas suivants :

a) $x = 3$ et $y = -4$; b) $x = \frac{3}{5}$ et $y = \frac{2}{5}$.

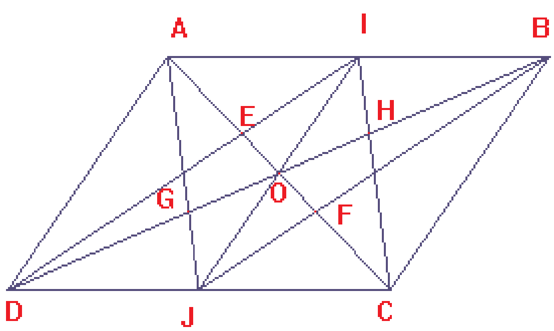
2 Dans chacun des cas suivants, trouver trois réels a, b et c pour que G soit le barycentre de (A , a) , (B , b) et (C , c).

a) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{GC}$.

b) $2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AG}$.

c) $2\overrightarrow{BA} + 3\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{GC}$.

3 Dans la figure ci-dessous, ABCD est un parallélogramme de centre O. I et J sont les milieux respectifs de [AB] et [CD].



Soit M un point quelconque du plan.
Réduire les sommes suivantes

a) $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}$

b) $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$

c) $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}$

d) $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}$

e) $\overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF}$

f) $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MF}$

g) $\overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF} - 3\overrightarrow{MH}$

4 Construire le barycentre de (A , x) , (B , y) et (C , z) dans chacun des cas suivants:

a) $x = 1$, $y = 1$ et $z = 2$.

b) $x = -1$, $y = 2$ et $z = 3$.

c) $x = \frac{1}{2}$, $y = -\frac{1}{2}$ et $z = \frac{1}{4}$.

d) $x = -2$, $y = 1$ et $z = 2$.

5 Soit ABC un triangle et soit O un point tel que $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{O}$ et $OA = OB = OC$

Montrer que ABC est un triangle équilatéral.

6 Soit ABCD un quadrilatère. On désigne par G l'isobarycentre des points A , B et C et par G' le barycentre de (C , 2) et (D , 1).
Soit M un point variable du plan.

1) Montrer que $2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}$ est un vecteur constant.

2) Déterminer l'ensemble des points M du plan qui vérifient :

a) $\| \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} \| = \| 2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} \|$

b) $\| \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} \| = \| 2\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} \|$

Maîtriser

7 Soient ABC un triangle et G le barycentre de (A , α) , (B , β) et (C , γ)

1) Montrer que si (AG) coupe (BC) alors $\beta + \gamma \neq 0$.

2) On suppose que (AG) coupe (BC) en un point A', et on désigne par I le barycentre de (B , β) et (C , γ).

a) Montrer que I appartient à la droite (AG).

b) En déduire que I = A'.

8 Soit ABC un triangle et soit I le milieu de [BC]. H est un point de (AI) tel que $H \neq A$ et $H \neq I$. (BH) coupe (AC) en J et (CH) coupe (AB) en K. Montrer que (JK) est parallèle à (BC).

Indication : On pourra démontrer que H est le barycentre de $(A, 2\alpha)$, (B , 1) et (C , 1) et utiliser le résultat de l'exercice précédent.

9 Les bissectrices intérieures d'un triangle ABC coupent les côtés [BC], [CA] et [AB] en I , J et K respectivement.

On pose : BC = a ; AC = b ; AB = c

1) Montrer que : $\dfrac{\text{Aire (AIB)}}{\text{Aire (AIC)}} = \dfrac{IB}{IC} = \dfrac{c}{b}$.

En déduire que I est le barycentre de (B , b) et (C , c).

2) Montrer que J est le barycentre de (A , a) et (C , c) et que K est le barycentre de (A , a) et (B , b).

3) Soit D le centre du cercle inscrit dans ABC. Montrer que D est le barycentre de (A , a), (B , b) et (C , c).

10 **Centre de gravité d'un quadrilatère**

Soit ABCD un quadrilatère et soient I, J, K et L les milieux respectifs des côtés [AB], [BC], [CD] et [DA]. On désigne par M et N les milieux respectifs des diagonales [AC] et [BD]

1)Montrer qu'il existe un seul point G tel que: $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$.

Ce point G est appelé isobarycentre des points A , B , C et D ou centre de gravité du quadrilatère ABCD.

2) Montrer que les segments [IK], [LJ], [MN] sont concourants en leur milieu G.

3) Donner une méthode de construction du centre de gravité d'un quadrilatère.

11 Soit ABCD un losange de centre O.

On place E et F tels que :

$\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CF} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CD}$.

La droite (EF) coupe la droite (AD) en M et la droite (BC) en N.

a) Montrer que O est le milieu de [EF].

b) Etablir que E et F partagent [MN] en trois segments de même longueur.

c) Montrer que le triangle DBN est rectangle, et que F est son centre de gravité.

12 Soient ABCD un quadrilatère, I le milieu de [AC] et J le milieu de [BD].

Soit K le barycentre de (A , 1) et (B , 2) et soit L le point défini par $3\overrightarrow{DL} = \overrightarrow{DC}$.

On désigne par M le milieu de [KL] .

Montrer que I, J et M sont alignés.

13 Soit ABC un triangle et soient :

I le barycentre de (B , 1) et (C , 2)

J le barycentre de (A , 3) et (C , 2)

K le barycentre de(B , 4) et (A , 3).

Montrer que les droites (AI), (BJ) et (CK) sont concourantes.

Math et culture

Archimède

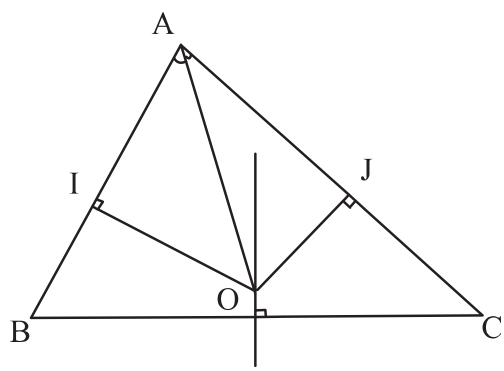
Né à Syracuse vers 287 avant J-C. Inventeur génial et populaire, il était réputé dans tout le monde grec par la construction de mécaniques subtiles et précises : leviers, pompes à eau; machines de guerre, etc... On raconte qu'il utilisa les propriétés des miroirs paraboliques pour faire converger les rayons de soleil sur les navires romains assiégeant Syracuse et mettre le feu à la flotte.

Ses travaux sur le calcul des aires et des volumes constituent l'apogée de la géométrie alexandrine (Alexandrie).

Tout triangle est isocele !

Nous allons vous prouver que tout triangle que vous pouvez tracer sur une feuille a nécessairement deux côtés d'égale longueur.

Prenons donc un triangle ABC. Traçons la médiatrice de [BC], et la bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$. Si le triangle n'est pas isocèle, ces deux droites sont distinctes et se coupent en un unique point O. Projetons orthogonalement O sur la droite (AB) en I et sur (AC) en J. Tout est prêt.



Les triangles AlO et AJO sont rectangles respectivement en I et J.

Ils ont l'hypoténuse [AO] en commun. De plus, les angles $\widehat{IAO}$ et $\widehat{JAO}$ sont égaux (car O est sur la bissectrice de l'angle $\widehat{IAJ}$).

Conclusion :

Ces deux triangles sont superposables, et on a OI = OJ et AI = AJ.

Considérons maintenant les triangles rectangles OBI et OJC.

En appliquant le théorème de Pythagore à chacun des triangles, on obtient

$OB^2 = IB^2 + OI^2$

$OC^2 = JC^2 + OJ^2$

Or on a vu que OB = OC et OI = OJ, donc il vient lB = JC.

Par suite, AB = AI + lB = AJ + JC = AC. Le triangle est isocèle en A!

Les points A, B, C peuvent être permutés dans cette démonstration ; on en déduit que le triangle est également isocèle en B.

Le résultat final dépasse nos espérances : tout triangle est en réalité équilatéral

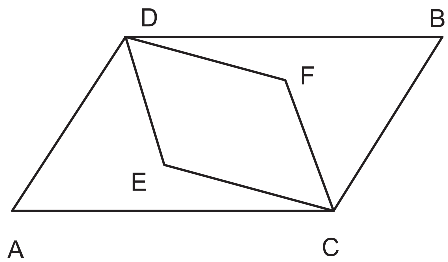
Il y a bien sûr, quelque part, une erreur dans cette démonstration. A vous de la découvrir.

Jean-Yves Sirean (Tangente n°14)

“Ce n’est qu’en essayant continuellement, qu’on finit par réussir.”
Shadoks

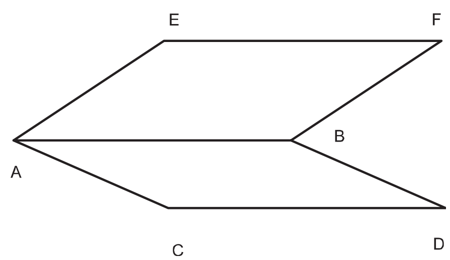
Pour démarrer

1 Dans la figure ci-contre, ACBD et CEDF sont deux parallélogrammes.
Parmi les affirmations proposées, une ou plusieurs sont correctes. Lesquelles ?



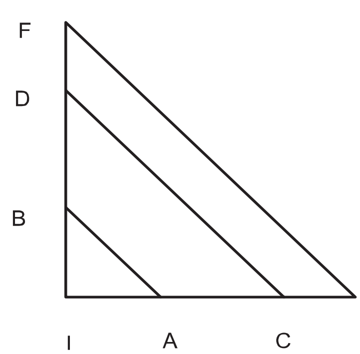
a) La symétrie axiale, d’axe (DC), envoie A sur B et E sur F.
b) La symétrie centrale de centre le milieu du segment [DC], envoie A sur B, C sur D et E sur F.
c) La translation de vecteur $\overrightarrow{AD}$, envoie C sur B et E sur F.

2 Dans la figure ci-contre, ABDC et ABFE sont deux parallélogrammes.
Choisir la ou les affirmations correctes.



a) La translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ envoie A sur B, C sur D et E sur F.
b) L’image de la droite (AC) par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ est la droite (BD).
c) L’image de la droite (EF) par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ est la droite (CD).

3 Dans la figure ci-contre, le triangle IAB est isocèle et rectangle en I et les droites (AB), (CD) et (EF) sont parallèles.
Parmi les affirmations proposées, une ou plusieurs sont correctes. Lesquelles ?



a) Le quart de tour direct de centre I envoie A sur B, C sur D et E sur F.
b) La translation de vecteur $\overrightarrow{EF}$ envoie A sur B, C sur D et E sur F.
c) La symétrie axiale, d’axe la médiatrice du segment [AB], envoie A sur B, C sur D et E sur F.

Notion d’application du plan dans le plan

Activité 1

Soit A et B deux points distincts donnés et M un point du plan.

1) a) Construire le point N symétrique du point M par rapport à A.

b) Construire le point P symétrique du point M par rapport à la droite (AB).

c) Construire le point Q tel que $\overrightarrow{MQ} = \overrightarrow{AB}$.

2) Soit C un point distinct de A.

Construire un point C’ tel que ACC’ soit un triangle équilatéral.

Combien y a-t-il de points C’ répondant à la question ?

3) Soit D un point distinct de B

Construire un point B’ tel que le triangle DBB’ soit rectangle en B’.

Combien y a-t-il de points B’ répondant à la question ?

Définition

Lorsqu’on associe à tout point M du plan un seul point M’, on définit une application du plan dans lui même.

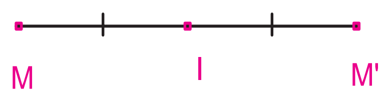
Si on désigne par f cette application, alors on écrit

$$\begin{aligned} f : P &\longrightarrow P \\ M &\mapsto M' \end{aligned}$$

M’ s’appelle l’image du point M par l’application f.

M s’appelle antécédent du point M’ par l’application f.

Exemples

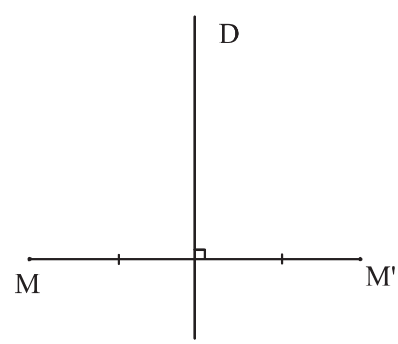


• Soit I un point du plan.

La symétrie centrale $S_I : P \longrightarrow P$

$M \mapsto M'$ tel que I est le milieu de [MM’],

est une application du plan dans lui-même.



• Soit D une droite.

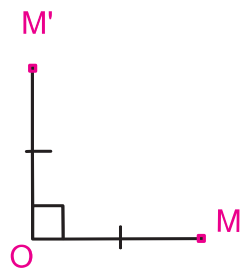
La symétrie orthogonale $S_D : P \longrightarrow P$

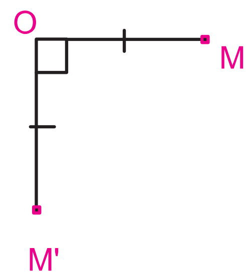
$M \mapsto M'$

tel que D soit la médiatrice du segment [MM’],

est une application du plan dans lui même.

• Un quart de tour direct, un quart de tour indirect sont des applications du plan.





Assimiler : 1

Translations

Activité 2

Soient I et J deux points distincts du plan.
Soit M un point du plan, on désigne par M_1 son image par la symétrie centrale S_I et par M' l'image de M_1 par la symétrie centrale S_J .

Soit $\begin{array}{l} t : P \longrightarrow P \\ \quad M \mapsto M' \end{array}$

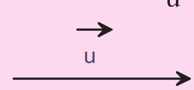
1) Soit C un point distinct de I et de J .
   a) Construire le point C' image du point C par l'application t.
   b) Exprimer $\overrightarrow{CC'}$ en fonction $\overrightarrow{IJ}$.

2) a) Construire l'image M' d'un point M par l'application t.
   b) Montrer que $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{CC'}$.

Définition

Soit $\vec{u}$ un vecteur. L'application du plan dans lui même qui à tout point M associe l'unique point M' tel que $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$ est appelée translation de vecteur $\vec{u}$. Elle est notée $t_{\vec{u}}$.

On écrit $\begin{array}{l} t_{\vec{u}} : P \longrightarrow P \\ \quad M \mapsto t_{\vec{u}}(M) = M' \end{array}$



M' est l'image de M par $t_{\vec{u}}$.

$t_{\vec{u}}(M) = M'$ équivaut à $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$.

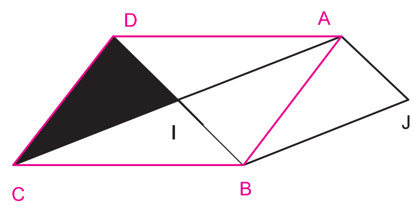
Remarque

Etant donné un point M’, il existe un seul point M du plan tel que $t_{\vec{u}}(M) = M'$.

M est l’antécédent de M’ par $t_{\vec{u}}$.

Activité 3

Dans la figure ci-contre, ABCD et AIBJ sont deux parallélogrammes.



1) Déterminer l’image par $t_{\overrightarrow{AI}}$ de chacun des points A, I et J.

2) Déterminer l’image par $t_{\overrightarrow{JI}}$ de chacun des points A, B et J.

3) Déterminer l’antécédent par $t_{\overrightarrow{AJ}}$ de chacun des points B, I et J.

Assimiler : 2

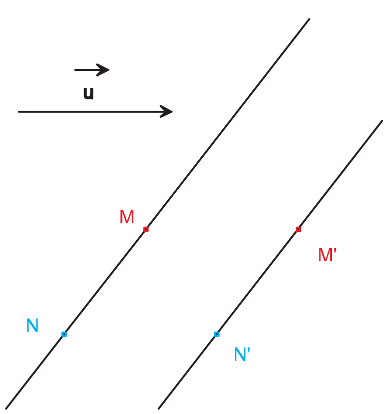
Activité 4 Propriété caractéristique

1) Soient M et N deux points du plan d’images respectives M’ et N’ par une translation de vecteur $\vec{u}$. Montrer que $\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{MN}$

2) Soit f une application du plan dans le plan, M et N deux points quelconques et M’ et N’ leurs images respectives par f.

Montrer que si $\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{MN}$ alors f est une translation.

Conséquence



• Pour tout points M et N d’images respectives M’ et N’ par une translation on a MN = M’N’.

On dit qu’une translation conserve les distances.

• Pour tout points M et N distincts, d’images respectives M’ et N’ par une translation les droites (MN) et (M’N’) sont parallèles.

Activité 5
Soit A, B et C trois points du plan et soit
$f : P \mapsto P$

$$M \mapsto M' \text{ tel que } \overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC}$$

Montrer que f est une translation dont on déterminera le vecteur.

Activité 6 Conservation de l'alignement
1) Soient M, N et P trois points alignés et soient M' , N' et P' leurs images respectives par une translation t de vecteur $\vec{u}$. Montrer que M', N' et P' sont alignés.
2) Soient A, B et C trois points d'une droite Δ .
Soient I et J deux points non situés sur Δ .
   a) Construire les points H, K et L tels que AIJH, BIJK et CIJL soient des parallélogrammes.
   b) Montrer que les points H, K et L sont alignés.

Activité 7
Soient ABC un triangle et I, J et K les milieux respectifs des segments [BC], [AC]et [AB].
On désigne par $\vec{u}$ le vecteur $\overrightarrow{BA}$ et par $\vec{v}$ le vecteur $\overrightarrow{BC}$.

1) Exprimer les vecteurs $\overrightarrow{BI}$, $\overrightarrow{BK}$ et $\overrightarrow{BJ}$ en fonction de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
2) On désigne par t_1 et t_2 les translations de vecteurs respectifs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et on considère les points L et M tels que $L = t_1(C)$ et $M = t_2(C)$.
   a) Construire L et M.
   b) Montrer que les points J, K, L et M sont alignés et que J est le milieu de [KM].
   c) Montrer que L est l'image de M par la translation de vecteur $\frac{1}{2}\vec{v}$.

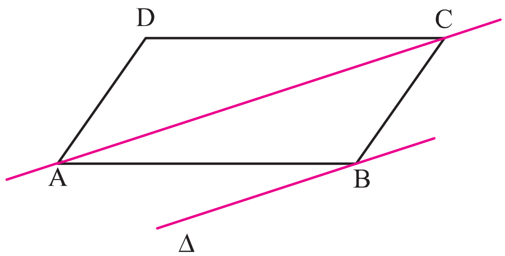
Activité 8 Image d'une droite, d'un segment et d'une demi- droite
Soient A et B deux points distincts et soient A' et B' leurs images respectives par une translation t de vecteur $\vec{u}$.
1) Soit M un point de (AB) et M' son image par t.
   a) Traduire par une relation vectorielle l'énoncé « $M \in (AB)$ ».
   b) En déduire que $M' \in (A'B')$.
2) Soit N' un point de (A'B') et N son antécédent par t. Montrer que $N \in (AB)$.
3) Que peut-on conclure ?
4) Quelle est l'image du segment [AB] par t ?
5) Quelle est l'image de la demi- droite [AB) par t ?

Activité 9

Soient ABCD un parallélogramme et Δ la parallèle à la droite (AC) passant par B.

1) Déterminer l'image de chacune des droites (AB), (AD) et Δ par la translation t de vecteur $\overrightarrow{AC}$.

2) Construire l'image de la droite (DB) et l'image de la droite (BC) par la translation t.



Activité 10 Conservation du milieu

1) Soient ABC un triangle et M, N et P les milieux respectifs des segments [BC], [AC] et [AB].

On note t la translation de vecteur $\overrightarrow{MC}$

a) Déterminer t(B) et t(P).

b) Soit Q l'image de A par t.

Montrer que les points M , N et Q sont alignés.

Préciser la position du point N sur le segment [MQ].

2) Soient I et J deux points distincts et O le milieu de [IJ]. On désigne par I', J' et O' leurs images respectives par une translation t .

Montrer que O' est le milieu de [I'J'].

Activité 11 Conservation du barycentre

Soit ABC un triangle, O le milieu de [BC] et t la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$

1) Construire les points A', C' et O' images respectives de A, C et O par t.

2) On désigne par M le point d'intersection des droites (BA') et (AO).

Montrer que M est le centre de gravité du triangle ABC.

3) Soit N le point d'intersection de (AC') et (A'O').

a) Que représente N pour le triangle A'CC' ?

b) Montrer que N est l'image du point M par la translation t.

4) Soient I et J deux points du plan et a et b deux réels tels que $a + b \neq 0$. On désigne par G le barycentre de (I , a) et (J , b) et par I', J' et G' les images respectives de I, J et G par une translation.

Montrer que G' est le barycentre de (I', a) et (J', b).

Activité 12

Dans la figure ci-contre, ABC est un rectangle, M est un point à l'intérieur de ce rectangle tel que le triangle ABM est non rectangle en M et H est l'orthocentre du triangle ABM.

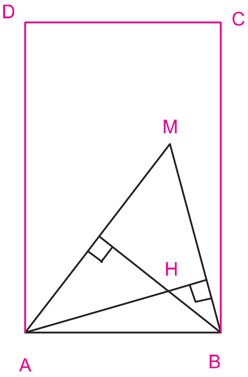
Soit E le projeté orthogonal de C sur la droite (AM) et F le projeté orthogonal de D sur la droite (BM). On note I le point d'intersection des droites (CE) et (DF).

On considère la translation t de vecteur $\overrightarrow{BC}$.

1) a) Quelle est l'image de la droite (BH) par la translation t ?

b) Quelle est l'image de la droite (MH) par la translation t ?

2) Montrer que les points I, M et H sont alignés.



Assimiler : 3-4

Activité 13 Conservation du parallélisme et de l'orthogonalité

Soient D et Δ deux droites et D' et Δ ' leurs images respectives par une translation t.

Que peut-on dire des droites D' et Δ' dans chacun des cas suivants :

a) D et Δ sont parallèles.

b) D et Δ sont perpendiculaires.

Assimiler : 5

Activité 14

1) Soit MNP un triangle et M'N'P' son image par une translation.

Montrer que les triangles MNP et M'N'P' sont isométriques.

2) Soit ABCD un quadrilatère et A'B'C'D' son image par une translation.

Déterminer la nature du quadrilatère A'B'C'D' dans chacun des cas suivants :

a) ABCD est un rectangle.

b) ABCD est un losange.

3) Que peut-on dire de l'image d'un polygone par une translation ?

Activité 15 Conservation des angles

Soit t une translation de vecteur $\vec{u}$ et [Ox , Oy] un secteur.

On désigne par [O' x') et [O' y') les images respectives des demi-droites [Ox) et [Oy) par la translation t.

Montrer que $\widehat{xOy} = \widehat{x'O'y'}$.

Activité 16 Image d'un cercle

Soient t une translation de vecteur $\vec{u}$, $\mathscr{C}$ un cercle de centre O et de rayon R et O' l'image de O par t. On désigne par $\mathscr{C}$ ' le cercle de centre O' et de même rayon que $\mathscr{C}$.

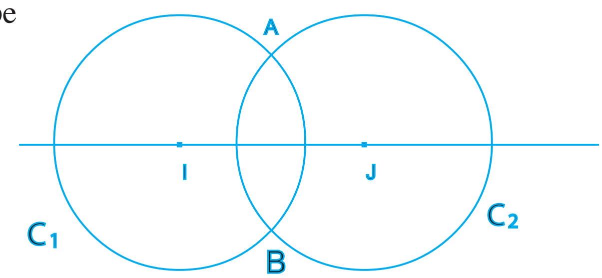
1) Soit M un point de $\mathscr{C}$ et M' = t(M). Montrer que M' $\in \mathscr{C}$ '.

2) Soit N' un point de $\mathscr{C}$ ' et N l'antécédent de M par t . Montrer que N $\in \mathscr{C}$.

3) Que peut-on conclure ?

Activité 17

Soient C_1 et C_2 deux cercles de même rayon, sécants en A et B, de centres respectifs I et J. La droite Δ passant par A et parallèle à (IJ) recoupe C_1 en M et C_2 en N.



Soit t la translation de vecteur $\vec{IJ}$.

1) Déterminer les images respectives de Δ et de C_1 par t.

2) En déduire t(A) puis t(M).

3) Soit P un point quelconque du cercle C_1 et soit P' son image par t.

Montrer que A est l'orthocentre du triangle BPP'.

Assimiler : 6

Activité 18 Conservation du contact

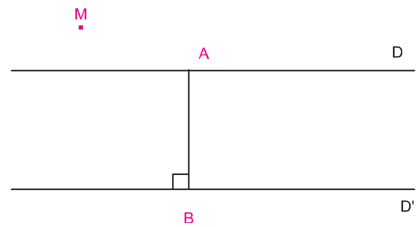
Soit $\mathscr{C}$ un cercle et Δ une droite tangent à $\mathscr{C}$ en un point M. On désigne par $\mathscr{C}$ ', Δ ' et M' les images respectives de $\mathscr{C}$, Δ et M par une translation t.

Montrer que Δ ' est tangent à $\mathscr{C}$ ' en M'.

Assimiler : 7

Activité 19

Dans la figure ci-contre, D et D' sont deux droites parallèles, A est un point de la droite D, B est le projeté orthogonal du point A sur la droite D' et M un point quelconque du plan.



On désigne par M_1 l'image du point M par la symétrie axiale S_D et par M' l'image du point M_1 par la symétrie axiale $S_{D'}$.

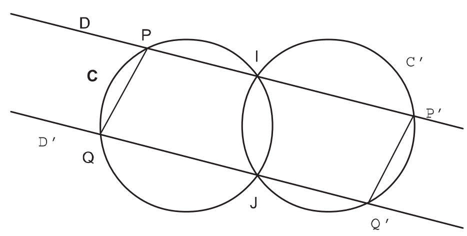
On considère l'application $t : P \longrightarrow P$

$$M \mapsto M'.$$

1) a) Reproduire la figure et construire le point A' image du point A par l'application t.

b) Exprimer $\overrightarrow{AA'}$ en fonction $\overrightarrow{AB}$.

2) a) Construire l'image M' d'un point M, par l'application t.



b) Montrer que $\overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{AB}$. En déduire la nature de l'application t.

3) Soient C et C' deux cercles sécants en I et J.

Une droite D passant par I recoupe les cercles C et C' respectivement en P et P'.

La droite D' passant par J et parallèle à la droite D recoupe les cercles C et C' respectivement en Q et Q'.

Montrer que le quadrilatère P P'Q'Q est un parallélogramme.

(On pourra considérer deux droites passant respectivement par le centre du cercle (C) et par le centre du cercle C' et telle que chacune d'elles est perpendiculaire à la droite D).

Problème de lieux

Problèmes de lieux faisant intervenir les propriétés des configurations

Activité 20

On considère deux droites D et D' perpendiculaires en un point O et un point A n'appartenant ni à la droite D ni à la droite D'.

Soit M un point variable sur la droite D.

La perpendiculaire à la droite (AM) et en A coupe la droite D' en N.

Soit I le milieu du segment [MN].

On se propose de déterminer, sur quel ensemble varie le point I lorsque le point M varie sur la droite D.

1ère étape : Phase expérimentale

a) Faire une figure.

b) Quels sont les éléments fixes et les éléments variables de la figure ?

c) Placer quelques points I correspondants à différentes positions du point M.

2ème étape : Conjecture

Emettre une conjecture sur l'ensemble des points I lorsque le point M décrit la droite D.

3ème étape : Démonstration de la conjecture

Montrer que I varie sur une ligne que l'on précisera.

Vocabulaire

La ligne que décrit le point I est aussi appelée l'ensemble des points I ou le lieu géométrique des points I ou tout simplement le lieu des points I.

Activité 21

Soient A et B deux points distincts donnés et D une droite variable passant par A. Soit H le projeté orthogonal de B sur la droite D.

En utilisant un procédé analogue à celui décrit dans l'activité précédente, montrer que, lorsque D pivote autour du point A, le point H varie sur une ligne qu'on précisera.

Problèmes de lieux faisant intervenir les applications du plan dans le plan

Activité 22

Soient D une droite, O et O' deux points distincts n'appartenant pas à D et M un point variable de la droite D.

Le cercle de centre O et passant par M et le cercle de centre O' et passant par M se coupent en un deuxième point N.

a) Faire une figure.

b) Trouver une application qui transforme le point M en N.

c) En déduire le lieu des points N lorsque M décrit la droite D ?

Activité 23

Soient A et B deux points donnés et D un droite passant par A et ne passant pas par B.

Soit M un point variable sur la droite D et distinct de A. On désigne par N le point tel que ABNM soit un parallélogramme.

a) Prouver que le point N est l'image du point M par une application qu'on précisera.

b) Quel est le lieu géométrique des points N lorsque le point M varie sur D ?

Construire ce lieu.

c) Quel est le lieu géométrique des points N lorsque le point M varie sur un cercle fixe C de centre A et de rayon 3 ? Construire ce lieu.

Activité 24

Soient A et B deux points fixes d'un cercle C et M un point du cercle C, distinct de A et B.

Soit H l'orthocentre du triangle AMB.

1) Soit D le point du cercle C diamétralement opposée à A.

Quelle est la nature du quadrilatère MHBD ?

2) Quel est le lieu des point H lorsque M varie sur le cercle C privé de A et B ?

Problèmes de construction

Problèmes de construction faisant intervenir les propriétés des configurations

Activité 25

Soient I, J et K trois points non alignés.

On se propose de construire un triangle ABC dont les milieux des côtés sont les points I, J et K.

1ère étape : Analyse à partir d'une figure d'étude

On suppose le problème résolu c'est à dire que la construction est effectivement réalisée.

a) Faire une figure « à l'envers » correspondant à une solution du problème.

c'est à dire construire d'abord un triangle ABC puis placer les points I , J et K milieux respectifs de [BC], [AC] et [AB].

b) Observer la figure et prouver que

- la droite (AB) est parallèle à la droite (IJ).
- droite (AC) est parallèle à la droite (IK).
- droite (BC) est parallèle à la droite (JK).

2ème étape : Synthèse et retour aux données initiales

a) Placer trois points non alignés I, J et K.

b) Construire la parallèle à (IJ) passant par K et la parallèle à (IK) passant par J.

Ces droites sont-elles toujours sécantes ? Si oui soit A leur intersection.

c) Achever la construction du triangle ABC.

Activité 26

1) Soit M et N deux points distincts donnés et Γ le cercle de diamètre [MN].

Construire un point P tel que le centre de gravité G du triangle MNP soit un point du cercle Γ.

2) Construire un triangle ABC dont les médianes issues de B et de C sont perpendiculaires.

Problèmes de construction faisant intervenir les applications du plan dans le plan

Activité 27

Soient D et Δ deux droites concourantes et A et B deux points distincts n'appartenant ni à la droite D ni à la droite Δ.

On se propose de construire un point M de D et un point N de Δ tels que le quadrilatère ABMN soit un parallélogramme.

1ère étape Analyse à partir d'une figure d'étude

On suppose le problème résolu c'est à dire que la construction est effectivement réalisée.

a) Construire un parallélogramme ABMN puis une droite D et une droite Δ sécantes et passant respectivement par M et N.

b) Trouver une application t qui envoie le point M en N.

c) Soit D' l'image de la droite D par l'application t .

Déterminer l'intersection des droites D' et Δ .

2ème étape : Synthèse et retour aux données initiales

a) Construire deux droites concourantes D et Δ et deux points distincts A et B n'appartenant ni à D ni à Δ.

b) Construire la droite D' image de la droite D par l'application t.

c) Montrer que D' et Δ sont sécantes .On désigne par N leur point d'intersection.

d) Construire le point M de la droite D tel que ABMN soit un parallélogramme.

1 Soient A, B, C et D quatre points distincts du plan.

1) a) Construire le point C' isobarycentre des points A, B et C.

b) Construire le point D' isobarycentre des points A, B et D.

2) A tout point M on associe le point M' tel que $\overrightarrow{M'A} + \overrightarrow{M'B} + \overrightarrow{M'M} = \vec{0}$.

a) Justifier l'existence et l'unicité de M'.

b) Construire M'.

2 Soient A et B deux points du plan. On considère l'application f du plan dans lui même, qui à tout point M associe le point N tel que $\overrightarrow{AN} = 3\overrightarrow{AM} - 2\overrightarrow{BM}$.

Exprimer $\overrightarrow{MN}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$

En déduire que f est une translation dont on précisera le vecteur.

3 Soit ABC un triangle et M un point de (AB).

a) Construire les points D et N images respectives de B et M par la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$.

b) Montrer que C, D et N sont alignés.

4 Soit ABCD un parallélogramme et t une translation qui transforme (AB) en (CD) et (AD) en (BC).

Montrer que t a pour vecteur $\overrightarrow{AC}$.

5 Soient [AB] un segment de milieu O, D la médiatrice de [OA] et Δ celle de [OB].

Montrer que la translation t de vecteur $\overrightarrow{AO}$ transforme D en Δ.

6 Soient A et B deux points d'un cercle C.

a) Construire l'image C ' de C par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$

b) Pour tout point M de C on associe le point N tel que $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}$.

Montrer que N est un point de C '.

7 Soient A et B deux points distincts d'une droite Δ , et C un cercle tangent à Δ en A.

a) Construire le cercle C ' image de C par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.

b) Montrer que C ' est tangent à Δ .

Propriété caractéristique

- Soit t une application du plan dans le plan et M et N deux points quelconques du plan d'images respectives M' et N' par t.

(t est une translation) équivaut à $\left(\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{MN}\right)$.

Conservation de l'alignement

Les images, par une translation, de points alignés sont des points alignés

Images d'une droite, d'un segment, d'une demi-droite et d'un cercle par une translation.

- L'image d'une droite par une translation est une droite qui lui est parallèle.
- L'image d'un segment par une translation est un segment qui lui est isométrique.
- L'image d'une demi - droite par une translation est une demi- droite.
- L'image d'un cercle par une translation est un cercle de même rayon.

Conservation du barycentre

- La translation conserve le milieu.
- La translation conserve le barycentre.

Conservation du parallélisme, de l'orthogonalité et du contact

- Les images par une translation de deux droites parallèles sont deux droites parallèles.
- Les images par une translation de deux droites perpendiculaires sont deux droites perpendiculaires.
- Si une droite et un cercle sont tangents, alors leurs images par une translation sont tangents.

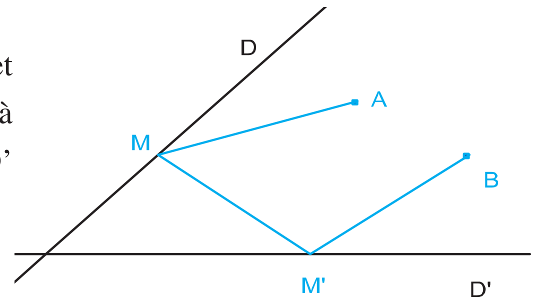
Conservation des grandeurs

- Une translation conserve les distances.
- Une translation conserve les angles.
- L'image d'un polygone par une translation est un polygone qui lui est superposable.

Problèmes de construction

1 ***Trajet minimal***

Dans la figure ci-contre, D et D’ sont deux droites et A et B deux points du plan n’appartenant ni à D ni à D’. Construire un point M de D et un point M’ de D’ de sorte que le trajet AMM’B soit minimal.

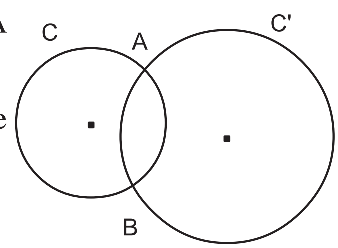


Indication

Utiliser les points A’ et B’ tels que $A' = S_D(A)$ et $B' = S_{D'}(B)$.

2 Dans la figure ci-contre, C et C’ sont deux cercles sécants en A et B.

Construire un point M sur C et un point M’ sur C’ tels que A soit le milieu de [MM’].



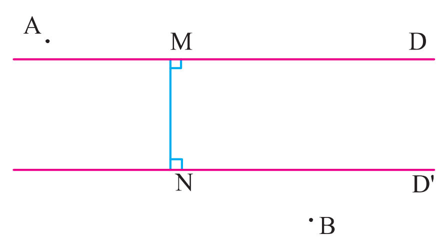
Indication

Utiliser l’image de C par S_A.

3 ***Un problème de pont***

Dans la figure ci-contre, les droites D et D’ représentent les berges (parallèles) d’une rivière.

Où faut-il construire le pont [MN] (perpendiculaire aux berges de la rivière) pour que le trajet du village A au village B soit le plus court possible ?



Indications

Remarquer que :

- $\overrightarrow{MN}$ et un vecteur constant.
- AM = A’N, où A’ est l’image de A par la translation de vecteur $\overrightarrow{MN}$.

4 Soient D une droite, A un point du plan et l un réel strictement positif.
Construire un cercle passant par A et qui coupe la droite D en deux points, extrémités d'un segment de longueur l.

Indications

• Commencer par construire un cercle C qui découpe sur D un segment de longueur l (ce qui revient à abandonner provisoirement la condition « C passe par A »).

• Trouver une translation qui transforme C en un cercle passant par A et qui découpe sur D un segment de longueur l.

A l’aide d’un logiciel de géométrie.

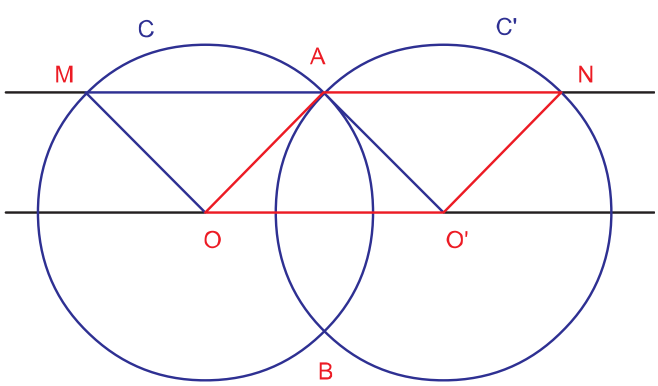
Construire deux cercles C et C’ de centres respectifs O et O’ et de même rayon (utiliser compas du menu du logiciel), se coupant en A et B. La droite passant par A et parallèle à la droite (OO’) recoupe C en M et C’ en N.

1) Vérifier par les outils du logiciel que les deux quadrilatères MAO’O et ANO’O sont des parallélogrammes.

Montrer que MAO’O et ANO’O sont deux parallélogrammes. (Utiliser une translation).

1) Ces parallélogrammes peuvent-ils être des losanges (déplacer O ou O’) ? Des rectangles ? Des carrés ?

Faire des essais avec le logiciel, conjecturer et justifier la conjecture.



.Appliquer

1 Soit D une droite et M un point du plan. On désigne par M_1 le projeté orthogonal de M sur la droite D.

1) Soit $f : P \longrightarrow P$
$M \mapsto M_1$.

a) Prouver que f est une application.

b) Quelle est l'image d'un point I de D ?

c) Soit J' un point de D. Déterminer un antécédent J du point J'.

Quel est l'ensemble des antécédent J' ?

2) Soit $g : P \longrightarrow P$
$M \mapsto M'$ où M' est le milieu du segment $[MM_1]$.

a) Construire l'image d'un point M du plan par l'application g.

b) Quelle est l'image d'un point E de la droite D ?

c) Soit N' un point du plan Construire son antécédent N par l'application g.

2 Soient A et B deux points distincts.

On désigne par f l'application du plan qui à tout point M associe le point M' barycentre de (A , 1) , (B , –1) et (M , 1).

1) a) Construire les points A' et B' images respectives des points A et B par f

b) Vérifier que $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'}$

2) Soit M un point distinct de A et de B

a) Construire l'image M' du point M, par l'application f.

b) Exprimer $\overrightarrow{MM'}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$.

c) En déduire la nature de l'application f.

3 Soit ABCD un parallélogramme. Une droite Δ parallèle à (AC) coupe (AB), (AD), (CB) et (CD) respectivement en M, N, H et K.

On désigne par t la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$.

1) Déterminer l'image de M par t.

2) Montrer que MN = HK.

4 Soit ABCD un parallélogramme et E un point n'appartenait pas a (BC) La parallèle à la droite (BE) passant par A et la parallèle à la droite (CE) passant par D se coupent en un point F. Montrer que $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{BA}$.

5 Soit ABCD un parallélogramme qui n'est pas un rectangle.

1) Construire le point E symétrique de A par rapport à D.

2) Soit H le projeté orthogonal de D sur (AB) et K le projeté orthogonal de E sur (CD). Quelle est la nature du quadrilatère DEKH ?

Maîtriser

6 Soit ABCD un parallélogramme inscrit dans un cercle $\mathscr{C}$ de centre O.

On désigne par O' et $\mathscr{C}$' les images respectives de O et $\mathscr{C}$ par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.

1) Montrer que $\mathscr{C}$' passe par B et C.

2) En déduire que (OO') est perpendiculaire à (BC).

3) Que peut – on conclure pour le parallélogramme ABCD ?

7 Soient $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}$' deux cercles isométriques de centres respectifs O et O'.

1)a) Trouver la symétrie centrale qui transforme $\mathscr{C}$ en $\mathscr{C}$'.

b) Trouver la symétrie axiale qui transforme $\mathscr{C}$ en $\mathscr{C}$'.

c) Trouver la translation qui transforme $\mathscr{C}$ en $\mathscr{C}$'

2) On suppose que $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}$' sont tangeants en I. On désigne par A et B deux points du cercle $\mathscr{C}$ et par M et N les points diamétralement opposés à A et à B sur le cercle $\mathscr{C}$.

La droite (MI) coupe le cercle $\mathscr{C}$' en A' et la droite (NI) coupe le cercle $\mathscr{C}$' en B'.

Quelle est la nature du quadrilatère AA'B'B?

8 Soient D et Δ deux droites sécantes en un point O et soit A un point de D distinct de O.

Soient M un point variable sur Δ et N le point défini par $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{OM}$

Déterminer et construire l'ensemble des points N lorsque M varie sur Δ.

9 Soit O et A deux points distincts donnés et $\mathscr{C}$ le cercle de centre O et de rayon OA.

Soit M un point variable sur le cercle $\mathscr{C}$.

La droite (OM) recoupe le cercle $\mathscr{C}$ en I.

La parallèle à (OA) passant par M coupe la droite (AI) en N.

Quel est l'ensemble des points N lorsque le point M décrit le cercle $\mathscr{C}$?

10 Soit $\mathscr{C}$ un cercle de centre O et de rayon R et soit D une droite.

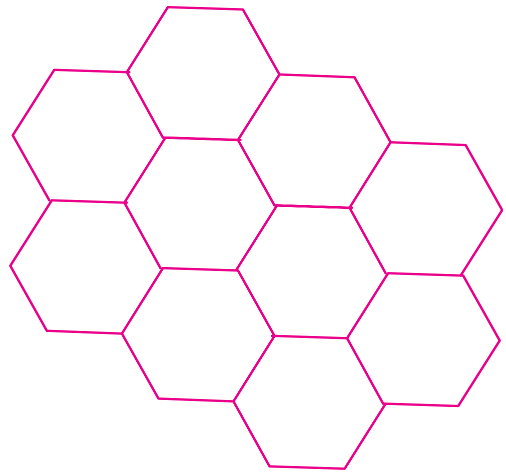
Pour tout point M de $\mathscr{C}$, on trace le cercle C_M de centre M et de rayon R, puis on trace les tangentes à C_M parallèles à D.

Quel est l'ensemble décrit par les points de contact de ces tangentes avec les cercles C_M?

11 Soient A et B deux points d'un cercle $\mathscr{C}$. Construire deux points M et N de $\mathscr{C}$ tels que ABMN soit un trapèze de bases [AB] et [MN] et que AB = 2MN.

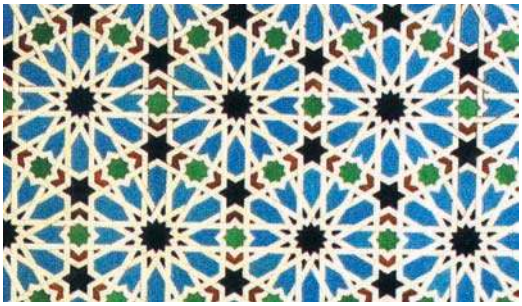
Pavage du plan

Paver le plan c'est le couvrir par des formes, sans espace (trou) et sans chevauchement. C'est ce que fait un carreleur.
On peut commencer par paver le plan avec des polygones réguliers : le pavage régulier.
On peut paver le plan à l'aide d'un carré, d'un triangle équilatéral, d'un hexagone régulier,…
Dans la figure ci-contre un pavage du plan à l'aide d'un hexagone régulier.
Remarquer que l'angle au sommet des polygones est à chaque fois 360°.
Peut-on paver le plan à l'aide d'un pentagone ?



Mosaïques et pavages

L'art de paver une surface plane, comme le sol ou les murs d'un palais, est très ancien et se pratiquait à Rome, Byzance, Grenade ou Séville. Selon la nature du support, on distingue les mosaïques de pavement et les mosaïques murales. Les motifs représentés peuvent être figuratifs mais aussi purement géométriques.
Né en Grèce, l'art de la mosaïque s'est répandu sur tout le pourtour de la méditerranée par l'intermédiaire des romains. Repris par les civilisations byzantine et arabo-musulmane, il a connu son apogée dans le sud de l'Espagne et le Maroc.
Ci-dessous, une mosaïque basée sur des pavements utilisant des quarts de cercles, et une mosaïque murale basée sur un pavage hexagonal.



D'après Tangente N° 99

HOMOTHÉTIE

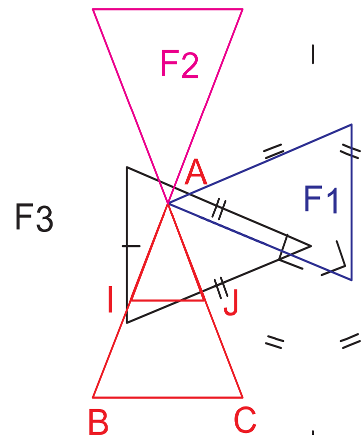
chapitre 8

Ce n'est pas parce que les choses sont difficiles qu'on n'essaye pas, mais c'est parce qu'on n'essaye pas que les choses sont difficiles.

SENEQUE

Pour démarrer

1 Dans la figure ci-contre, ABC est un triangle isocèle en A. Les points I et J sont les milieux respectifs des segments [AB] et [AC].



1) Quelle application du plan envoie :

a) ABC sur F_1 ?

b) ABC sur F_2 ?

c) ABC sur F_3 ?

2) Existe-t-il une translation qui envoie ABC sur F_1 ?

3) Parmi les applications du plan que vous connaissez en existe-t-il une qui envoie ABC sur AIJ ?

2 Dans la figure ci-dessous, A et B sont deux points distincts de la droite (xy).

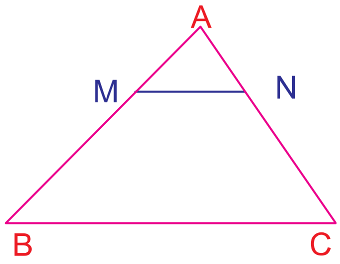
Soit k un réel et soit M le point défini par $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$.

Préciser dans chacun des cas suivants la position du point M sur la droite (xy).

a) $k < 0$ b) $k \in [0,1]$ c) $k > 1$

3 Dans la figure ci-contre, les droites (MN) et (BC) sont parallèles et AC = 3 AN.

Exprimer le périmètre du triangle ABC en fonction du périmètre du triangle AMN.



4 Soient ABCD un parallélogramme et E et F les points tels que $\overrightarrow{AF} = 3\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DE} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{DA}$.

Répondre par vrai ou faux, en justifiant votre réponse.

a) Les points A, D et E sont alignés.

b) Les vecteurs $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{BF}$ sont colinéaires.

c) Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ne sont pas colinéaires.

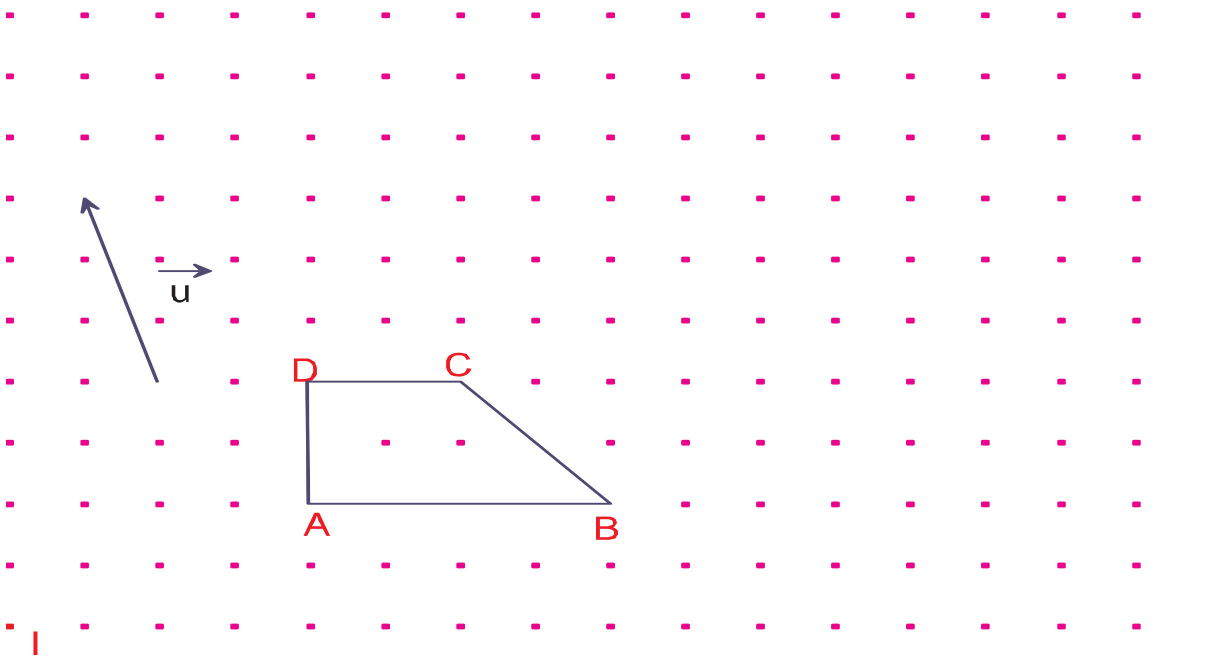
d) Les vecteurs $2\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires.

e) Les vecteurs $\overrightarrow{EC}$ et $\overrightarrow{EF}$ sont colinéaires.

f) Les points E, C et F sont alignés.

Activité 1

Dans la figure ci-dessous, ABCD est un trapèze rectangle en A, I est un point du plan et $\vec{u}$ est un vecteur.



1) a) Recopier la figure.

b) Construire les points A_1, B_1, C_1 et D_1 images respectives des sommets A, B, C et D du trapèze par la translation de vecteur $\vec{u}$.

c) Construire les points A', B', C' et D' tels que :

• $\overrightarrow{IA'} = 2\overrightarrow{IA}$; • $\overrightarrow{IB'} = 2\overrightarrow{IB}$; • $\overrightarrow{IC'} = 2\overrightarrow{IC}$; • $\overrightarrow{ID'} = 2\overrightarrow{ID}$.

2) Observer la figure et répondre aux questions ci-dessous.

a) Comparer les longueurs des côtés de
- ABCD et $A_1 B_1 C_1 D_1$;
- ABCD et A'B'C'D'.

b) Comparer le périmètre de ABCD et ceux de A'B'C'D' et $A_1B_1C_1D_1$.

c) Comparer l'aire de ABCD et celles de A'B'C'D' et $A_1B_1C_1D_1$.

d) Que peut-on dire
- des droites (AB), (A'B') et (A_1B_1) ?
- des droites (AD), (A'D') et (A_1D_1) ?

Activité 2

Soient O, A, B et C quatre points distincts du plan.

a) Construire les points A', B' et C' tels que :

• $\overrightarrow{OA'} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}$; • $\overrightarrow{OB'} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$; • $\overrightarrow{OC'} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{OC}$.

b) Justifier chacune des affirmations suivantes

- Les points O, A et A' sont alignés.
- Les points O, B et B' sont alignés.
- Les points O, C et C' sont alignés.
- Les droites (BC) et (B'C') sont parallèles.
- $A'C' = \frac{1}{2} AC$

Définition

Soit I un point et k un réel non nul. L'application qui à tout point M du plan associe l'unique point M' tel que $\overrightarrow{IM'} = k\overrightarrow{IM}$, est appelée homothétie de centre I et de rapport k. Elle est notée $h_{(I,\, k)}$.

On a ainsi $h_{(I,\, k)}(M) = M'$ équivaut à $\overrightarrow{IM'} = k\overrightarrow{IM}$.

M' est appelé l'image du point M par l'homothétie $h_{(I,\, k)}$.

M est appelé antécédent de M' par l'homothétie $h_{(I,\, k)}$.

Conséquences

- Un point et son image sont alignés avec le centre de l'homothétie.
- $h_{(I,\, k)}(I) = I$. On dit que I est un point invariant par h.
- $h_{(I,\, k)}(M) = M'$ équivaut à $\overrightarrow{IM'} = k\overrightarrow{IM}$

  équivaut à $\overrightarrow{IM} = \frac{1}{k}\overrightarrow{IM'}$

Tout point du plan admet un unique antécédent par une homothétie.

Activité 3 Construction de l'image d'un point par une homothétie

Soient I et A deux points distincts.

Construire dans chacun des cas suivants le point A' tel que

a) $A' = h_{(I\,,\,3)}(A)$. b) $A' = h_{\left(I,\frac{1}{2}\right)}(A)$ c) $A' = h_{(I,-2)}(A)$.

Activité 4

Dans cette activité, on se propose de construire le centre d'une homothétie connaissant son rapport, un point et son image.

Soit A un point du plan et soit B son image par l'homothétie h de centre I et de rapport $\frac{2}{3}$.

a) Montrer que I est le barycentre des points A et B affectés de cœfficients – 2 et 3.

b) Construire le centre I.

Activité 5

Soient A et B deux points distincts du plan et soit I le barycentre de (A, 1) et (B, 4).

Soit M un point du plan et M' le point défini par $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MA} + 4\overrightarrow{MB}$.

Reconnaître l'application f du plan qui associe au point M le point M'.

Assimiler : 1-2-3-4

Activité 6 Propriété caractéristique

Soit h une homothétie de centre I et de rapport k et soient M et N deux points du plan.

On note M' = h(M) et N' = h(N).

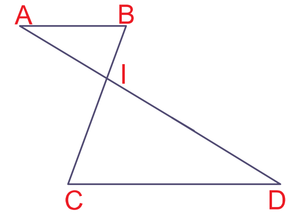
Exprimer $\overrightarrow{M'N'}$ en fonction de $\overrightarrow{MN}$.

Conséquences

Si A' et B' sont les images respectives de deux points distincts A et B par une homothétie de rapport k alors :

- La droite (AB) est parallèle à la droite (A'B') ;
- $A'B' = |k| AB$.

Activité 7



Dans la figure ci-contre, ID = 2 IA et (AB) // (CD).

a) Montrer que D et C sont les images respectives des points A et B par une homothétie dont on précisera le centre et le rapport.

b) Montrer que C et D sont les images respectives des points A et B par une homothétie dont on précisera le centre et le rapport.

Activité 8 Conservation de l'alignement

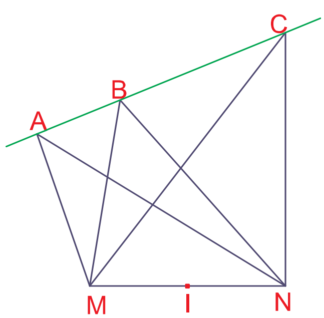
Soit h une homothétie de centre I et de rapport k.

Soient A, B et C trois points alignés et A', B' et C' leurs images respectives par h.

Montrer que les points A', B' et C' sont alignés.

Assimiler : 5-6

Activité 9



Dans la figure ci-contre, AMN, BMN et CMN sont des triangles tels que A, B et C soient alignés. On note I le milieu de [MN].

On désigne par A', B' et C' les centres de gravité respectifs de ces triangles.

a) Reproduire la figure et construire les points A', B' et C'.

b) Montrer que A' est l'image de A par l'homothétie de centre I et de rapport $\frac{1}{3}$.

c) Montrer que A', B' et C' sont alignés.

Activité 10 Image d'une droite - Image d'un segment

Soit h une homothétie de centre I et de rapport k.

Soient A et B deux points distincts du plan. On désigne par A' et B' leurs images respectives par h.

1) a) Soit M un point du plan et M' son image par h.
   Traduire par une égalité vectorielle l'affirmation : " M appartient à la droite (AB) ".
   Montrer que si M appartient à la droite (AB) alors M' appartient à la droite (A'B').
   b) Soit N' un point de (A'B') et N son antécédent par h.
   Montrer que N appartient à la droite (AB).
   c) Que peut-on conclure?
   d) Quelle est la position relative des droites (AB) et (A'B') ?

2) Montrer que l'image du segment [AB] par h est le segment [A'B'].

Activité 11

Soit (D) une droite et I un point.

Construire l'image de la droite (D) par l'homothétie de centre I et de rapport 2.

Activité 12

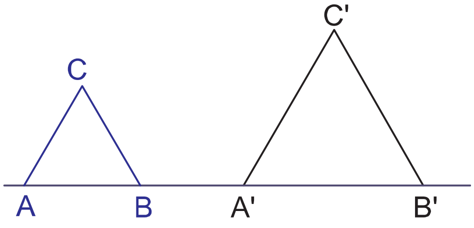
1) Soient O, A et A' trois points alignés.
Justifier l'existence d'une seule homothétie h de centre O qui transforme A en A'.

2) Dans la figure ci-contre, A' est l'image de A par une homothétie h de centre O.

Soit M un point du plan et soit M' son image par h.
   a) Construire M' lorsque le point M n'appartenant pas à la droite (OA).
   b) Construire M' lorsque le point M appartient à la droite (OA).

Activité 13

Dans la figure ci-contre, ABC et A'B'C' sont deux triangles équilatéraux tels que A' et B' soient les images respectives de A et B par une homothétie h.



a) Reproduire la figure.
Montrer que la droite (AC) est parallèle à la droite (A'C').

b) Prouver alors que h(C) = C'.

c) Construire le centre Ω de l'homothétie h.

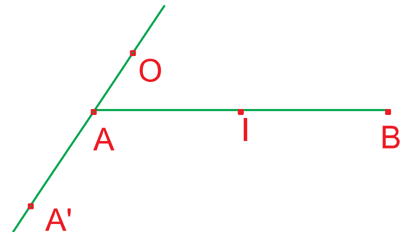
Assimiler : 7-8

Activité 14 Conservation du milieu

1) Dans la figure ci contre, I est le milieu du segment [AB], A' est l'image de A par une homothétie de centre O.

a) Recopier la figure et construire les points I' et B' images respectives de I et B par cette homothétie.

b) Que représente I' pour le segment [A'B'] ?



2) Soit h une homothétie de rapport k.
Soit [MN] un segment et P son milieu.
On désigne par M', N' et P'les images respectives de M, N et P par h.
Montrer que P' est le milieu de [M'N'].

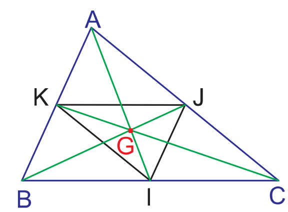
Assimiler : 9

Activité 15 Conservation du barycentre

Soit h une homothétie de rapport k.
1) Soient α et β deux réels tels que $\alpha + \beta \neq 0$.
Soient M et N deux points du plan. On désigne par M' et N' leurs images respectives par h.
Soit P le barycentre des points (M', α) et (N, β) et P' l'image de P par h.
Montrer que P' est le barycentre des points (M , α) et (N', β).
2) Soient A, B et C trois points du plan et G le barycentre des points (A, 2) ; (B, – 1) et (C, 3).
On désigne par A', B', C' et G' les images respectives de A, B, C et G par h.
Montrer que G' est le barycentre des points (A', 2) ; (B', – 1) et (C', 3).

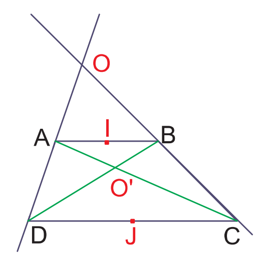
Activité 16

Soit ABC un triangle et G son centre de gravité.
Montrer que les triangles ABC et IJK ont le même centre de gravité.

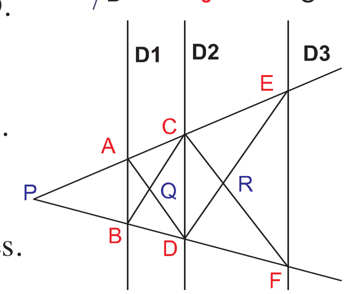


Activité 17 Configuration du trapèze

Dans la figure ci-contre,
ABCD est un trapèze de bases [AB] et [CD],
I est le milieu de [AB] et J est le milieu de [CD],
O est le point d'intersection des droites (AD) et (BC)
et O'est le point d'intersection des droites (AC) et (BD).



1) On note h_1 l'homothétie de centre O et qui transforme A en D.
   a) Montrer que h_1 transforme B en C.
   b) En déduire que les points O, I et J sont alignés.
2) On note h_2 l'homothétie de centre O' et qui transforme A en C.
   a) Montrer que h_2 transforme B en D
   b) Montrer que les points O, I, O' et J sont alignés.
3) Dans la figure ci-contre, les droites D_1, D_2 et D_3 sont parallèles.
Montrer que les points P, Q et R sont alignés.



Activité 18 Problème de construction

Soient D et Δ deux droites sécantes.

1) Soit I un point n'appartenant ni à D ni à Δ.

a) Construire la droite D' image de D par l'homothétie h de centre I et de rapport 2.
On désigne par M' le point d'intersection des droites D' et Δ.

b) Construire le point M antécédent du point M' par h.

2) Construire un point A de D et un point B de Δ tels que $\overrightarrow{IB} = 3\overrightarrow{IA}$.

Activité 19

1) Soient D et Δ deux droites strictement parallèles et I un point n'appartenant ni à D ni à Δ.
Une droite D' passant par I, coupe D et Δ respectivement en M et M'.
Soit h l'homothétie de centre I et telle que h(M) = M'. Déterminer hD.

2) Soit ABCD un parallélogramme et soit O un point de la droite (AC), distinct de A et de C.
Montrer qu'il existe une seule homothétie de centre O qui transforme la droite (AB) en (CD) et la droite (AD) en (BC).

Activité 20 Problème d'alignement

Soient $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ deux cercles de centres respectifs O et O', sécants en A et B. Soit I le point d'intersection de (AB) et (OO').

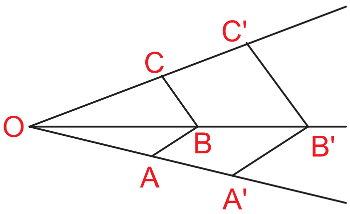
1) Montrer que le point I est le milieu du segment [OO'].

2) La droite (AO) recoupe le cercle $\mathscr{C}$ en E et la droite (AO') recoupe le cercle $\mathscr{C}'$ en F.
Montrer que les points E, B et F sont alignés

3) La droite (BO) recoupe le cercle $\mathscr{C}$ en G et la droite (BO') recoupe le cercle $\mathscr{C}'$ en H.
Montrer que le quadrilatère EFGH est un rectangle.

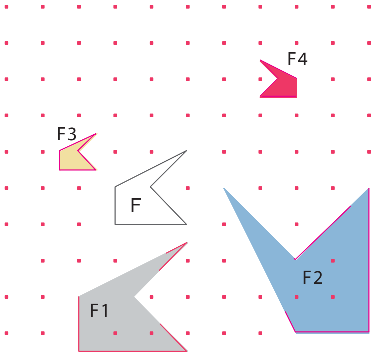
Activité 21

Dans la figure ci-contre, (AB) // (A'B') et (BC) // (B'C').
Quelles sont les positions relatives des droites (AC) et (A'C') ?



Activité 22 Agrandissement – réduction – figures homothétiques

Chacune des figures F_1, F_2, F_3 et F_4 est un agrandissement ou une réduction de la figure F.
Dire pour chacune d'elles, si elle est ou non l'image de F par une homothétie.



Définition

Deux figures sont dites homothétiques, si l'une est l'image de l'autre par une homothétie.

Activité 23 Conservation des angles

Soit h une homothétie de centre O et de rapport k.

Soit ABC un triangle.

1) Construire le triangle A'B'C', image de ABC par h.

2) a) Construire le triangle A' B'' C'', image de ABC par la translation de vecteur $\overrightarrow{AA'}$.

b) Montrer que les triangle ABC et A'B''C'' sont isométriques.

3) Déduire que $\widehat{BAC} = \widehat{B'A'C'}$.

Que peut on conclure ?

Activité 24 Conservation du parallélisme et de l'orthogonalité

Soit h une homothétie de centre I et de rapport k.

Soient D et Δ deux droites et soient D' et Δ' leurs images respectives par h.

Que peut-on dire de D' et Δ' dans chacun des cas suivants

a) D et Δ sont parallèles ?

b) D et Δ sont perpendiculaires ?

Activité 25 Image d'un cercle

1) Soit ω et I deux points distincts du plan et soit f l'homothétie de centre I et de rapport $-\frac{1}{2}$.

a) Tracer un cercle Γ de centre ω. On note r son rayon.

b) Placer trois points A, B et C sur le cercle Γ.

c) Construire les points A' , B' , C' et ω' images respectives des points A, B, C et ω par f.

d) Vérifier que les points A', B' et C' sont situés sur un même cercle Γ' de centre ω'.

Exprimer le rayon de Γ' en fonction de r.

2) Soit h une homothétie de rapport k et $\mathscr{C}$ un cercle de centre O et de rayon R.

Soit M un point de $\mathscr{C}$.

On désigne par M' et O' les images respectives de M et O par h et par $\mathscr{C}'$ le cercle de centre O' et de rayon R' = $|k|$ R.

a) Montrer que M' $\in \mathscr{C}'$.

b) Soit N' $\in \mathscr{C}'$ et soit N son antécédent par h. Montrer que N appartient à $\mathscr{C}$.

c) Que peut on conclure ?

Activité 26 Conservation du contact

Soit h une homothétie de centre I et de rapport k.
Soit $\mathscr{C}$ un cercle de centre O et de rayon r et D une tangente à ce cercle en un point A.
On désigne par A', $\mathscr{C}'$ et D' les images respectives du point A, du cercle $\mathscr{C}$ et de la droite D par h.
Montrer que la droite D' est tangente au cercle $\mathscr{C}'$ au point A'.

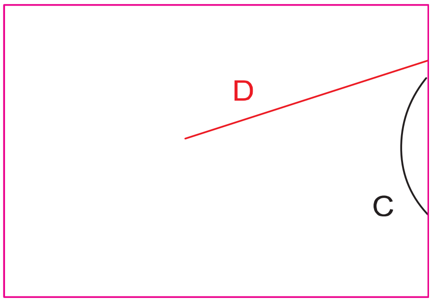
Assimiler : 10-11-12

Activité 27 Cercles homothétiques – Tangentes communes à deux cercles

1) Soient $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ deux cercles de centres respectifs O et O' et de rayons respectifs R et R' tels que R ≠ R'.
  a) Montrer qu'il existe une seule homothétie de rapport positif qui transforme $\mathscr{C}$ en $\mathscr{C}'$. Préciser le rapport de cette homothétie et construire son centre I.
  b) Montrer qu'il existe une seule homothétie de rapport négatif qui transforme $\mathscr{C}$ en $\mathscr{C}'$. Préciser le rapport de cette homothétie et construire son centre J.
2) Soient $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ deux cercles extérieurs et non isométriques.
Construire les tangentes communes à ces deux cercles.

Activité 28

La droite D est-elle tangente au cercle $\mathscr{C}$ dont on n'aperçoit qu'un arc dans la figure ci-contre?
Tous les tracés doivent être à l'intérieur du rectangle.



Activité 29 Cercles tangents à un cercle et à une droite donnés

Soient Γ un cercle, D une droite et A un point de D n'appartenant pas à Γ.
On désigne par [BC] un diamètre du cercle Γ tel que (BC) soit perpendiculaire à la droite (D) et par D' la tangente au cercle Γ en B.
La droite (AB) recoupe le cercle Γ en I.
  a) Soit h l'homothétie de centre I et qui transforme B en A.
  On désigne par Γ' l'image du cercle Γ par l'homothétie h.
  Montrer que Γ' est tangent à Γ en I et à la droite D en A.
  b) Soit M un point quelconque de D n'appartenant pas à Γ et distinct de A.
  Construire tous les cercles tangents à Γ et à D en M.

Activité 30 Homothétie et mesure de grandeurs géométriques

Soit h une l'homothétie de rapport k.
Soit ABC un triangle et soient A'= h(A), B'= h(B) et C'= h(C).
1) a) Faire une figure
  b) Comparer le périmètre du triangle A'B'C' à celui de ABC.

2) On note H le pied de la hauteur du triangle ABC issue de A et H' le pied de la hauteur du triangle A'B'C' issue de A'.

a) Montrer que H' est l'image de H par f.

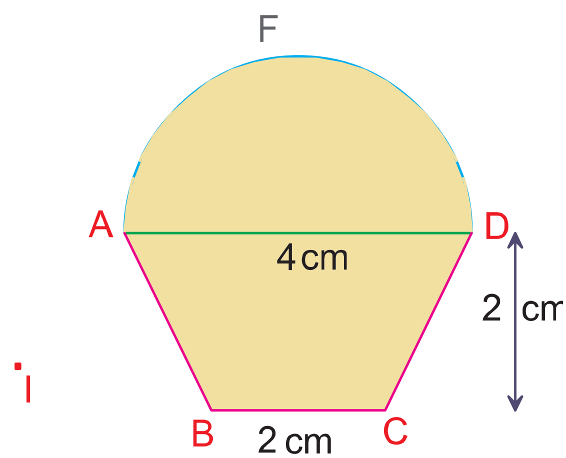
b) Soient a et a' les aires respectives des triangles ABC et A'B'C'. Montrer que $a' = k^2 a$.

Activité 31

Soit $\mathscr{C}$ un cercle de centre I et de rayon R.
Soit h une homothétie de rapport k.
On note $\mathscr{C}'$ l'image de $\mathscr{C}$ par h.
a) Comparer le périmètre de $\mathscr{C}$ et le périmètre de $\mathscr{C}'$.
b) Comparer l'aire de $\mathscr{C}$ et l'aire de $\mathscr{C}'$.

Activité 32

1) a) Reproduire la figure ci-contre.
   b) Construire F', image de la figure F par l'homothétie de centre I et de rapport –1,5.
2) a) Calculer les périmètres p et p' de F et F'.
   b) Calculer $\frac{p'}{p}$.
3) a) Calculer les aires s et s' de F et F'.
   b) Calculer $\frac{s'}{s}$.



Activité 33 Droite d'Euler – Cercle d'Euler

On donne un triangle ABC et on désigne par O le centre du cercle circonscrit, G le centre de gravité et H l'orthocentre du triangle ABC.
Soient A', B'et C' les milieux respectifs de [BC], [AC] et [AB].
On désigne par h l'homothétie de centre G et de rapport $-\frac{1}{2}$.
1) a) Faire une figure.
   b) Montrer que l'image de la hauteur (AH) par l'homothétie h est la médiatrice de [BC].
   c) Préciser les images par h des hauteurs (BH) et (CH).
2) Montrer que les points O, G et H sont alignés et que $\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG}$
(La droite qui contient les points O, G et H s'appelle la droite d'Euler du triangle ABC)
3) Soit Ω le centre du cercle circonscrit à A'B'C'. Montrer que Ω appartient à la droite (OG) et qu'il est le milieu de [OH]. Calculer le rayon r de ce cercle en fonction du rayon R du cercle circonscrit à ABC.
(Le cercle circonscrit à A'B'C' est appelé cercle d'Euler du triangle ABC).

Problème de lieu

Soit $\mathscr{C}$ un cercle de centre O et A un point n'appartenant pas à $\mathscr{C}$.
Soit M un point du cercle $\mathscr{C}$, et soit I le barycentre des points (A, 2) et (M, 3).
Déterminer le lieu du point I lorsque le point M décrit le cercle $\mathscr{C}$.

Problème de lieu

Soit $\mathscr{C}$ un cercle de diamètre [AB] et S un point de (AB). M étant un point de $\mathscr{C}$, on trace le diamètre [PM], puis le point M' intersection des droites (SM) et (AP).
1) Soit h l'homothétie de centre S qui transforme B en A.
Déterminer l'image par h de la droite (BM).
2) Déterminer et construire le lieu du point M' lorsque M décrit le cercle $\mathscr{C}$?

Problème de lieu

Soit $\mathscr{C}$ un cercle de centre O et [AB] une corde de ce cercle.
Soit M un point variable sur le cercle $\mathscr{C}$ et N le point défini par $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AB}$.
1) Déterminer le lieu du point N lorsque M décrit le cercle $\mathscr{C}$.
2) Soit I le milieu de [AN]. Quel est le lieu du point I lorsque M décrit le cercle $\mathscr{C}$?
3) Soit G le centre de gravité du triangle BMN.
Déterminer le lieu du point G lorsque M décrit le cercle $\mathscr{C}$.

1 Traduire par une égalité vectorielle chacun des énoncés suivants

a) $h_{(I,-2)}(A) = B$

b) Le point C est l'image du point D par l'homothétie de centre A et de rapport $\frac{3}{4}$

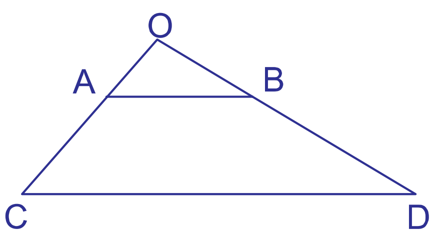
c) L'image de E par l'homothétie de centre A et de rapport $-\frac{1}{3}$ est F

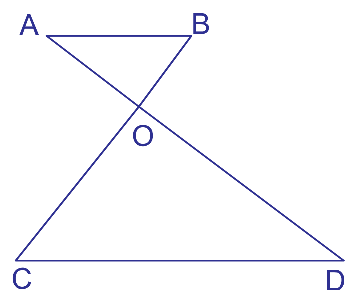
d) Le point Q est l'antécédent du point P par l'homothétie $h_{(I,\sqrt{2})}$.

2 Donner une interprétation des égalités vectorielles suivantes au moyen d'une homothétie.

a) $\overrightarrow{MD} = -\frac{5}{2}\overrightarrow{MN}$; b) $\frac{7}{4}\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PR}$.

3 Dans les deux figures ci-dessous, les droites (AB) et (CD) sont parallèles et CD = 3 AB.
Trouver dans chaque cas le centre et le rapport de l'homothétie qui transforme A en C et B en D.





4 Soient A et B deux points du plan.
Construire le centre I de l'homothétie qui transforme A en B et qui a pour rapport

a) $k = 2$ b) $k = -4$.

Propriété caractéristique

5 Soit ABC un triangle. On désigne par h l'homothétie de centre A et de rapport $\frac{1}{3}$.
On note I = h(B) et J le point vérifiant $\overrightarrow{AJ} = 3\overrightarrow{AC}$.
Montrer que les droites (IC) et (BJ) sont parallèles et que $IC = \frac{1}{3}BJ$.

6 Dans la figure ci-contre, les triangles ABC et IJB sont rectangles et isocèles.
Déterminer les images de J et de B par l'homothétie de centre O qui transforme I en B.

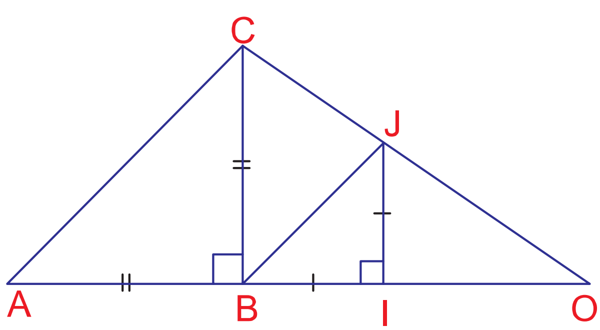
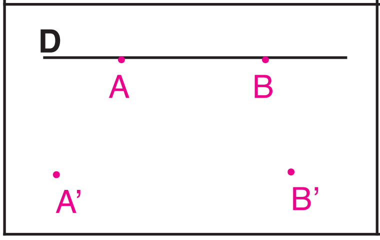
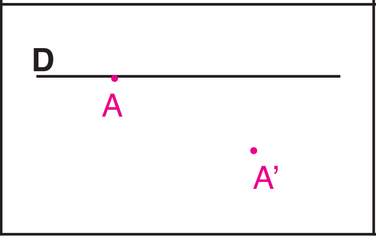
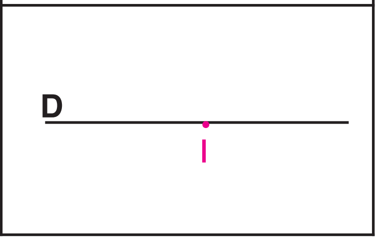


Image d'une droite

7 Préciser dans chaque cas l'image de la droite (D) par l'homothétie h.

1er cas h (A) = A' et h (B) = B'	**2ème cas** h (A) = A'	**3ème cas** h(I) = I
		

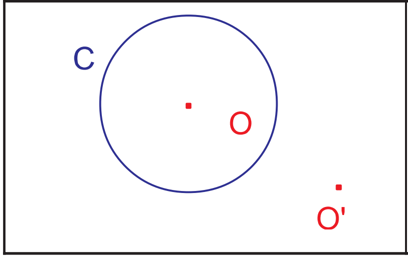
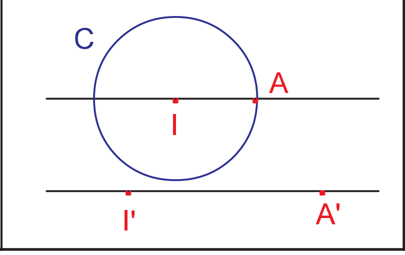
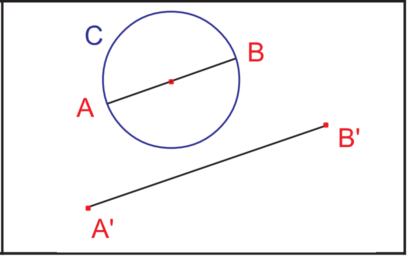
8 Soit ABCD un parallélogramme et h est une homothétie qui transforme la droite (AB) en (CD) et (AD) en (BC).Quelle est l'image de A par h ?

Conservation du milieu

9 Soit ABCD un parallélogramme de centre O. On désigne par A', B', C', D' et O' les images respectives de A, B, C, D et O par une homothétie h.
Quelle est la nature du quadrilatère A' B' C' D' ?

Image d'un cercle

10 Pour chacune des situations ci-dessous, recopier la figure et construire l'image du cercle donné par l'homothétie indiquée.

Situation 1 f est l'homothétie de rapport – 0,5 et telle que f(O) = O'	**Situation 2** g est l'homothétie telle que g(I) = I' et g(A) = A'	**Situation 3** h est l'homothétie telle que h(A) = A' et h(B) = B'
		

Construire l'image du cercle $\mathscr{C}$ par l'homothétie de centre A et qui transforme O en B.

11 Soient $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ deux cercles de centres respectifs I et J tangents en un point T.
Soit h l'homothétie de centre T qui transforme I en J.
Montrer que h transforme $\mathscr{C}_1$ en $\mathscr{C}_2$.

12 Soit $\mathscr{C}$ un cercle et O son centre.
Tracer un diamètre [AB] de ce cercle.
Construire l'image du cercle $\mathscr{C}$ par l'homothétie de centre A et qui transforme O en B.

Homothétie

- Soit h une homothétie de centre O et de rapport k.

Soient M et M' deux points du plan.

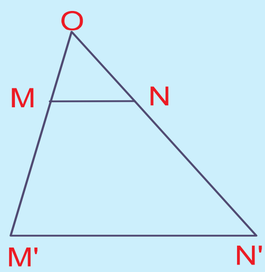
M' est l'image de M par h équivaut à $\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}$.

Propriété caractéristique

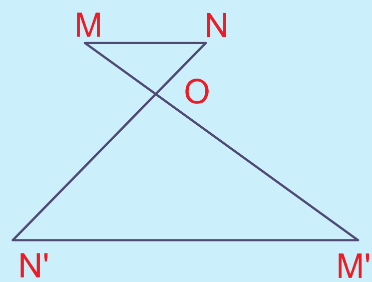
- Soit h une homothétie de centre O et de rapport k.

Soient M et N deux points du plan et M' et N' leurs images respectives par h, on a

$\overrightarrow{M'N'} = k\overrightarrow{MN}$.



k >0



k < 0

Conséquence

- (MN) // (M'N') et M'N' = | k | MN

Image de figures usuelles

- L'image d'une droite par une homothétie est une droite qui lui est parallèle.
- L'image d'un segment par une homothétie est un segment.
- L'image d'un cercle de centre I et de rayon R par une homothétie h de rapport k, est le cercle de centre I' = h(I) et de rayon R' = | k | R.
- L'image d'un polygone de périmètre p et d'aire a par une homothétie est un polygone de périmètre | k | p et d'aire k^2 a.

Une homothétie conserve :

- l'alignement
- le milieu
- le barycentre
- les angles
- le parallélisme
- l'orthogonalité
- le contact

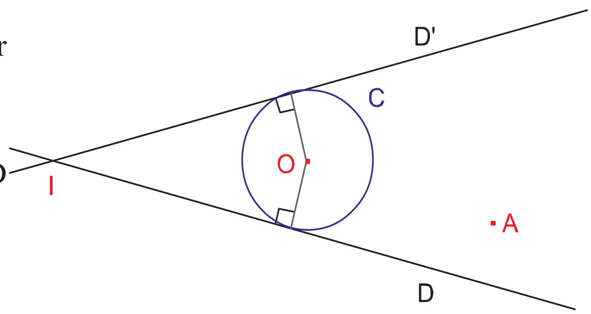
Problème de lieu

1 Soit $\mathscr{C}$ un cercle de centre O et de diamètre [AB].
Soit G le barycentre des points (A, 3) et (B, -2).
1) Construire le point G.
2) Soit M un point de $\mathscr{C}$, distinct de A et de B, et N le point diamétralement opposé à M.
a) Quelle est la nature du quadrilatère AMBN ?
b) Les droites (BN) et (GM) se coupent en un point M'.
Déterminer et construire le lieu du point M' lorsque M décrit le cercle $\mathscr{C}$ privé des points A et B.

Indication
Penser à une homothétie de centre G.

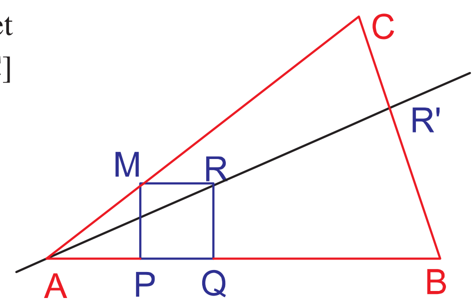
Problèmes de construction

2 Soient D et D' deux droites sécantes et I leur point d'intersection.
A un point n'appartenant ni à D ni à D'.
Construire un cercle passant par A et tangent à D et à D'.



Indication
Commencer par construire un cercle $\mathscr{C}$ tangent à D et à D'.
Penser à une homothétie qui transforme le cercle $\mathscr{C}$ en un cercle passant par A et tangent aux deux droites.
Combien y a t-il de cercles solutions?

3 1) Dans la figure ci-contre, ABC est un triangle et MPQR est un carré tel que le point M soit sur le côté [AC] et les points P et Q sur le côté [AB].
Les droites (AR) et (BC) se coupent au point R'.
Soit h l'homothétie de centre A qui transforme R en R'.
a) Construire l'image M'P'Q'R' de MPQR par h.
b) Montrer que M'P'Q'R' est un carré.
2) Soit IJK un triangle.
Construire un carré inscrit dans ce triangle.



Indications
Commencer par construire un carré dont trois sommets sont sur les côtés du triangle IJK.
S'inspirer de la première question.

1 Problème de construction

Soient D et D’ deux droites sécantes, A et G deux points distincts qui n'appartiennent ni à D ni à D’.

Il s'agit de construire un triangle de sommet A et de centre de gravité G et dont les deux autres sommets B et C appartiennent respectivement à D et à D’.

A l’aide d’un logiciel de géométrie

- Tracer deux droites sécantes D et D’ et placer deux points A et G n’appartenant ni à D ni à D’.
- Construire le point A’ milieu du côté [BC], du triangle cherché (utiliser une homothétie de centre G).
- Soit B un point de la droite D **(point sur objet)**. Construire le point C, dans ce cas.
- Quel est le **lieu** du point C lorsque B varie sur la droite D ?
- Construire alors, un triangle ABC tel que les sommets B et C soient respectivement sur D et sur D’.

Justifier la construction.

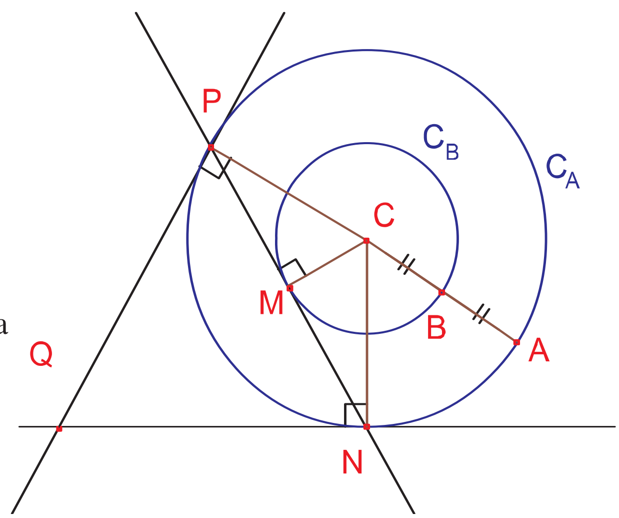
2 Problème de lieu

Soient A et C deux points distincts et B le milieu de [AC]. On construit les cercles C_A et C_B de centre C, passant respectivement par A et B.

Soit M un point du cercle C_B. La tangente au cercle C_B en M coupe le cercle C_A en deux points N et P.

Les tangentes au cercle CA en N et P sont sécantes au point Q.

On se propose de déterminer, à l’aide d’un logiciel de géométrie, le lieu du point Q lorsque M varie sur C.



1) Pour réaliser la figure ci contre, construire

- Un segment [AC].
- Le milieu B du segment [AC].
- Les cercles C_A et C_B.
- Un point M sur le cercle C_B.
- Le segment [CM].
- La perpendiculaire à [CM] en M.
- Les points d’intersections N et P de C_A et la tangente à C_A en M.
- Les segment [CP] et [CN].
- La perpendiculaire à [CP] en P.
- La perpendiculaire à [CN] en N.
- Le point Q.

2) Déplacer M sur C_B

a) Observer la position des points C, M et Q. Démontrer.

b) Mesurer les distances CQ et CM. À l'aide de la calculatrice du logiciel, évaluer CQ/CM. Démontrer.

c) Observer la trace du point Q. Démontrer.

Appliquer

1 Soit A un point du plan.
Dans chacun des cas suivants, montrer que l'application qui à tout point M du plan associe le point M', est une homothétie dont on précisera le centre et le rapport :
a) M' est le barycentre des points pondérés (A, 2) et (M, 3).
b) $\overrightarrow{MM'} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AM}$.

2 Soient ABC est un triangle, E est l'image de A par la translation de vecteur $\frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$ et F est le barycentre des points pondérés (A, 4) et (C,1).
a) Faire une figure.
b) Montrer que F est l'image de E par une homothétie de centre B et dont on précisera le rapport.

3 Soient D et D' deux droites parallèles. Une droite Δ coupe D en A et D' en A'.
a) Déterminer et construire le centre O de l'homothétie h de rapport $\frac{5}{3}$ qui transforme A en A'.
b) Une droite Δ' passe par O et coupe D en B et D' en B', démontrer que h(B) = B'.

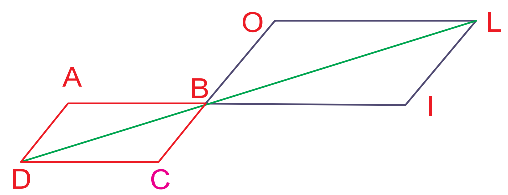
4 On considère une homothétie h de centre O et rapport 3. Soit M un point du plan et soit M' son image par h.
a) Exprimer $\overrightarrow{MM'}$ en fonction de $\overrightarrow{OM}$.
b) Déterminer l'ensemble des points M tels que MM' = 8.

5 Soient ABC un triangle et G son centre de gravité. On considère l'application f du plan qui à tout point M on associe le point M' défini par $4\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$
a) Construire f (A) et f (B).
b) Montrer que f admet un seul point invariant.
c) Déduire la nature de f.

6 Soient ABC est un triangle et I un point du segment [BC].
soit h l'homothétie de centre I et de rapport $\frac{2}{3}$
a) Construire P = h(B)
b) La parallèle à (AB) issue de P coupe [AI] en Q.
La parallèle à (AC) issue de Q coupe [BC] en R.
Montrer que h(C) = R.
c) Lorsque I est le milieu du segment [BC], quel est le milieu du segment [PR] ?

7 Soit ABC un triangle. On considère l'application h, qui à tout point M associe le point M', barycentre des points pondérés (A,1), (B,–2) et (M,3).
a) Construire les points A', B' et C' images respectives des points A, B et C par cette application.
b) Montrer que h est une homothétie dont on déterminera le centre et le rapport.
c) Retrouver le centre et le rapport de cette homothétie a partir de la construction faite en a).

8 Dans la figure ci-dessous, BILO et ABCD sont deux parallélogrammes.



Montrer que les droites (AC) et (OI) sont parallèles.

9 Soit ABC un triangle. La parallèle à (BC) passant par un point M de [AB] coupe [AC] en N.
a) Comment faut-il choisir M pour que le périmètre du triangle AMN soit le tiers de celui de ABC ?
b) Comment faut-il choisir M pour que l'aire du triangle AMN soit le quart de celle de ABC ?

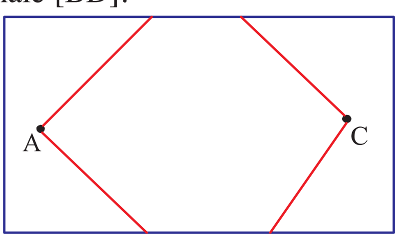
10 Soient D une droite et A un point n'appartenant pas à D.
Soit M un point de D. On désigne par M' le symétrique de A par rapport à M.
Déterminer le lieu des points M' lorsque le point M varie sur D.

Maîtriser

11 Soit AIJ un triangle inscrit dans un cercle $\mathscr{C}$ de centre O.
Soient B et C les symétriques de A par rapport à I et J respectivement. On désigne par M le milieu de [IJ] , par D le point diamétralement opposé à A et par N le projeté orthogonal de D sur (BC).
Soit h l'homothétie de centre A et de rapport 2.
1) Déterminer les images par h des points I,J et O.
2) Quelle est l'image par h de (IJ)? De (OM)?
3) Montrer que A, M et N sont alignés.

12 Soient C_1 et C_2 deux cercles non isométriques de centres respectifs I et J.
Soient [IM] et [JN] deux rayons parallèles de C_1 et C_2 respectivement. La droite (MN) coupe (IJ) en O.
Soit h l'homothétie de centre O qui transforme I en J
1) Montrer que h transforme M en N.
2) Montrer que h transforme (C_1) en (C_2).

13 Les sommets B et D du quadrilatère ABCD sont situés en dehors de la feuille.
Trouver un procédé pour construire la diagonale [BD].



14 Soit $\mathscr{C}$ un cercle de diamètre [AB] et de centre O. Soit I un point de (AB) et M un point de $\mathscr{C}$ privé de A et B. On note N le symétrique de M par rapport à O et M' l'intersection des droites (IM) et (NB). Construire le lieu des points M' lorsque M varie sur $\mathscr{C}$.

15 ABCD est un trapèze de bases [AB] et [DC]. Les droites (AD) et (BC) se coupent en un point E.
Soit F un point intérieur au triangle ABE.
La parallèle à (AF) passant par D et la parallèle à (BF) passant par C se coupent en un point G.
On considère l'homothétie h de centre E qui transforme A en D.
a) Quelle est l'image de la droite (AF) ?
b) Montrer que h(B) = C.
En déduire l'image de la droite (BF).
c) Quelle est l'image de F par h ? En déduire que E, F et G sont alignés.

Math et culture

Le pantographe :

Le pantographe est un instrument comportant un parallélogramme articulé et permettant de reproduire mécaniquement un dessin en agrandissant ou en réduisant les dimensions du modèle.

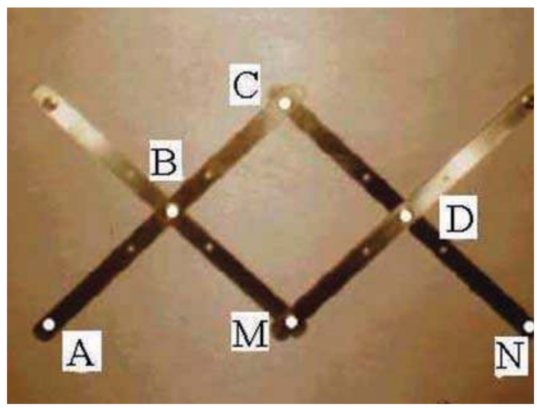
Il fut employé pour la première fois vers la fin du XVI siècle par le peintre Georges DiIlingen.

En 1743 Langlois lui donna à peu près sa forme actuelle.

On a $AC = CN$, *fixé* ,
$AB = CD = BM$,
$ND = MD = BC$

Soit $k = \dfrac{AB}{AC}$

donc k dépend de la position de B sur [AC]



Le pantographe est utilisé en laissant fixe le point A alors que le point N décrit n'importe quel courbe C (pourvue qu'elle ne soit pas trop loin de A) et on observe la courbe décrite par le point M, on obtient alors une réduction de C .

Si M décrit une courbe C' alors N décrit une courbe C" qui est un agrandissement de C'.

chapitre 9

ROTATIONS

Lorsque l'énoncé d'un problème est exactement connu, il est résolu.

ALAIN

Pour démarrer

1 Pour chacune des figures suivantes déterminer les angles x et y.

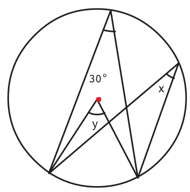


Fig. 1

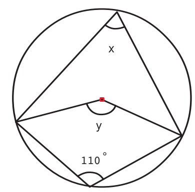
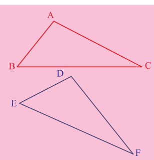


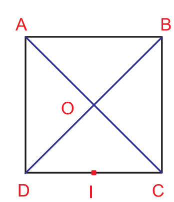
Fig. 2

2 Indiquer parmi les affirmations ci-dessous celles qui sont correctes :

	A	B	C
 Dans ces triangles isométriques	L'homologue du sommet A est le sommet D	L'homologue de l'angle $\widehat{DEF}$ est l'angle $\widehat{ACB}$	L'homologue du côté [AC] est le côté [EF]
Pour que deux triangles soient isométriques il suffit qu'ils aient	Deux côtés respectivement égaux et un angle égal	Un côté égal et deux angles égaux	3 côtés respectivement égaux

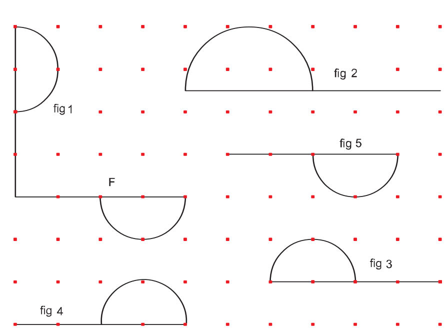
3 Soient A et B deux points distincts. Construire le centre du quart de tour direct qui transforme A en B.

4 ABCD est un carré de centre O. Indiquer parmi les phrases suivantes celles qui sont correctes.



a) D est l'image de A par le quart de tour direct de centre O.
b) B est l'image de C par le quart de tour indirect de centre O.
c) I est l'image de A par le quart de tour indirect de centre D.

5 Quelle application du plan envoie :
a) La figure F sur fig 1 ?
b) La figure F sur fig 2 ?
c) La figure F sur fig 3 ?
d) La figure F sur fig 4 ?
e) La figure F sur fig 5 ?



Mesure d'un angle en radian

Activité 1

Soient $\widehat{xOy}$ un angle de mesure 30° et C un cercle de centre O et de rayon r.
Le cercle C coupe la demi droite [Ox) en A et la demi droite [Oy) en B.
1) Soit D le symétrique de A par rapport à O.

a) Donner la valeur de l'angle $\widehat{AOD}$.
b) Exprimer en fonction de r la longueur de l'arc $[\widehat{AD}]$ du cercle C.

2) On admet que la longueur d'un arc d'un cercle varie proportionnellement à la mesure de l'angle qui l'intercepte.

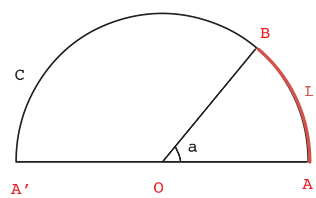
a) Calculer en fonction de r la longueur L de l'arc $[\widehat{AB}]$ intercepté par l'angle $\widehat{xOy}$.
b) Déterminer la valeur du rapport $\frac{L}{r}$.

3) Soit C' un cercle de centre O et de rayon r', r'≠ r.
Le cercle C' coupe la demi droite [Ox) en A' et la demi droite [Oy) en B'.

a) Calculer en fonction de r' la longueur L' de l'arc $[\widehat{A'B'}]$ intercepté par l'angle $\widehat{xOy}$.
b) Comparer $\frac{L}{r}$ et $\frac{L'}{r'}$.

Activité 2

Dans la figure ci-contre C est un demi-cercle de centre O et de rayon r. A et B deux points de C. On note $\alpha = \widehat{AOB}$.
Soit L la longueur de l'arc $[\widehat{AB}]$. Recopier et compléter le tableau suivant :



α	180°	90°	60°	45°	30°	0°
L						
$\frac{L}{r}$						

Vocabulaire

Le rapport $\frac{L}{r}$ est une mesure en radians de l'angle $\widehat{AOB}$.

Exemples

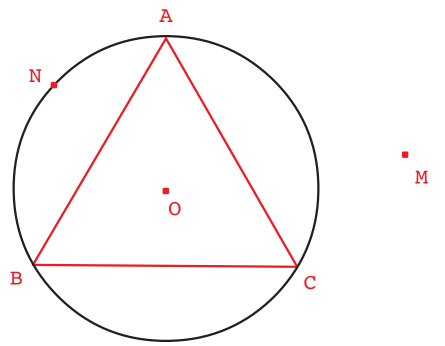
- π radians (π rad) est la mesure en radians de l'angle plat.
  On écrit souvent $\pi, \frac{\pi}{2}$,… au lieu de π rad, $\frac{\pi}{2}$ rad,…
- $\frac{\pi}{2}$ est la mesure en radians de l'angle droit.

Assimiler : 1-2-3

Rotation

Activité 3

Dans la figure ci-contre ABC est un triangle équilatéral et O est le centre de son cercle circonscrit.



1) Recopier et décalquer la figure.

2) Fixer le point O (à l'aide de la pointe d'un stylo, par exemple). Faire tourner le papier calque au tour de O, dans le sens direct (qui est par convention le sens contraire du mouvement des aiguilles d'une montre), de sorte que le point A coïncide avec B.

a) Préciser les nouvelles positions des points B et C.

b) Que se passe t-il pour le point O ?

c) Marquer les points N' et M', nouvelles positions de N et M.

d) Comparer ON et ON', OM et OM'.

e) Que vaut $\widehat{AOB}$, $\widehat{NON'}$ et $\widehat{MOM'}$?

Activité 4

Soient O et M deux points distincts.

1) Construire le cercle C de centre O et de rayon OM.

2) Combien y a-t-il de points M' sur le cercle C tel que $\widehat{MOM'} = \dfrac{\pi}{4}$

3) a) Reprendre la question 2) en remplaçant $\dfrac{\pi}{4}$ par α, où α est un réel appartenant à $]0 , \pi[$.

b) Reprendre la question 2) en remplaçant $\dfrac{\pi}{4}$ par 0 puis par π.

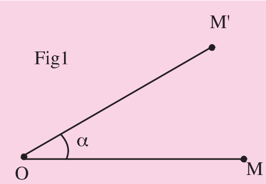
Définition

• Soient O un point du plan et α un réel appartenant à $]0 , \pi[$.
L'application du plan dans le plan, qui laisse invariant le point O et qui à tout point M distinct de O, associe le point M'

tel que $\begin{cases} OM' = OM \\ \widehat{MOM'} = \alpha \end{cases}$ (Voir figure 1) ;

est appelée la rotation directe de centre O et d'angle α.

Fig1



M' est l'image de M par la rotation directe de centre O et d'angle α

• Soient O un point du plan et α un réel appartenant à $]0 , \pi[$.
L'application du plan dans le plan, qui laisse invariant le point O et qui à tout point M distinct de O, associe le point M'

tel que $\begin{cases} OM' = OM \\ \widehat{MOM'} = \alpha \end{cases}$ (Voir figure 2) ;

est appelée la rotation indirecte de centre O et d'angle α.

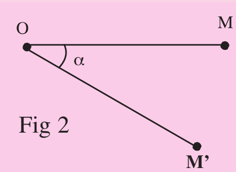


Fig 2

M' est l'image de M par la rotation indirecte de centre O et d'angle α

Remarques

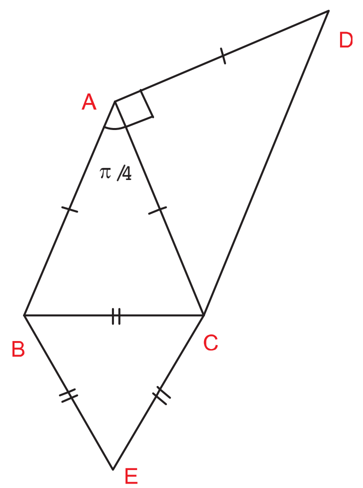
- La rotation directe ou indirecte de centre O et d'angle π est la symétrie centrale de centre O.
- La rotation directe ou indirecte d'angle nul est l'identité du plan.
- Soit r une rotation directe ou indirecte.

Etant donné un point M' du plan , il existe un seul point M tel que r(M) = M'.
M est l'antécédent de M' par r.

Activité 5

Observer la figure puis recopier et compléter le tableau suivant :

L'image du point	par la rotation	de centre	et d'angle	est le point
B	directe	A	$\frac{\pi}{4}$	C
C	indirecte	B	$\frac{\pi}{3}$	
	indirecte	C	$\frac{\pi}{3}$	B
D	indirecte	A		B
C	directe		$\frac{\pi}{2}$	D



Activité 6

Soient A et B deux points distincts du plan.

1) a) Construire le point E, image du point B par la rotation directe de centre A et d'angle $\frac{\pi}{6}$.

b) Construire le point F, image du point A par la rotation directe de centre B et d'angle $\frac{\pi}{6}$.

2) a) Quelle est la position relative des droites (AE) et (BF) ?

b) Quelle est la nature du quadrilatère AEBF ?

Activité 7

Dans la figure ci-contre, ABCD est un rectangle et la droite (IJ) est la médiatrice de [BC].
Observer la figure et nommer

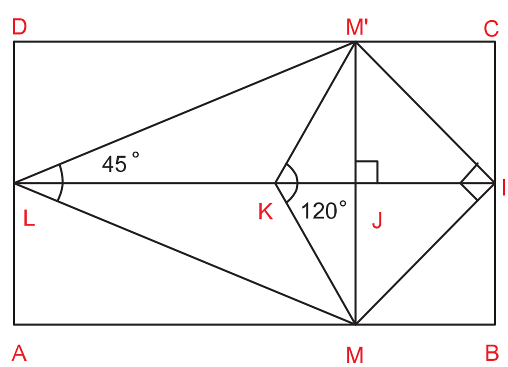
1) a) une translation qui transforme M en M' ?

b) Une symétrie axiale qui transforme M en M' ?

c) Une symétrie centrale qui transforme M en M' ?

2) des rotations qui transforment M en M'.

(On donnera les angles de ces rotations en radians)



Assimiler : 4-5-6-7

Activité 8 Conservation des angles et des distances

Soit r une rotation directe ou indirecte de centre O et d'angle α appartenant à $]0\ ,\pi[$.
Soient M et N deux points distincts et non alignés avec O et soient M' et N' leurs images respectives par r.

a) Comparer $\widehat{MON}$ et $\widehat{M'ON'}$ dans le cas où $\widehat{MON} < \alpha$.

b) Comparer $\widehat{MON}$ et $\widehat{M'ON'}$ dans le cas où $\widehat{MON} \geq \alpha$.

c) Comparer MN et M'N'.

d) Soient A, B et C trois points non alignés. On désigne par A', B' et C' leurs images respectives par r.

Montrer que $\widehat{ABC} = \widehat{A'B'C'}$.

Assimiler : 8

Activité 9 Image d'un segment - Image d'une droite

Soit r une rotation directe de centre O et d'angle α.
Soient A et B deux points distincts du plan. On pose A'= r(A) et B' = r(B).

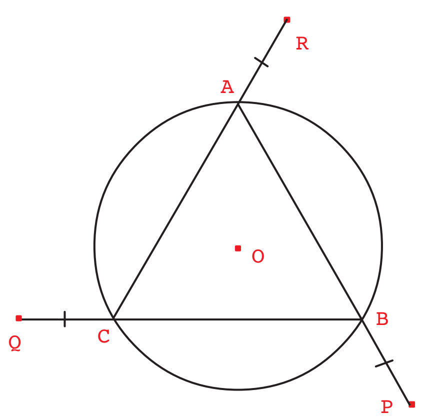
1) Soit M un point du segment [AB] et M' l'image de M par r.
   a) Montrer que $M' \in [A'B']$.
   b) Soit N' un point du segment [A'B'] et soit N son antécédent par la rotation r.
      Montrer que N appartient au segment [AB].
   c) Conclure.
      Ce résultat reste t-il vrai si r est une rotation indirecte ?

2) Montrer que l'image de la droite (AB) par la rotation r est la droite (A'B').

Activité 10

Dans la figure ci-contre, ABC est un triangle équilatéral de centre O, les points P, Q et R sont tels que
BP = CQ = AR.
Soit f la rotation directe de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$.

1) a) Déterminer l'image par f de la droite (AB)
   b) Montrer que f(P) = R.
2) a) Déterminer les images par f des points Q et R.
   b) Comparer les angles $\widehat{POR}$, $\widehat{ROQ}$ et $\widehat{QOP}$.
   c) Quelle est la nature du triangle PQR ?
3) Comparer les aires des triangles APR, BPQ et CQR.



Activité 11 Problème d'alignement

Dans la figure ci-contre, ABCD est un carré, ABI et BCJ sont deux triangles équilatéraux.

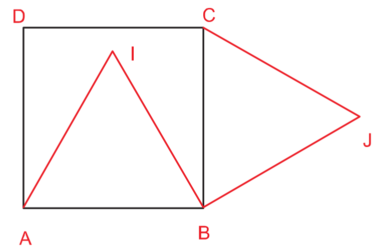
1) a) Construire le point E de sorte que, E et A soient du même côté par rapport à la droite (BD) et le triangle DBE soit équilatéral.

   b) Montrer que les points E, A et C sont alignés.

2) Soit r la rotation directe de centre B et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

   a) Déterminer r(E).

   b) Montrer que les points D, I et J sont alignés.



Activité 12

Dans la figure ci-contre, OAB et OCD sont deux triangles isocèles rectangles en O.

Soient I le milieu de [BD] et r la rotation directe de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

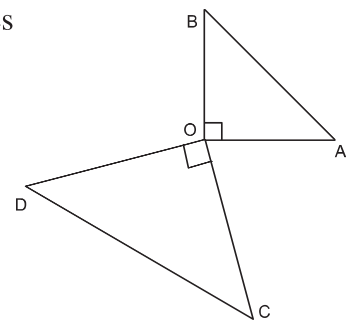
a) Déterminer les images par r des points A et D.

b) On pose r (C) = C'.

Montrer que les droites (AC) et (BC') sont perpendiculaires.

c) Montrer que O est le milieu de [DC'].

En déduire que les droites (OI) et (AC) sont perpendiculaires.



Activité 13 Conservation du milieu - Conservation du barycentre

Soit r une rotation directe ou indirecte de centre O et d'angle α.

1) Soient A et B deux points distincts du plan et I le milieu du segment [AB].

   A', B' et I', désignent les images respectives par r des points A, B et I.

   Montrer que I' est le milieu du segment [A'B'].

2) Soit J le barycentre de (A , 1) et (B , 2) et soit J' son image par r.

   a) Montrer que J' appartient au segment [A'B']

   b) Montrer que J' est le barycentre de (A' , 1) et (B', 2).

3) Soit C un point du plan distinct des points A et B, et soit C' son image par r.

On désigne par G le barycentre de (A , 1) , (B, 2) et (C , 3), et par G' son image par r.

   a) Montrer que G est le milieu de [JC].

   b) Montrer que G' est le barycentre de (A', 1) , (B', 2) et (C', 3).

Assimiler : 9

Activité 14 Problème d'optimisation

Soient O et A deux points distincts du plan.

On considère la rotation directe r de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$.

1) a) Construire le point B, image du point A par r.

Construire le point C, image du point B par r.

b) Montrer que ABC est un triangle équilatéral.

2) Soit M un point variable du segment [AB] et soit P le point de [BC] tel que BP = AM.

a) Prouver que r(M) = P. En déduire que OM = OP.

b) Soit I le milieu de [MP]. Calculer IM puis MP en fonction de OM.

c) Où doit-on placer M sur le segment [AB] pour que la distance MP soit minimale ?

Activité 15 Image d'un cercle

Soit r une rotation directe de centre O et d'angle α. Soit C le cercle de centre I et de rayon R.

a) Soit $M \in C$ et M' = r (M).

Montrer que M' appartient au cercle C' de centre I' = r(I) et de rayon R.

b) Soit $N' \in C'$ et soit N son antécédent par r. Montrer que $N \in C$.

c) Conclure.

Ce résultat reste t-il valable si r est une rotation indirecte ?

Assimiler : 10

Activité 16 Problème de lieu

Soit IJK un triangle isocèle rectangle en I.

On suppose que le sommet I est fixe et que le sommet J décrit un cercle C.

Déterminer le lieu du point K.

Activité 17 Conservation du contact

Soit r une rotation directe de centre O et d'angle α.

Soient C un cercle de centre I et T une tangente à ce cercle en un point A.

a) Construire les images C' et T' de C et T par la rotation r.

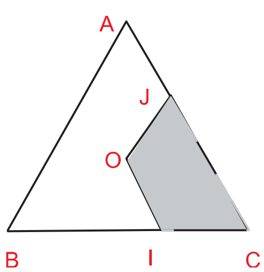
b) Déterminer l'image du point A par r.

c) Déterminer la position relative de C' et T'.

Activité 18 Conservation des aires

Soit ABC un triangle équilatéral de centre O.

Soient I un point du segment [BC], distinct de B et de C, et J le point du segment [AC] tel que $\widehat{IOJ} = \frac{2\pi}{3}$.



1) a) Montrer que J est l'image de I par la rotation directe r de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$.

b) Montrer que les triangles OIC et OJA sont isométriques.

c) En déduire que l'aire du quadrilatère OICJ est le tiers de l'aire du triangle ABC.

2) Soit K l'image de J par la rotation r. Montrer que les quadrilatères OICJ et OJAK ont la même aire.

Activité 19 Problème de construction

On donne deux points distincts A et M, une droite Δ et un cercle Γ, comme indiqués sur la figure ci-contre.

1) a) Reproduire la figure.

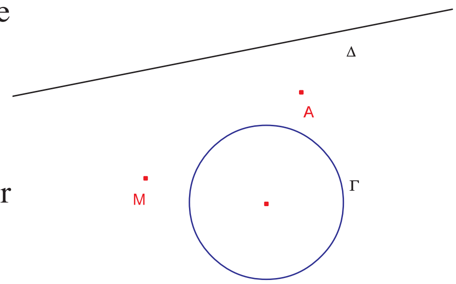
b) Construire la droite Δ' image de la droite Δ par le quart de tour direct de centre A.

2) La droite Δ' coupe le cercle Γ en deux points, on note D l'un de ces deux points.

a) Construire le point B image de D par le quart de tour indirect de centre A.

b) Construire le point C tel que ABCD soit un carré.

3) Construire un carré MNPQ tel que N appartienne à la droite Δ et Q appartienne au cercle Γ.



Figures globalement invariantes - Eléments de symétrie d'une figure

Activité 20

Soient D et D' deux droites perpendiculaires en O, et soit A un point de D', distinct de O. Déterminer l'image de la droite D par :

- La symétrie axiale d'axe D'.
- La symétrie centrale de centre O.
- La translation de vecteur $\overrightarrow{OA}$.
- Le quart de tour direct de centre O.

Activité 21

Soit C un cercle de centre O et D une droite passant par O.

Déterminer l'image du cercle C par :

- La symétrie axiale d'axe D.
- La symétrie centrale de centre O.
- L'homothétie de centre O et de rapport $\frac{1}{2}$.
- Une rotation directe ou indirecte de centre O et d'angle α

Définitions

– On dit qu'une figure est globalement invariante par une application du plan si son image par cette application est elle même.
– On dit qu'un point I est un centre de symétrie d'une figure si cette figure est globalement invariante par la symétrie centrale de centre I.
– On dit qu'une droite D est un axe de symétrie d'une figure si cette figure est globalement invariante par la symétrie axiale d'axe D.

Activité 22

Soit ABC un triangle équilatéral et soit A' le milieu de [BC].

a) Montrer que le triangle ABC est globalement invariant par la symétrie axiale d'axe (AA').

b) Déterminer les axes de symétrie de ce triangle.

Activité 23

Déterminer les éléments de symétrie d'un droite, d'un cercle et d'un carré.

Assimiler : 11-12

Le radian

1 Reproduire et compléter le tableau suivant :

Mesure en degré		120°		20°	
Mesure en radian	$\frac{3\pi}{4}$		$\frac{\pi}{5}$		0

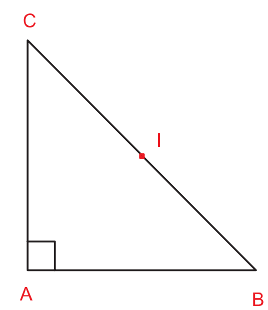
2 Convertir en radian 18°, 72° et 150°.

3 Convertir en degré $\frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{10}, \frac{4\pi}{5}, \frac{5\pi}{6}$ et 1 rad .

Image d'un point par une rotation

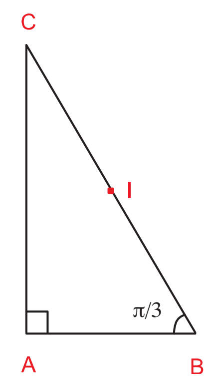
4 O et A étant deux points distincts donnés. Construire l'image de A par la rotation indirecte de centre O et d'angle $\frac{\pi}{6}$.

5 Dans la figure ci-contre ABC est un triangle rectangle isocèle en A.
I est le milieu du segment [BC].
1) Construire :
a) L'image de C par la rotation directe de centre B et d'angle $\frac{\pi}{4}$.
b) L'image de B par la rotation indirecte de centre C et d'angle $\frac{\pi}{4}$.
2) Quelle est l'image de A par le quart de tour direct de centre I ?



6 Soient O et M deux points distincts du plan.
1) a) Construire le point M' image de M par la rotation directe de centre O et d'angle $\frac{\pi}{6}$.
b) Construire le point M'' image de M par la rotation indirecte de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$.
2) Quelle est la nature du triangle OM'M'' ?

7 Dans la figure ci-contre ABC est un triangle rectangle en A tel que $\widehat{CBA} = \frac{\pi}{3}$ et I est le milieu du côté [BC].
a) Déterminer l'image de A par la rotation indirecte de centre B et d'angle $\frac{\pi}{3}$
b) Déterminer l'image de C par la rotation directe de centre I et d'angle $\frac{2\pi}{3}$.



Conservation de la distance

8 Soit ABC un triangle.

1) Construire à l'extérieur de ce triangle les points E et F tels que ABE et ACF soient deux triangles équilatéraux.

2) Montrer que EC = BF.

(On pourra considérer la rotation directe de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$).

Conservation du barycentre

9 Soit ABC un triangle et soit G son centre de gravité.

On désigne par A', B', C' et G' les images respectives de A, B, C et G par une rotation directe ou indirecte.

Montrer que G' est le centre de gravité du triangle A' B' C'.

10 Pour chacune des figures suivantes, dire s'il existe une rotation qui transforme le cercle C en C'.

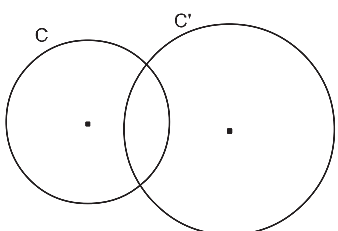


fig 1

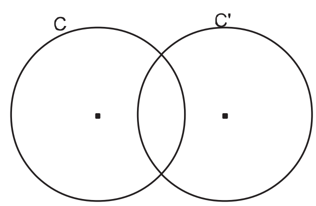


fig2

Figures globalement invariantes – Eléments de symétrie d'une figure

11 Soit ABC un triangle équilatéral de centre O.

Trouver deux rotations directes ou indirectes d'angles différents qui laissent globalement invariant ce triangle.

12 Déterminer les éléments de symétrie des figures ci-dessous.

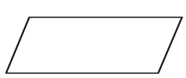


Fig 1

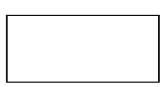


Fig 2

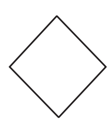


Fig 3

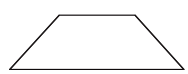


Fig 4

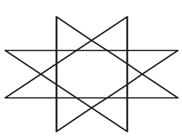


Fig 5

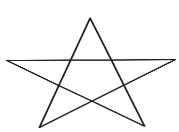


Fig 6

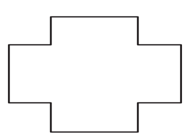


Fig7

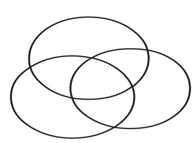
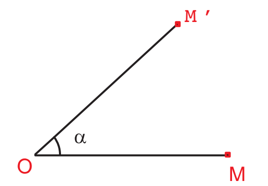


Fig 8

Rotation directe - rotation indirecte

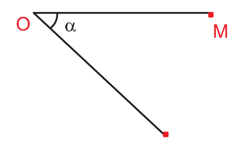
◆ r est une rotation directe de centre O et d'angle α.
On a : r(O) = O et pour tout M ≠ O

Si r(M) = M' alors $\begin{cases} OM' = OM \\ \widehat{MOM'} = \alpha \end{cases}$



◆ r est une rotation indirecte de centre O et d'angle α.
On a : r(O) = O et pour tout M ≠ O,

Si r(M) = M' alors $\begin{cases} OM' = OM \\ \widehat{MOM'} = \alpha \end{cases}$



◆ Etant donné trois points distincts O, A et B tels que OA = OB. Il existe une unique rotation r de centre O telle que r(A) = B.

Conservation de l'alignement, du milieu et du barycentre

◆ Une rotation conserve l'alignement.
◆ Une rotation conserve le milieu.
◆ On admet qu'une rotation conserve le barycentre.
◆ Une rotation conserve le parallélisme.

Conservation des angles, des distances et du contact

◆ Une rotation conserve les angles.
En particulier une rotation conserve l'orthogonalité.
◆ Une rotation conserve les distances.
◆ Une rotation conserve le contact.

Image d'une figure usuelle

◆ L'image d'un segment par une rotation est un segment qui lui est isométrique.
◆ L'image d'une droite par une rotation est une droite.
◆ L'image d'une droite par un quart de tour est une droite qui lui est perpendiculaire.
◆ L'image d'un cercle de centre I par une rotation r est un cercle de même rayon et de centre I' = r (I).
◆ L'image d'un triangle par une rotation est un triangle qui lui est isométrique.
◆ On admet que : Une figure et son image par une rotation sont superposables.
En particulier, un polygone et son image par une rotation sont superposables
Ils ont donc même périmètre, même aire et les angles homologues sont isométriques.

Développer ses compétences

1 Soit ABC un triangle.
On construit à l'extérieur de ce triangle les carrés ABDE et BCFG et on désigne par I, J, K et L les milieux respectifs de [AD], [DG], [GC] et [CA].
a) Montrer que les droites (AG) et (CD) sont perpendiculaires et que AG = CD.
b) En déduire que IJKL est un carré.

Indication
a) Considérer un quart de tour de centre B.
b) Penser à la droite des milieux.

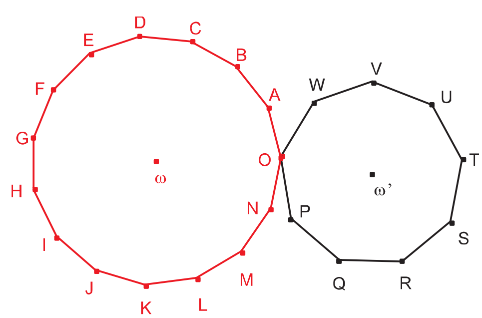
Constructions géométriques

2 Soient D une droite, A un point de D et O un n'appartenant pas à D.
Soit D' l'image de la droite D par une rotation r de centre O.
Construire D' sachant qu'elle passe par A.

Indication
Soit H le projeté orthogonal de O sur D. Le cercle de centre O et passant par H est tangent à la droite D et il est globalement invariant par r.
Construire D' sachant qu'une rotation conserve le contact.

Rotations, arithmétique et suites

3 Dans la figure ci-dessous :
- Les points O, A, B, …, M, N sont les sommets d'un polygone régulier à 15 côtés et de centre ω.
- Les points O, P, Q, …, V, W sont les sommets d'un polygone régulier à 9 côtés et de centre ω'.



On désigne par : R la rotation directe de centre ω et d'angle $\frac{2\pi}{15}$.

R' la rotation directe de centre ω' et d'angle $\frac{2\pi}{9}$.

On définit la suite (M_n) de points par : $M_0 = O$ et pour tout entier naturel n, $M_{n+1} = R(M_n)$.

On définit la suite (P_n) de points par : $P_0 = O$ et pour tout entier naturel n, $P_{n+1} = R'(P_n)$.

Indiquer la position de : M_5, P_5, M_{20}, P_{20}, M_{2006} et P_{2006}.

a) Déterminer le plus petit entier naturel n non nul tel que $M_n = P_n = O$.

b) En déduire l'ensemble E des entiers naturels n tels que $M_n = P_n = O$.

1 A l'aide d'un logiciel de géométrie :

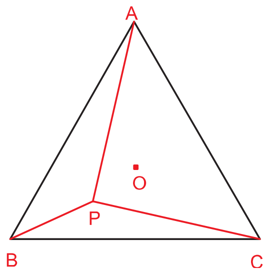
- Construire un triangle équilatéral ABC (utiliser polygone régulier du menu du logiciel), nommer O son centre.
- Tracer les droites (AB), (BC) et (AC).

Soit M un point variable (point sur objet) de la droite (AB).

- Construire :
  - Le point I, intersection de la droite (AC) et la parallèle à (BC), passant par M.
  - Le point J, intersection de la droite (BC) et la parallèle à (AC), passant par M.
  - La médiatrice du segment [IJ].
- Déplacer le point M sur la droite (AB) et observer la médiatrice de [IJ].
- Conjecturer
- Justifier votre conjecture.

2 Point de Toricilli

Dans la figure ci-contre ABC est un triangle équilatéral de centre O, et P un point variable à l'intérieur du triangle.



1) A l'aide d'un logiciel de géométrie :

a) Reproduire la figure

b) Mesurer la longueur de chacun des segments [PA], [PB] et [PC].

c) Utiliser la calculatrice du logiciel pour calculer PA + PB + PC.

d) Faite varier le point P à l'intérieur du triangle et observer la variation de PA + PB + PC. Placer P de façon que PA + PB + PC soit minimum. Conjecturer sur la position du point P.

2) On se propose de justifier la conjecture précédente.
P étant un point quelconque à l'intérieur du triangle ABC.

Soit r la rotation directe de centre B et d'angle $\frac{\pi}{3}$ On pose r(P) = Q et r(A) = C'.

a) Quelle est la nature des triangles PQB et BAC' ?

b) Prouver que PA + PB + PC = C'Q + QP + PC.

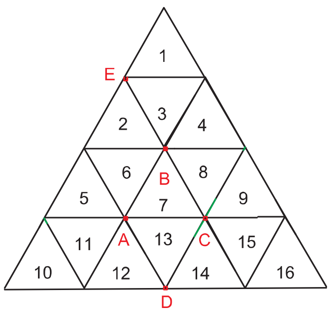
c) Montrer que si les points C', Q, P et C sont alignés dans cet ordre, alors PA + PB + PC est minimum.

d) Prouver que si les points C', Q, P et C sont alignés dans cet ordre, alors
$\widehat{APB} = \widehat{APC} = \widehat{BPC} = \frac{2\pi}{3}$.

e) Déterminer alors le point P, pour lequel PA + PB + PC est minimum.
(P s'appelle le point de Toricelli).

Appliquer

1 La figure ci-dessous représente un pavage d'un triangle équilatéral en 16 triangles équilatéraux numérotés de 1 à 16.



a) Quelle est l'image du triangle 2 par la rotation directe de centre E et d'angle $\frac{\pi}{3}$?

b) Quelle est l'image du triangle 5 par la rotation indirecte de centre A et d'angle $\frac{2\pi}{3}$?

c) Quelle est l'image du triangle 10 par le demi tour de centre A?

d) Quelle est l'image du triangle 4 par la translation de vecteur $2\overrightarrow{BA}$?

2 1) Construire un carré ABCD telque D soit l'image de B par le quart de tour direct de centre A.

2) Construire les images de ce carré par :

a) La symétrie axiale $S_{(AB)}$

b) La symétrie axiale $S_{(BC)}$

c) Le quart de tour direct de centre D

d) La translation de vecteur $2\overrightarrow{BC}$

e) Le quart de tour direct de centre A

La figure obtenue, qui est formée de six carrés juxtaposés est elle un patron d'un cube ?

3

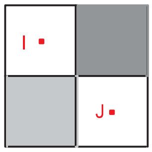


fig 1

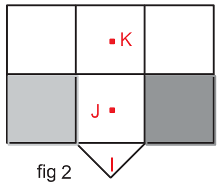


fig 2

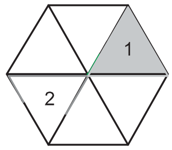


fig 3

1) Pour la figure (fig1)

a) Déterminer :

- une translation - une symétrie centrale - une symétrie axiale qui font passer du carré 1 au carré 2.

b) Trouver une rotation qui fait passer le carré 1 au carré 2.

2) Pour la figure (fig2), trouver :

- une symétrie centrale - une symétrie axiale
- une translation - deux rotations qui font passer du carré 1 au carré 2.

3) Pour la figure (fig3), trouver :

- une symétrie centrale - une symétrie axiale
- deux rotations qui font passer le triangle 1 au triangle 2.

Maîtriser

4 Soit ABC un triangle équilatéral inscrit dans un cercle $\mathscr{C}$ et tel que C est l'image de B par la rotation directe r de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

1) Montrer que $\widehat{AMB} = \frac{2\pi}{3}$.

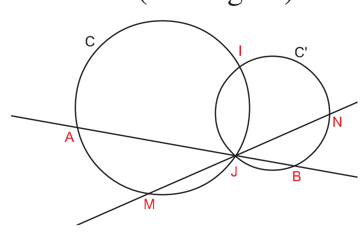
2) Soient M un point de $\mathscr{C}$ situé sur l'arc $[\overset{\frown}{AB}]$ qui ne contient pas le point C et $I = r(M)$.

a) Montrer que $\widehat{AIC} = \frac{2\pi}{3}$.

b) Montrer que $I \in [CM]$.

c) Montrer que MA + MB = MC.

5 Soient C et C' deux cercles sécants en I et J. Une droite D passant par J, coupe C en A et C' en B. Une droite D' passant par J, coupe C en M et C' en N (voir figure).



1)

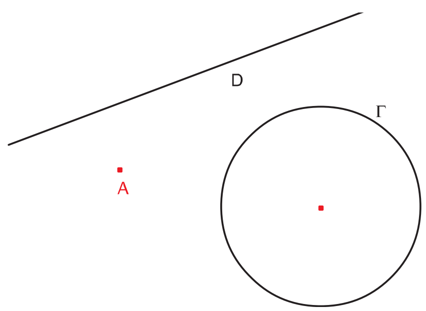
a) Montrer que $\widehat{IAJ} = \widehat{IMJ}$ et $\widehat{IBJ} = \widehat{INJ}$.

b) En déduire que $\widehat{AIB} = \widehat{MIN}$.
2) Soit r la rotation directe de centre I et d'angle $\widehat{AIB}$.
Construire l'image du cercle C par r.

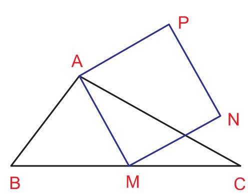
6 Etant donnés deux droites parallèles D_1 et D_2 et un point I, construire les points A de D_1 et B de D_2 tels que le triangle IAB soit équilatéral.

7 Soient ABCD est un carré telque D est l'image de B par le quart de tour direct de centre A et M un point de la droite (BC). La perpendiculaire en A à (AM) coupe (CD) en M'. On désigne par r le quart de tour direct de centre A.
a) Déterminer les images des droites (AM) et (BC) par r.
b) Quelle est la nature du triangle AMM' ?

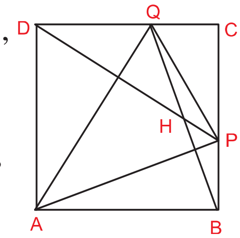
8 Reproduire la figure ci-dessous et construire un triangle équilatéral ABC tel que B ∈ D et C ∈ Γ.



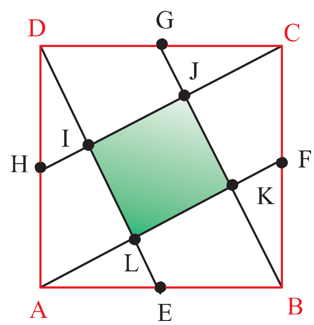
9 Dans la figure ci-contre, ABC est un triangle, M est un point variable sur le côté [BC] et AMNP est un carré.
Quel est l'ensemble des points P lorsque M varie ?



10 Dans la figure ci-contre, ABCD est un carré de centre O, les points P et Q sont respectivement sur les côtés [BC] et [CD] du carré et tels que BP = CQ.
Montrer que le point d'intersection H des droites (BQ) et (DP), est l'orthocentre du triangle APQ.



11 Soit un carré ABCD de centre O. E, F, G et H sont les milieux respectifs de [AB], [BC], [CD] et [DA].
Les droites (AF), (BG), (CH) et (DE) se coupent à l'intérieur du carré en formant un quadrilatère IJKL.



Montrer que ce quadrilatère est un carré dont l'aire est le cinquième de celle du carré initial.

Math et culture

Les carrés magiques

Depuis l'antiquité, les nombres ont été à la fois un outil puissant pour la vie quotidienne et la source de jeux fascinants sans aucun souci d'utilité immédiate. On retrouve les carrés magiques dans de nombreuses civilisations, de la Chine antique aux artistes de la Renaissance, en passant notamment par les Arabes.
Plusieurs mathématiciens Arabes ont étudié les carrés magiques et certains d'entre eux ont proposé des méthodes pour les construire. C'est le cas d'Ibn AL Haythem, Abul Wafa Busjani, AL Kharagi et le mathématicien Tunisien Ibn AL Khatib, qui a exposé dans son livre « Hatt an niqab » des méthodes de constructions de différents carrés magiques.

Pour faire un carré magique, il suffit d'inscrire des entiers naturels dans une grille carrée de telle sorte que la somme de chaque ligne, chaque colonne et chaque diagonale soit toujours la même.

4	9	2
3	5	7
8	1	6

Ci-contre un carré magique 3 × 3. La somme de chaque ligne, chaque colonne et chaque diagonale est 15 (On utilise les entiers de 1 à 9).
Vous pouvez trouver 7 autres carrés magiques 3 × 3, il suffit d'utiliser les applications du plan dans lui-même qui laissent globalement invariant le carré.
A vous de jouer !

- Trouver les 7 autres carrés magiques 3 × 3.
- Montrer que la somme de chaque ligne, chaque colonne et chaque diagonale d'un carré magique 3 × 3 est nécessairement 15.
- Montrer que le nombre central est obligatoirement 5.